Ecuaciones Diferenciales

UNA INTRODUCCIÓN CON APLICACIONES

Claudio Pita

NORIEGA
LIMUSA EDITORES

ECUACIONES DIFERENCIALES

Una introducción con aplicaciones

41409

Claudio de Jesús Pita Ruiz
ESCUELA DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD PANAMERICANA

NORIEGA EDITORES

EDITORIAL LIMUSA

MÉXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

41409

MFN: 14523
Clas.:
515.35
P682
R934
ej 2

Elaboración: SISTEMAS EDITORIALES TÉCNICOS, S.A. de C.V.

La presentación y disposición en conjunto de
ECUACIONES DIFERENCIALES —Una introducción con aplicaciones
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 1989, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.
Balderas 95, Primer piso, 06040, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Registro Núm. 121

Primera edición: 1989
Impreso en México
(6705)

ISBN 968-18-3057-1

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Galileo
(*Il Saggiatore*)

Prólogo

> *The mathematicians sought to use the calculus*
> *to solve more and more physical problems. . .*
> *However, solution of the still more complicated*
> *problems demanded specialized techniques;*
> *thus the subject of differential equations arose.*
>
> *Morris Kline*

Este libro está destinado a usarse como texto en un curso (de aproximadamente 70 horas de clase) de ecuaciones diferenciales para alumnos de ciencias e ingeniería. En él se recoge la experiencia de varios años en los que he impartido tal curso en la Escuela de Ingeniería de la Universidad Panamericana. El programa que se propone cubrir es el tradicional: comenzando por las ecuaciones de primer orden, pasando por las ecuaciones lineales de orden superior al primero y terminando con los métodos de series de potencias, se presenta un panorama general, no profundo, de ese apasionante y vasto mundo de las ecuaciones diferenciales hasta antes de los desarrollos modernos que ha tenido esta teoría durante los siglos XIX y XX.

Desde el punto de vista de la génesis de las ecuaciones diferenciales, éstas formarían parte de la llamada ''matemática aplicada'', pues surgen al tratar de resolver varios problemas ''prácticos''. En lo particular, prefiero no hacer distinciones entre ''matemática pura'' y ''matemática aplicada'' pues, en cualquier postura que se tome al respecto, se encuentran situaciones difíciles de sostener. Prefiero pensar en ''la matemática'' y sus aplicaciones, y así, con esta perspectiva, las ecuaciones diferenciales son una parte —muy importante— de la matemática y de ellas se derivan una gran cantidad de aplicaciones.

Gran parte del material aquí expuesto tiene su origen durante los siglos XVII y XVIII (en este sentido es que cabe el adjetivo de ''tradicional'' para un curso que cubre estos temas). En 1693, Huygens y Leibniz se refieren por primera vez de una manera explícita a una ''ecuación diferencial''. A partir de entonces y durante todo el siglo XVIII, grandes figuras como Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli, Clairaut, Lagrange, y, por su puesto Euler (la figura más importante de la matemática del siglo XVIII), entre otros, desarrollaron la teoría de las ecuaciones diferenciales, conservándose hasta nuestros tiempos sin mayor alteración muchas de sus ideas y métodos originales.

El único prerrequisito formal para estudiar este libro (a excepción de la sección 5 del capítulo 2 y del apéndice de este mismo capítulo, que son partes opcionales del texto que demandan mayor madurez matemática por parte del lector) es haber tomado un buen curso de cálculo diferencial e integral de funciones reales de una variable real. Sin embargo, en el capítulo 4 (más concretamente en la sección 1 de tal capítulo) se requiere tener algunos conocimientos (elementales) de álgebra lineal. Por ejemplo, es necesario conocer los resultados importantes sobre sistemas de ecuaciones lineales y sobre determinantes. El lector que no tenga conocimiento previo del álgebra lineal puede omitir el estudio de las demostraciones de los teoremas y corolarios que aparecen en la sección 1, centrándose solamente en la comprensión del contenido de los mismos y pasar luego a estudiar los métodos de solución de las ecuaciones lineales que son tratados en las secciones posteriores.

En el capítulo 1 se dan las herramientas y definiciones básicas que se usarán en el desarrollo posterior del texto. El capítulo 2 contiene un estudio sistemático de las ecuaciones diferenciales de primer orden. A excepción de la sección 6, en donde se tratan las ecuaciones de Lagrange y de Clairaut, en este capítulo se consideran solamente ecuaciones de primer orden resueltas respecto de la derivada, es decir, ecuaciones del tipo $F(x, y, y') = 0$, en donde es posible despejar y' y escribir entonces la ecuación como $y' = f(x, y)$.

El espíritu de exposición que he procurado seguir en estos dos capítulos y, en general, en todo el libro, podría ser calificado de poco riguroso. En muchos casos (éste es uno de ellos) se puede lograr una mayor comunicación con el lector, en cuanto a la claridad de las ideas expuestas, sacrificando un poco el rigor en la exposición (esto no implica que el rigor sea necesariamente poco claro). Es por eso que, debido al público para quien está pensada esta obra, opté por ganar claridad en la exposición sacrificando (aunque no en su totalidad) el rigor. Sin embargo, el lector de carácter más matemático puede estudiar la sección 5 del capítulo 2 que llamé ''Ecuaciones Exactas desde un Punto de Vista Avanzado (un poco de análisis matemático)''. El material expuesto en esa parte tiene un espíritu completamente distinto al del resto del capítulo y puede omitirse sin alterar en absoluto la secuencia de exposición de los temas. En esta sección se trata de hacer un poco de teoría, con cierto rigor, de las ecuaciones diferenciales de primer orden cuando éstas son estudiadas bajo la óptica de ecuaciones exactas. Sobre todo, la discusión se centra en la importancia de la estructura topológica de los dominios de definición de las funciones $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$ que constituyen la ecuación $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ cuando se le quiere estudiar como una ecuación exacta. Al final de esta sección se encuentra un apéndice en el que se presenta el Teorema de Cauchy y una demostración de él. Quise incluir esta parte pues, siendo el Teorema de Cauchy uno de los resultados más importantes y profundos de la Teoría de Funciones de Variable Compleja (y quizás de la matemática en general), éste se desprende casi por sí mismo de la teoría que se ha generado en la sección 5.

Se incluye también un apéndice al capítulo 2 en el que se presenta un teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este apéndice constituye, junto con la sección 5 del capítulo 2 anteriormente citada, la parte más rigurosa del texto y puede también ser omitida en un primer curso sobre la materia sin perder la secuencia de exposición de los temas.

En este libro se ha dedicado un capítulo completo (el número 3) a las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden y algunas (no lineales) de orden superior. El estilo de exposición de este capítulo es a base de ejemplos que ilustran el cómo, en determinados problemas prácticos, las ecuaciones diferenciales son usadas para su solución.

Aunque considero hasta cierto punto natural la eterna interrogante de los alumnos que estudian matemáticas: ''¿para qué me servirá esto?'', no deja de venir siempre a mi mente aquel pasaje en el cual un alumno de Euclides que comenzaba sus estudios de geometría al estudiar la primera de las proposiciones de ''Los Elementos'' preguntó: ''¿Qué sacaré con saber esto?''. Entonces Euclides llamando a su esclavo le dijo: ''Dadle tres monedas, pues, según dice, todo lo que aprende le debe rendir un beneficio''. En mi caso, no ofrezco monedas, pero en cambio ofrezco el capítulo 3 en el que pretendo mostrar que el estudio de las ecuaciones diferenciales rinde beneficios.

En la sección 6 del capítulo 3, así como en el apéndice del mismo, se consideran algunos problemas clásicos que constituyen, junto con otros, aquellos problemas prácticos de los que hablaba al inicio del prólogo, que acompañaron el nacimiento de las ecuaciones diferenciales y su desarrollo durante el siglo XVIII. Así, en la sección 6.1 se trata el problema de la Catenaria, propuesto inicialmente por Jakob Bernoulli, y resuelto independientemente por Leibniz, Huygens y Johann Bernoulli en 1691. La solución de este último es la que se presenta ahora en el texto. En la sección 6.2 se trata el problema de la Tractriz, estudiado y resuelto inicialmente por Jakob Bernoulli en 1691. Por último, el apéndice del capítulo 3, que titulé ''La Braquistócrona'', contiene un estudio sobre el famoso ''Problema de la Braquistócrona'' conocido desde el siglo XVII. Este apéndice es un artículo que escribí independientemente del libro y que puede ser leído sin ningún requisito previo.

El capítulo 4 trata sobre ecuaciones lineales de orden *n*. En la sección 1 se hace un poco de teoría acerca de las soluciones de las ecuaciones de este tipo y, en las secciones subsecuentes, la discusión va encaminada casi por completo a obtener métodos para determinar explícitamente las soluciones de algunos tipos especiales de estas ecuaciones. Se termina el capítulo (sección 8) con un estudio de los fenómenos de vibraciones, que son el ejemplo por excelencia de los fenómenos físicos que son modelados y estudiados por medio de ecuaciones diferenciales lineales.

En el capítulo 5 se estudian los métodos para obtener soluciones de las ecuaciones diferenciales por medio de series de potencias. Se estudia la Ecuación de Legendre (sección 3.1), la ecuación hipergeométrica (sección 4, ejemplo 2) y termina el capítulo estudiando la importante ''Ecuación de Bessel'', como un ejemplo de una ecuación diferencial en la que interesan sus soluciones alrededor de un punto singular regular.

El libro contiene alrededor de 100 ejemplos resueltos y más de 600 problemas propuestos para que el estudiante resuelva. He marcado con un pequeño triángulo negro aquellos problemas que considero demandan para su solución un mayor esfuerzo, ya sea de madurez matemática o de habilidad algebraica.

El estudiante debe ser consciente de que la matemática no es una ciencia contemplativa. Ni este libro, ni ningún otro libro de matemáticas debe ser leído como si fuera una novela. La matemática demanda mucho trabajo y esfuerzo, y debe enfrentársele con una actitud de lucha y determinación (por ejemplo, al resolver los problemas propuestos). Espero que el lector comparta, junto conmigo, la visión de Ian Stewart (y creo que de cualquier gente involucrada con la matemática) cuando dice: ''La matemática no es fácil, —nada importante lo es—, pero, a cambio, recompensa los esfuerzos realizados''*. La fascinación que proporciona comprender las ideas matemáticas no se encuentra en ninguna otra ciencia. En su aventura por descubrir una parte del mundo de las ecuaciones diferenciales, deseo al lector mucha suerte.

Para terminar, quisiera agradecer al Matemático Alfonso Leal G. por sus sugerencias y comentarios sobre la obra, y a quien el lector le debe la ausencia de varios descuidos míos en el original. Agradezco también a la Escuela de Ingeniería de la Universidad Panamericana el apoyo que me brindó para que este proyecto se convirtiera en una realidad, y a la Srita. Irma Cuéllar, quien realizó el trabajo mecanográfico original.

Claudio Pita Ruiz
Escuela de Ingeniería
Universidad Panamericana.

---

*Ian Stewart, *Conceptos de Matemática Moderna,* Alianza Universidad, (187). p.10.

Contenido

Prólogo 7

Capítulo 1
Generalidades 17

Algunas definiciones preliminares 17
Solución de una ecuación diferencial 17
Soluciones generales y particulares. Condiciones iniciales 19
Construcción de la ecuación diferencial dada su solución general 21
Soluciones singulares 24
Interpretación geométrica de la ecuación $y' = f(x, y)$ 26
Comentarios acerca de la existencia y unicidad de soluciones 28
Ejercicios (Capítulo 1) 29

Capítulo 2
Ecuaciones de primer orden 35

1. Ecuaciones de variables separables 35
   Ejercicios (Capítulo 2. Sección 1) 40

2. Ecuaciones homogéneas y reducibles a homogéneas 42
   2.1 Ecuaciones homogéneas 42
   2.2 Ecuaciones reducibles a homogéneas 47
   Ejercicios (Capítulo 2. Sección 2) 52

3. Ecuaciones lineales y reducibles a lineales 54
   3.1 Ecuaciones lineales 54
   3.2 Ecuaciones reducibles a lineales 65
   Ejercicios (Capítulo 2. Sección 3) 71

4. Ecuaciones diferenciales exactas. Factores de integración 75
  4.1 Ecuaciones exactas 75
  4.2 Factores de integración 82
  Ejercicios (Capítulo 2. Sección 4) 91

5. Ecuaciones exactas desde un punto de vista avanzado (un poco de análisis matemático) 94
  5.1 Nuestro contraejemplo 96
  5.2 Formas diferenciales. Integrales curvilíneas 100
  5.3 Caracterización de ecuaciones exactas 107
  5.4 Propiedad local de exactitud 113
  5.5 Homotopía. Conjuntos simplemente conexos 115
  5.6 El teorema de Green en un rectángulo 119
  5.7 Formas diferenciales inducidas 121
  5.8 Integrales curvilíneas y homotopía 124
  5.9 Comentarios finales 129
  Ejercicios (Capítulo 2. Sección 5) 132
  Apéndice a la sección 5. El teorema de Cauchy en variable compleja 136

6. Ecuaciones de Lagrange y de Clairaut 139
  Ejercicios (Capítulo 2. Sección 6) 146
  Apéndice al capítulo 2
  Un teorema de existencia y unicidad 146

  Algunos antecedentes de análisis 147
  Teorema de existencia y unicidad 159
  Comentarios finales 165

Capítulo 3
Aplicaciones 169

1. Aplicaciones a la mecánica 169
  Ejercicios (Capítulo 3. Sección 1) 198

2. Aplicaciones a la química 202
  2.1 Problemas de mezclado 202
  2.2 Problemas de disoluciones 210
  2.3 Problemas de cinética química 217
  Ejercicios (Capítulo 3. Sección 2) 223

3. Aplicaciones a la descripción geométrica de las curvas en el plano 228
  Ejercicios (Capítulo 3. Sección 3) 244

4. Trayectorias ortogonales e isogonales 244
  4.1 Trayectorias ortogonales 244
  4.2 Trayectorias isogonales 261
  Ejercicios (Capítulo 3. Sección 4) 263

5. Aplicaciones a problemas relacionados con crecimiento y decrecimiento 264
  5.1 Desintegración radiactiva 265
  5.2 Ley de enfriamiento de Newton 269
  5.3 Modelos de población 275
  Ejercicios (Capítulo 3. Sección 5) 280

6. Aplicaciones diversas 283
  6.1 La catenaria 283
  6.2 La tractriz 285
  6.3 La catenaria y la tractriz 287
  6.4 La propiedad focal de una parábola 292
  Ejercicios (Capítulo 3. Sección 6) 294

Apéndice al capítulo 3

La braquistócrona 296

El comienzo: Galileo 296
  La trayectoria recta (el plano inclinado) 298
  La trayectoria circular (el péndulo) 299
Los Bernoulli 305
  La solución de Johann Bernoulli 306
  La solución de Jakob Bernoulli 312
Solución de la ecuación diferencial de la braquistócrona 321
Cálculo del tiempo de descenso 324

Capítulo 4
Ecuaciones lineales de orden *n* 327

Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden *n* 329
  Ejercicios (Capítulo 4. Introducción) 331

1. Estudio de las soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden *n* 333
  1.1 Dependencia e independencia lineal de funciones. Wronskianos 334
  1.2 Independencia lineal de soluciones 338
  1.3 Una fórmula para el Wronskiano: la fórmula de Abel 339
  1.4 Sistema fundamental de soluciones 342
  1.5 Construcción de la ecuación lineal homogénea de orden *n* dado su conjunto fundamental de soluciones 346
  1.6 Algunas propiedades de las soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden 348
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 1) 351

2. Reducción del orden 355
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 2) 360

3. Variación de parámetros 362
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 3) 370

4. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes 373
  4.1 Construcción de la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ 373
  4.2 Caso de raíces complejas 378
  4.3 Resumiendo 380
  4.4 Generalizando 381
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 4) 386

5. Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes 389
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 5) 408

6. Métodos con operadores 415
  6.1 El operador $F(D)$ 416
  6.2 El operador $\frac{1}{F(D)}$ 422
  6.3 Aplicación a la obtención de soluciones particulares 428
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 6) 434

7. Ecuaciones de Euler 435
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 7) 438

8. Fenómenos de vibraciones 440
  8.1 Sistemas masa-resorte y circuitos RLC 443
  8.2 Vibraciones libres 449
  8.3 Vibraciones forzadas 461
  Ejercicios (Capítulo 4. Sección 8) 469

Capítulo 5
Solución por series de potencias 473

1. Series de potencias 477
  Ejercicios (Capítulo 5. Sección 1) 484

2. Puntos ordinarios y puntos singulares 487
  Ejercicios (Capítulo 5. Sección 2) 488

3. Solución en serie de potencias alrededor de puntos ordinarios 489
  3.1 La ecuación de Legendre 494
  Ejercicios (Capítulo 5. Sección 3) 502

4. Solución en serie de potencias alrededor de puntos singulares regulares 505
  4.1 Las raíces de la ecuación indicial son iguales 519
  4.2 Las raíces de la ecuación indicial difieren por un entero 526
  Ejercicios (Capítulo 5. Sección 4) 536

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO
BIBLIOTECA

5. La ecuación de Bessel 538
Ejercicios (Capítulo 5. Sección 5) 549
Apéndice al capítulo 5
La función gamma y la función beta 553

Bibliografía 561

CAPÍTULO 1

Generalidades

ALGUNAS DEFINICIONES PRELIMINARES

Se llama *ecuación diferencial* aquella en la que aparece una cierta función incógnita y, su(s) variable(s) independiente(s) y su(s) derivada(s).

Si la función involucrada y sólo depende de una variable (x), a la ecuación diferencial se le llama *ecuación diferencial ordinaria*, la cual es entonces una expresión del tipo

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

mientras que si la función y depende de más de una variable, a la ecuación diferencial se le llama *ecuación diferencial parcial* o *ecuación diferencial en derivadas parciales.*

Definimos el *orden* de una ecuación diferencial como el de la derivada de mayor orden que aparezca en la ecuación.

Así, por ejemplo, la ecuación

$$y' + 3xy = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, mientras que la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial {x_1}^2} + y \frac{\partial^2 y}{\partial x_2\, \partial x_1} = 3\, x_1\, x_2 y$$

es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Consideremos la ecuación diferencial * de orden n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

---

* En lo que sigue se evitará repetir constantemente la palabra ''ordinaria'', pues sólo ecuaciones de este tipo serán objeto de estudio en este texto.

Llamaremos *solución* de esta ecuación diferencial a una función $y = y(x)$, tal que sustituida en la ecuación reduzca a ésta a una identidad. Es decir, $y = y(x)$ será solución de la ecuación (1) si

$$F\,(x,\ y(x),\ y'\,(x),\ \ldots,\ y^{(n)}\,(x)) \equiv 0$$

Más precisamente, la función $y\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, derivable hasta el orden n inclusive, será solución de la ecuación (1) si

$$F\,(x,\ y(x),\ y'\,(x),\ \ldots,\ y^{(n)}\,(x)) = 0 \quad \forall\ x \in I$$

(tal que $(x,\ y\,(x),\ y'\,(x),\ \ldots,\ y^{(n)}\,(x))$ esté en el dominio de F)

Ejemplo 1

La función $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $(x \neq 0)$ es solución de la ecuación $xy' + y = \cos x$ puesto que

$$x\,\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos x \quad (x \neq 0)$$

Es decir, $xy' + y = \cos x$ con $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se convierte en una identidad para toda $x \neq 0$.

Ejemplo 2

$y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^x$, donde C es cualquier constante, es solución de la ecuación $y' - y = e^{x + x^2}$ puesto que

$$\begin{aligned} y' - y &= [e^x \textstyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^x]' - [e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^x] \\ &= e^x e^{x^2} + \cancel{e^x \textstyle\int_0^x e^{t^2}\,dt} + \cancel{Ce^x} - \cancel{e^x \textstyle\int_0^x e^{t^2}\,dt} - Ce^x \\ &= e^{x + x^2} \end{aligned}$$

Es decir, $y' - y = e^{x + x^2}$ con $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^x$ es una identidad para cualquier valor de la constante C.

Observe que en el ejemplo anterior la solución de la ecuación diferencial no está dada en términos de funciones elementales; sin embargo, ésta *es una función que satisface idénticamente* a la ecuación diferencial, por lo que, según la definición anterior, será realmente una *solución* de la ecuación.

Ejemplo 3

La función dada en forma paramétrica

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\,ln\ t + \frac{3}{4\,t^2} \\ y &= \frac{1}{4}\,t + \frac{3}{4\,t^3} \end{aligned} \right. \qquad (t > 0)$$

es solución de la ecuación $(y'')^2 - 2y'\,y'' + 3 = 0$.

En efecto,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{9}{4\,t^4}}{\frac{1}{2t} - \frac{6}{4\,t^3}} = \frac{1}{2t}\,(t^2 + 3)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2+3}{2t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2+3}{2t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{2t^2 - 6}{4\,t^2}}{\frac{1}{2t} - \frac{6}{4t^3}} = t$$

de modo que

$$(y'')^2 - 2y'\,y'' + 3 = t^2 - 2\,\frac{1}{2t}\,(t^2 + 3)\,t + 3 = 0$$

Ejemplo 4

La función dada en forma implícita

$$y\ ln\ y = x + \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

es solución de la ecuación

$$y\,(1 + ln\ y)\,y'' + (y')^2 = 2\,xye^{x^2}$$

En efecto, al derivar implícitamente la expresión inicial obtenemos

$$y' + y'\ ln\ y = 1 + e^{x^2}$$

Derivando de nuevo

$$y'' + (y')^2\,\frac{1}{y} + y''\ ln\ y = 2\,xe^{x^2}$$

o

$$y\,(1 + ln\ y)\,y'' + (y')^2 = 2\,xye^{x^2}$$

por lo que evidentemente esta última expresión (que es la ecuación diferencial original) queda convertida en una identidad con la función dada.

SOLUCIONES GENERALES Y PARTICULARES. CONDICIONES INICIALES

Consideremos la ecuación diferencial (1). Supongamos que queremos encontrar una solución a esta ecuación que satisfaga las siguientes condiciones:

$$n \text{ condiciones} \begin{cases} y\,(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}\,(x_0) = y_0{}^{(n-1)} \end{cases}$$

donde $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ son números dados y x_0 es algún punto del dominio de y.

A estas n condiciones se les llama *condiciones iniciales* y al problema (en abstracto) planteado anteriormente (encontrar una solución de una ecuación diferencial sujeta a ciertas condiciones iniciales) se le llama *problema de Cauchy*.

Llamaremos *solución general* de una ecuación como la que hemos marcado con el número (1) a una función que sea solución de la ecuación y que posea n constantes *arbitrarias*.

Una *solución particular* de esta ecuación es aquella que se obtiene de la solución general por medio de la asignación de valores específicos a (una o varias de) las constantes arbitrarias que aparecen en tal solución.

Debemos aclarar lo que debe entenderse por el término ''constantes arbitrarias''. Suponga que

$$\phi\,(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

sea solución (dada en forma implícita) de la ecuación (1), donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son ciertas constantes. Si después de imponer las n condiciones iniciales es posible asignar valores bien determinados a estas constantes, entonces diremos que éstas son constantes arbitrarias.

Por ejemplo, la función

$$y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}\,e^x$$

es solución general de la ecuación

$$y' + 2y = e^x$$

En efecto

$$(Ce^{-2x} + \frac{1}{3}\,e^x)' + 2(Ce^{-2x} + \frac{1}{3}\,e^x) = -\,2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}\,e^x +$$

$$\frac{2}{3}\,e^x + 2Ce^{-2x} = e^x$$

Es decir, tal función es solución de la ecuación dada y además la constante C que aparece en la expresión de esta solución es arbitraria, puesto que si imponemos la condición inicial $y\,(x_0) = y_0$, tendríamos que C queda bien determinada por

$$C = \frac{y_0 - \frac{1}{3} e^{x_0}}{e^{-2x_0}}$$

Por otra parte, la función

$$y = C_1 e^{5x + C_2}$$

no es solución general de la ecuación

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

pues a pesar de que es solución, ya que

$$(C_1 e^{5x + C_2})'' - 6(C_1 e^{5x + C_2})' + \boxed{5e^{5x + C_2}} = (25 - 30 + 5)\, C_1 e^{5x + C_2} = 0$$

las constantes C_1 y C_2 no son arbitrarias. En efecto, imponiendo las condiciones iniciales $y\,(x_0) = y_0$, $y'\,(x_0) = y_0'$ tendríamos

$$y_0 = C_1 e^{5x_0 + C_2}$$

$$y_0' = 5C_1 e^{5x_0 + C_2}$$

que son expresiones de donde *no* es posible dejar bien determinadas C_1 y C_2. Obsérvese que

$$y = C_1 e^{5x + C_2} = C_1 e^{C_2} e^{5x} = \tilde{C}_1 e^{5x}$$

Es decir, que en realidad $y = C_1 e^{5x + C_2}$ es una solución que posee sólo *una* constante arbitraria (a saber $\tilde{C}_1 = C_1 e^{C_2}$), y por lo tanto no puede ser solución general de una ecuación de *2o.* orden, tratándose entonces de una solución particular de la ecuación dada.

Se puede demostrar (refiriéndonos al mismo ejemplo anterior) que

$$y = \tilde{C}_1 e^{5x} + \tilde{C}_2 e^{x}$$

es solución general de la ecuación dada y entonces $y = \tilde{C}_1 e^{5x}$ proviene de la solución general haciendo $\tilde{C}_2 = 0$, por lo que es una solución particular de tal ecuación.

CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DADA SU SOLUCIÓN GENERAL

Consideremos la familia *n*-paramétrica de funciones $y = y\,(x)$ dada implícitamente por*

$$f\,(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \qquad (2)$$

---

* Para la discusión que se hará en este apartado necesitamos que *f* sea una función derivable hasta orden *n* inclusive.

Nos preguntamos si esta función define implícitamente a la solución general de alguna ecuación diferencial de orden n. Derivando respecto de x la expresión 2 obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0 \qquad **$$

Al derivar nuevamente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'\right) = 0$$

o

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'' + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, y'\right] y' = 0$$

o

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(y')^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\, y'' = 0$$

Una nueva derivación nos conduce a la expresión

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, y'' + 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}\, y' + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\,(y')^2 + 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, y'\, y'' +$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,(y')^3 + \frac{\partial f}{\partial y}\, y''' = 0$$

Así sucesivamente podemos continuar derivando hasta el orden n y obtener una expresión como la siguiente:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y}\, y^{(n)} = 0$$

Hemos obtenido n expresiones (las de las n correspondientes derivaciones que hemos efectuado) que, junto con aquella que define la familia n-paramétrica de funciones $y = y(x)$ considerada inicialmente, nos dan un total de $n + 1$ expresiones, en las cuales se encuentran involucradas n constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Supongamos que las n constantes que aparecen en la expresión (2) son *arbitrarias*. Esto quiere decir que de las n expresiones

$$\begin{cases} f(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0 \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, y^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

** Se entiende que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ están estimadas en $(x, y, C_1, \ldots, C_n)$.

imponiendo ciertas n condiciones iniciales a la función $y = y(x)$, digamos $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, estas n constantes quedan *bien determinadas.*

Determinando entonces estas constantes y sustituyendo en

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(n)} = 0$$

su valor, obtenemos finalmente una expresión del tipo

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

que es una ecuación diferencial de orden n, de la cual evidentemente la expresión (2) es su *solución general.*

Concretando la discusión anterior para una ecuación de primer orden tendríamos que dada la familia monoparamétrica de funciones (o de curvas en el plano)

$$f(x, y, C) = 0$$

obtenemos, derivando respecto de x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, C) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, C)y' = 0$$

Entonces, eliminando C de las expresiones

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, C) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, C)y' = 0 \end{cases}$$

obtenemos la expresión $F(x, y, y') = 0$, que es la ecuación diferencial de la cual $f(x, y, C) = 0$ es solución general.

Ejemplo 5

Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general sea la familia de círculos con centro en la recta $y = x$, tangentes al eje y.

Solución

Tenemos entonces una familia de círculos con centro en (C, C) y radio C (C es una constante arbitraria). La ecuación de esta familia es

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$$

Dado que esta expresión posee sólo una constante arbitraria, ésta será solución general de una ecuación de primer orden.

Derivando obtenemos

$$2\,(x - C) + 2\,(y - C)\,y' = 0.$$

Tenemos que eliminar C del sistema

$$\begin{cases} (x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2 \\ (x - C) + (y - C)\,y' = 0 \end{cases}$$

De la segunda expresión obtenemos

$$C = \frac{x + y\,y'}{1 + y'}$$

Sustituyendo en la primer expresión nos queda

$$\left(x - \frac{x + y\,y'}{1 + y'}\right)^2 + \left(y - \frac{x + y\,y'}{1 + y'}\right)^2 = \left(\frac{x + y\,y'}{1 + y'}\right)^2$$

o

$$(x - y)^2\,(1 + (y')^2) = (x + y\,y')^2$$

que es la ecuación diferencial buscada.

SOLUCIONES SINGULARES

Consideremos la familia de tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Sea (cos t, sen t) un punto cualquiera del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Es claro entonces que la tangente en ese punto tiene por ecuación

$$y - \operatorname{sen} t = -\frac{1}{\tan t}\,(x - \cos t)$$

Derivando obtenemos

$$y' = -\frac{1}{\tan t}$$

de donde

$$\operatorname{sen} t = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \qquad \cos t = \pm\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

Entonces, la ecuación diferencial de esta familia de tangentes es

$$y = xy' \pm \sqrt{1 + (y')^2}$$

Se puede afirmar que $x^2 + y^2 = 1$ también satisface esta ecuación diferencial.

Para entender esto obtengamos la ecuación diferencial de *este* círculo. Derivando $x^2 + y^2 = 1$ obtenemos

$$x + y\,y' = 0$$

Elevando al cuadrado nos queda

$$x^2 + 2x\,y\,y' + (y\,y')^2 = 0$$

o bien

$$1 - x^2 - 2x\,y\,y' = 1 + (y\,y')^2$$

pero $x^2 + y^2 = 1$, entonces

$$y^2 - 2x\,y\,y' = 1 + (y')^2\,(1 - x^2)$$

o

$$y^2 - 2x\,y\,y' + (x\,y')^2 = 1 + (y')^2$$

$$(y - x\,y')^2 = 1 + (y')^2$$

de donde

$$y = x\,y' \pm \sqrt{1 + (y')^2}$$

que es la misma ecuación diferencial de la familia de sus tangentes.

Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$y = x\,y' \pm \sqrt{1 + (y')^2}$$

cuya solución general es

$$y - \operatorname{sen} t = -\frac{1}{\tan t}(x - \cos t)$$

y hemos encontrado que $x^2 + y^2 = 1$ también es solución de esta ecuación. Ciertamente $x^2 + y^2 = 1$ no puede obtenerse de la solución general por medio de la asignación de algún valor específico de la constante t. A una solución de este tipo le llamaremos *solución singular* de la ecuación diferencial dada.

En este texto no haremos un estudio formal de este tipo de soluciones de las ecuaciones diferenciales, aunque ellas aparecen ''naturalmente'' en algunos casos de ecuaciones de primer orden (ver la sección 6 del capítulo 2, en particular ver el ejemplo 3 de esa sección). El lector interesado puede consultar *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Elsgolts, Ed. MIR, Moscú.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA ECUACIÓN $y' = f(x, y)$

Consideremos la ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

donde f es una función definida en algún dominio U del plano $x\,y$. Queremos ver lo que significa, desde el punto de vista geométrico, encontrar una solución de esta ecuación diferencial.

Ya se mencionó que $y = y(x)$ es una solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ si $y'(x) = f(x, y(x))$, para toda x en el dominio de y (tal que $(x, y(x)) \epsilon U$).

Obsérvese que la función f asigna a cada punto (x, y) de U el valor $f(x, y) = y'$, que es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $y = y(x)$ en x. Entonces, el problema de encontrar una solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ puede ser interpretado geométricamente así: se quiere encontrar una curva que en el punto $(x, y) \epsilon U$ tenga por tangente una recta cuya pendiente sea $f(x, y)$ (o bien se quiere hallar una curva tal que en cada punto tenga por recta tangente una recta de pendiente previamente asignada).

Dicho de otro modo, la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \to f(x, y)$ define en U un *campo de direcciones*. Esto significa que a cada punto (x, y) en U le asocia la recta (μ, θ) dada por

$$\theta - y = f(x, y)(\mu - x)$$

con pendiente $f(x, y)$. Entonces, resolver el problema de Cauchy $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ consiste en hallar (en el caso de que existan) la(s) curva(s) que, pasando por (x_0, y_0),

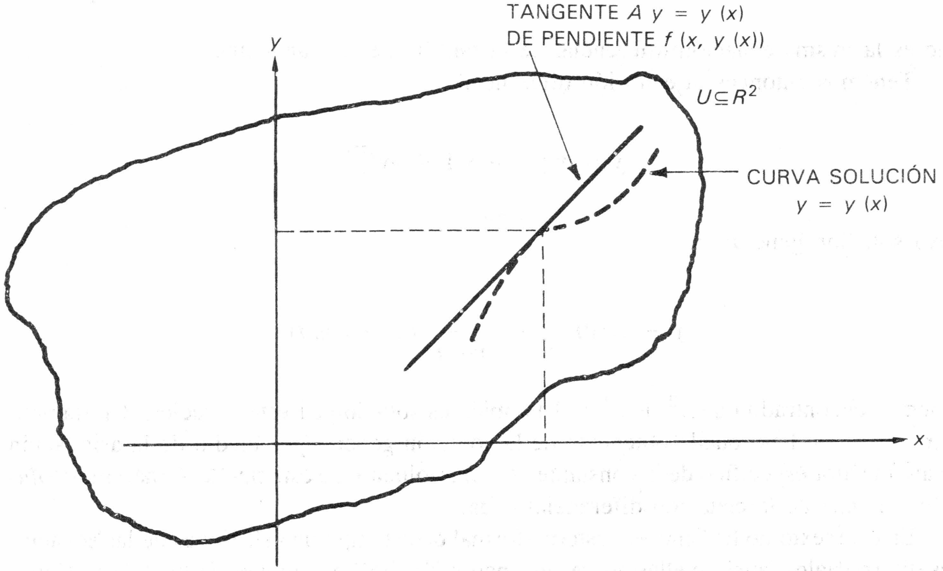


Figura 1. Interpretación geométrica de la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$.

tenga(n) la propiedad de que su(s) receta(s) tangente(s) en cada uno de sus puntos coincida(n) con aquéllas dadas por el campo de direcciones.

Una manera de darse cuenta del comportamiento geométrico de las soluciones de la ecuación $y' = f(x, y)$ es por medio del método llamado de *isóclinas* ("igual inclinación") que consiste en hacer $f(x, y)$ igual a una constante, digamos k. En tal caso $f(x, y) = k$ representa una cierta curva en el plano que será cortada por las soluciones a un ángulo constante igual a arctan k (= arctan y'). Es decir, sobre la curva $f(x, y) = k$ veremos que las soluciones tienen por tangentes rectas de pendiente $y' = k$. A estas curvas $f(x, y) = k$ se les llama isóclinas.

Veamos un ejemplo: consideremos la ecuación $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Haciendo $y' = -\dfrac{x}{y} = k$ obtenemos las rectas $-ky = x$ sobre las cuales las soluciones de la ecuación tendrán inclinación constante igual a k.

Por ejemplo, si $k = 1$, tendremos la recta $y = -x$, que será cortada por las soluciones con un ángulo constante de $\pi/4$. Similarmente, si $k = -1$, tendremos la recta $y = x$, que será cortada por las soluciones con un ángulo de $3\pi/4$.

En la figura 2 se exhiben las correspondientes isóclinas con otros valores de k.

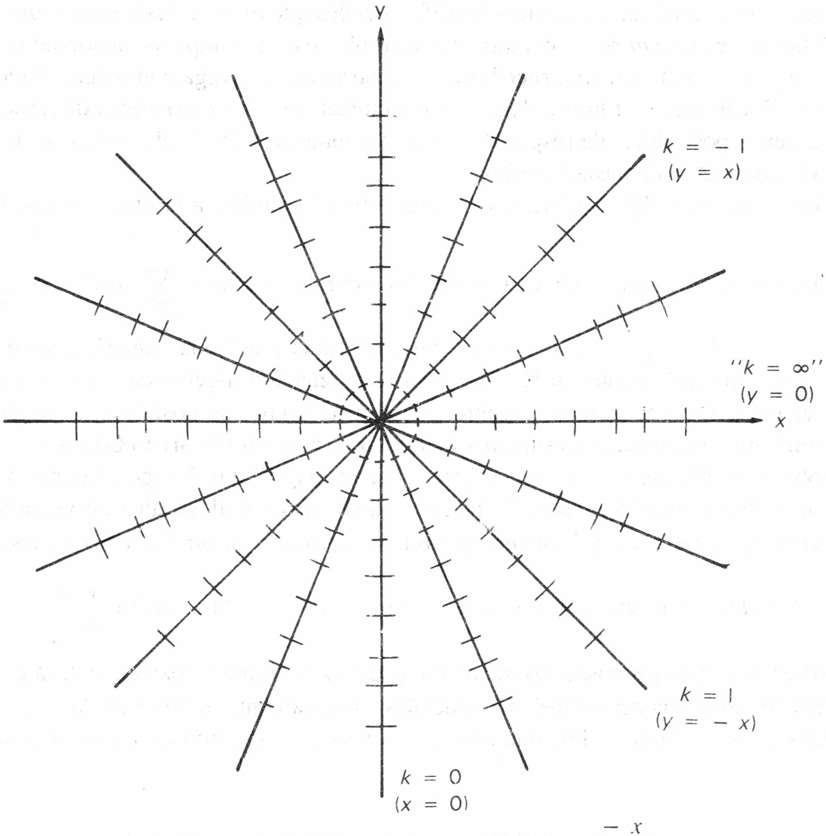


Figura 2. Isóclinas de la ecuación $y' = \dfrac{-x}{y}$.

Las soluciones de la ecuación $y' = -\frac{x}{y}$ son circunferencias concéntricas de centro en el origen de coordenadas.

COMENTARIOS ACERCA DE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

Dada una ecuación diferencial cualquiera, la problemática que esta ecuación plantea puede verse naturalmente contenida en tres cuestiones:

1. ¿Existe solución a la ecuación?
2. En el caso de respuesta afirmativa, ¿esta solución es única?*.
3. ¿Cómo determinamos la(s) solución(es)?

Las preguntas 1 y 2 encierran una problemática que en matemáticas se conoce como *existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial*. La pregunta 3 es una problemática "más práctica", pues trata de la manera de cómo exhibir soluciones. Antes de plantearnos una pregunta como la 3 deberíamos respondernos las preguntas 1 y 2. Es decir, ¿podríamos enfrentarnos a un problema de determinación de soluciones sin siquiera saber si éstas existen?

En realidad la cantidad de ecuaciones diferenciales que ofrecen respuestas a una pregunta como la 3 es *sumamente limitada*. Por ejemplo, para la simple ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ no existe un procedimiento general que nos diga cómo determinar sus soluciones. Por lo tanto, si la problemática relacionada con las ecuaciones diferenciales descansara en la posibilidad de respuesta de una pregunta como la 3, el estudio que podría hacerse de ellas sería demasiado pobre.

En las ecuaciones diferenciales existe una situación similar a la que se presenta en las ecuaciones algebraicas. Dada una ecuación algebraica del tipo $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$, donde $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, las mismas tres preguntas planteadas anteriormente para una ecuación diferencial pueden hacerse para esta ecuación algebraica. Sabemos que también el número de ecuaciones algebraicas para las cuales es posible hacer explícita su solución (con una fórmula) es sumamente limitado (de hecho Evaristo Galois se encargó de probar que sólo para ecuaciones de grado menor o igual que 4 es posible, por medio de radicales, hacer explícitas las soluciones de una ecuación algebraica en general).

Sin embargo, a pesar de que son muy pocas las ecuaciones que ofrecen una respuesta a la pregunta 3, *todas ellas* tienen respuesta a las preguntas 1 y 2: la ecuación $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ con coeficientes complejos posee n soluciones complejas (teorema fundamental del álgebra).

En el estudio de las ecuaciones diferenciales es sumamente importante dar respuesta a preguntas como la 1 y la 2. Los llamados *teoremas de existencia y unicidad de solucio-*

---

* Se supone que estamos resolviendo un problema de Cauchy, i.e. nos referimos a soluciones que satisfagan ciertas condiciones iniciales.

nes se encargan de ello. Estos teoremas dicen en qué condiciones una ecuación posee solución única. En palabras más o menos imprecisas, el teorema de existencia y unicidad para una ecuación de primer orden del tipo $y' = f(x, y)$ sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$ establece que si f es una función continua junto con su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ (en el dominio —abierto— en donde f está definida), entonces le asignamos la existencia de una única solución que pasa por (x_0, y_0).

Por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$y' = y^{1/3} \quad y(0) = 0$$

podemos comprobar que $y = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$ es una solución que satisface a la ecuación junto con la condición inicial correspondiente. Sin embargo, es claro que $y = 0$ es *otra* solución que también resuelve el problema. En este caso tenemos infringida la condición de unicidad de la solución, pues la función $f(x, y) = y^{1/3}$ es tal que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} y^{-2/3}$, que es discontinua en $y = 0$.

En el apéndice del capítulo 2 aparece una discusión detallada de uno de estos teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 1)

1. Considérese la siguiente expresión en la cual $y = y(x)$: $\frac{d}{dx}(xy) = xy' + y$

¿Es ésta una ecuación diferencial?, ¿en qué sentido?, ¿cuáles son sus soluciones? Explique.

2. Diga si las siguientes ecuaciones son ordinarias o parciales indicando el orden de las mismas

a) $y^{v} = 0$

b) $xy'' + 2(y')^3 + 3x^5 = 0$

c) $\frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y\, \partial z} f(x, y, z) = \text{sen}\, x \cos y$

d) $y''' + 2(y'')^2 + 3(y')^3 + 4xy^4 = \text{sen}\, 3x$

e) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

f) $4xy + 3\frac{\partial^5 z}{\partial x^3\, \partial y^2} = 0$

3. Demuestre que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

   a) $y = e^x \operatorname{sen} x$ de $y'' - 2y' + 2y = 0$

   b) $y = \dfrac{x - 3}{x + 4}$ de $2(y')^2 = (y - 1)\, y''$

   c) $y = e^{\alpha \operatorname{arcsen} x}$ de $(1 - x^2)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$

   d) $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2\, e^{-\alpha x} + c_3 \cos \alpha x + c_4 \operatorname{sen} \alpha x$ de $y^{iv} = \alpha^4 y$

▲ *h)* $y = ln \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}}$

   $+ \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \arctan \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)$ de $(x^4 + x^2 + 1)\, y' = 1$

   i) $y = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$ de $y' - \dfrac{y}{x + 1} = y\, ln \dfrac{x}{x - 1}$

   j) $y = \dfrac{1}{2} \tanh x + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\, ln \dfrac{1 - \sqrt{2} \tanh x}{1 - \sqrt{2} \tanh x}$ de $(1 - \operatorname{senh}^4 x)\, y' = 1$

4. Demostrar que las siguientes funciones $y = y\,(x)$ dadas en forma implícita son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

   a) $xy - ln\ y = 1$ de $y^2 + (xy - 1)\, y' = 0$

   b) $(a + b\, x)\, e^{y/x} = x$ de $x^3 y'' = (xy' - y)^2$

   c) $x \displaystyle\int_0^x \frac{\text{sent}}{t}\, dt = y\, ln\, y$ de $xy' + xy'\, ln\, y = x \operatorname{sen} x + y\, ln\, y$

   d) $\arctan \dfrac{y}{x} - ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ de $(x + y)\, dx - (x - y)\, dy = 0$

▲ *e)* $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2fy + h = 0$ de $(bx + cy + f)^3\, y'' = k$ donde k es cierta constante.

5. Demostrar que las siguientes funciones dadas en forma paramétrica son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

   a) $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$ de $y = (y')^2 + 2\,(y')^3$

   b) $\begin{cases} y = \cosh t \\ y = \operatorname{senh} t \end{cases}$ de $yy' = x$

c) $$\begin{cases} x = (1 + t^2)^{-1/2} - ln \dfrac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \end{cases} \qquad \text{de } y\sqrt{1 + (y')^2} = y'$$

d) $$\begin{cases} x = \text{sen } t \\ y = \text{senh } kt \end{cases} \qquad \text{de } (1 - x^2)y'' = xy' + k^2y$$

e) $$\begin{cases} x = e^t \text{ sent} \\ y = e^t \text{ cost} \end{cases} \qquad \text{de } y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$$

6. Demuestre que las siguientes expresiones constituyen la solución general de las ecuaciones correspondientes.

   a) $y = 2x + ce^{-x}$ de $y' + y = 2 + 2x$
   b) $xy = 3(y - 1) + ce^{-y}$ de $ydx + (xy + x - 3y)\,dy = 0$

   c) $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{3}$ de $y'' - 4y' + 3y = 1$

   d) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + x^2$ de $y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$

   e) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{6} x^3 e^{2x}$ de $y''' - y'' - 4y' + 4y$
   $= 2x^2 - 4x - 1 + 2x^2 e^{2x} + 5xe^{2x} + e^{2x}$

7. Tomando como referencia el ejercicio anterior encuentre las soluciones particulares satisfaciendo las condiciones iniciales siguientes (respectivamente).

   a) $y(x_o) = y_o$
   b) $y(0) = 0$
   c) $y(0) = y'(0) = 1$
   d) $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
   e) $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$

▲ 8. A la ecuación diferencial

   $$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + m(m + 1)\, y = 0$$

   se le conoce como *ecuación diferencial de Legendre.*

   Demuestre que los polinomios

   $$Pm(x) = \frac{1}{2^m\, m!} \frac{d^m}{dx^m} [(x^2 - 1)^m]$$

   (llamados polinomios de Legendre) satisfacen dicha ecuación diferencial.

Sugerencia: haciendo $u = (x^2 - 1)^m$ obtenemos derivando $(x^2 - 1)\ u' = 2mxu$. Derive hasta el orden $m + 1$.

▲ 9. A la ecuación diferencial

$$xy'' + (1 - x)y' + my = 0$$

se le conoce como *ecuación diferencial* de *Laguerre*.

Demuestre que los polinomios

$$Lm\ (x) = e^m\ (x^m\ e^{-x})^{(m)}$$

(llamados polinomios de Laguerre) satisfacen dicha ecuación diferencial.
Sugerencia: Como en el ejercicio anterior, considere $u = x^m\ e^{-x}$

10. *a*) ¿La función $y = c_1 + c_2\ ln\ x^{c_3}$ podría ser solución general de una ecuación de tercer orden? ¿podría ser solución general de una ecuación de segundo orden? Explique.

b) ¿La función

$$0 = c_1\ (x + 2y + 3) + c_2\ (4x - y) + c_3\ (-\ x + y + 1)$$

podría ser la solución general de una ecuación de tercer orden? Explique.

11. Demuestre que $y_1 = e^{-\ 2x}$ y $y_2 = e^x$ son soluciones de la ecuación $y'' + y' - 2y = 0$. Aún más, demuestre que la combinación lineal $c_1\ e^{-\ x} + c_2e^x$ es también solución de tal ecuación. ¿Esta combinación lineal es la solución general de la ecuación dada?
12. Demuestre que $y_1 = x^3$ y $y_2 = x^7$ son soluciones de la ecuación $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$ ¿Es la combinación lineal $c_1\ y_1 + c_2\ y_2$ también solución de la ecuación?, ¿es su solución general?
13. Demuestre que $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^{-x}$, $y_4 = xe^{-x}$ son soluciones de la ecuación $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.
14. Demuestre que $y_1 = ln\ x$, $y_2 = ln\ (x + 1)^2 - x$ son soluciones de la ecuacion $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.
15. Demuestre que $y_1 = \text{sen}\ x$, $y_2 = \text{sen}\ (x + K)$, donde K es cierta constante, son soluciones de la ecuación $y'' + y = 0$.
16. Caracterize a las ecuaciones diferenciales de segundo orden para las cuales se tiene: si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación, entonces la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ es también solución.
17. *a*) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de rectas de pendiente 1 y ordenada al origen c.
    b) Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas de pendiente c y ordenada al origen 1.
18. *a*) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de centro fijo en el origen y radio arbitrario.
    b) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio fijo y centro arbitrario.
    c) Demostrar que la ecuación diferencial de todas las circunferencias del plano es

$$[1 + (y')^2]y''' - 3y'\ (y'')^2 = 0$$

19. Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias cuyos centros se encuentran sobre el eje x.
20. Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias tangentes al eje x.
21. *a*) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con vértice sobre el eje x, cuyo eje es paralelo al eje y y cuya distancia entre foco y vértice es a.

    b) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con el vértice sobre el eje y y el eje paralelo al eje x.
22. *a*) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas cuyo eje es paralelo al eje x.

    b) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas cuyo eje es paralelo al eje y.
23. Demostrar que la ecuación diferencial de la familia de cónicas centrales cofocales

$$\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c} = 1$$

(a y b son parámetros fijos) es

$$(xy' - y)(yy' + x) = (a^2 - b^2)y'$$

24. Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasan por los puntos fijos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.
25. *a*) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias (en coordenadas polares) $r = 2c\,(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)$.

    b) Demostrar que la ecuación diferencial de la familia de curvas $r = c\,(4\cos\theta - \sec\theta)$ (trisectrices de Maclaurin) es $\cos\theta\,(4\cos^2\theta - 1)\,dr + r\,\text{sen}\,\theta\,(4\cos^2\theta + 1)\,d\theta = 0$.
26. Hallar la ecuación diferencial de la familia de: *a*) cardioides, *b*) cisoides, *c*) estrofoides.
27. Encontrar la ecuación diferencial de todas las rectas que se encuentran a la distancia unidad del origen. Demuestre que la ecuación del círculo unitario ($x^2 + y^2 = 1$) también satisface tal ecuación. Explique.
28. *a*) Hallar la ecuación diferencial que tenga por solución general a $y = c_1\,\text{sen}\,3x + c_2\,\text{sen}\,x + c_3\,\text{sen}^3\,x$. (Indicación: es una ecuación de 2o. orden.)

    b) Hallar la ecuación diferencial de la familia $y = c_1\,\text{sen}\,(x + c_2) + c_3\,\text{sen}\,(x + c_4)$. (Indicación: no es una ecuación de 4o. orden).
29. Sean $y_1 = e^{rx}$ y $y_2 = e^{r(x+k)}$, r y k reales fijos. ¿Podría ser $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ solución general de una ecuación de segundo orden? En caso afirmativo encontrar la ecuación.
30. Sean $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = k\,e^{rx}$, r y k reales fijos. ¿Podría ser $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ solución general de una ecuación de segundo orden? En caso afirmativo encontrar la ecuación.
31. Sean $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = e^{sx}$, $r \neq s$. ¿Podría ser $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ solución general de una ecuación de segundo orden? En caso afirmativo encontrar la ecuación.
32. Con base en los resultados que obtuvo en los últilmos 3 ejercicios, ¿qué propiedad deben cumplir las funciones y_1 y y_2 para que la familia $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sea la solución general de una ecuación de 2o. orden?
33. Sean r_1 y r_2 reales distintos. Demuestre que la ecuación diferencial que tiene por solución general a $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ viene dada por la expresión

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

donde $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$.

▲ 34. Considere la ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Observe que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación (¡recuerde las propiedades de los determinantes!). Demuestre que la combinación lineal $c_1 y_1 + c_2 y_2$ es también solución de la ecuación. ¿Qué sucede si el determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

vale cero? (A este determinante se le conoce como el ''wronskiano de y_1 y y_2'') (compare con el ejercicio 32.)

35. Construya los campos direccionales y algunas curvas soluciones para las siguientes ecuaciones

a) $y' = 1$
b) $y' = x + y$
c) $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$
d) $y' = y$
e) $y' = y^{-1}$
f) $y' = x$

36. Considere la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. ¿Qué significa geométricamente (para las curvas soluciones) la isóclina $f(x, y) = 0$? Demuestre que si las curvas soluciones a esta ecuación poseen puntos de inflexión, éstos se hallan sobre la curva

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

CAPÍTULO 2

Ecuaciones de primer orden

1. ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

La ecuación diferencial de primer orden resuelta respecto de la derivada de $y' = f(x, y)$ puede ser escrita como

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

Algunas veces las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ se logran expresar como productos de funciones que dependen de una sola de las variables x o y. Es decir, se consigue expresar la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\varphi_1(x)\ \nu_1(y)\ dx + \varphi_2(x)\ \nu_2(y)\ dy = 0$$

En tal caso decimos que la ecuación 1 es de *variables separables*. La estrategia para resolver (encontrar la solución general de) una ecuación de variables separables consiste en ''separar las variables e integrar''.

El proceso de separación de variables consiste en ''agrupar las $x's$ con dx y las $y's$ con dy''. Así, por ejemplo, dividiendo por $\varphi_2(x)\ \nu_1(y)$ la ecuación (1) obtenemos

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx + \frac{\nu_2(y)}{\nu_1(y)}\,dy = 0$$

La solución general de esta ecuación estará dada entonces por

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx + \int \frac{\nu_2(y)}{\nu_1(y)}\,dy = \mathrm{C}$$

Nota: Al dividir por $\varphi_2(x)\ \nu_1(y)$ estamos suponiendo $\varphi_2(x)\ \nu_1(y) \neq 0$, por lo que puede llegar a ocurrir que en la condición $\varphi_2(x)\ \nu_1(y) = 0$ estén contenidas algunas soluciones.

Desde el punto de vista de estructura las ecuaciones de variables separables son las más simples de las que consideraremos en este capítulo. *De hecho, dada una ecuación diferencial de primer orden resuelta respecto de la derivada* (como de las que consideramos aquí) *de la cual se quiera hacer explícita su solución, se trata, de alguna forma, de reducirla a una ecuación de variables separables.* En este capítulo se mostrará, dado un tipo especial de ecuación, *de qué forma* podemos llegar a una ecuación de variables separables.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación

$$(1 + y^2)\,(e^{2x}dx - e^{y}dy) - (1 + y)\,dy = 0$$

Solución

La ecuación dada puede reescribirse como

$$(1 + y^2)\,e^{2x}\,dx - [(1 + y^2)\,e^{y} + (1 + y)]\,dy = 0$$

Dividiendo por $(1 + y^2)$ (que siempre es diferente de cero) obtenemos que

$$e^{2x}\,dx - \left[e^{y} + \frac{1 + y}{1 + y^2}\right] dy = 0$$

de modo que la solución general está dada por

$$\int e^{2x}\,dx - \int \left(e^{y} + \frac{1 + y}{1 + y^2}\right) dy = C$$

o

$$\tfrac{1}{2}\,e^{2x} - e^{y} - \arctan y - \tfrac{1}{2}\,ln\,(1 + y^2) = C$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación

$$y\,ln\,y\,dx + x\,dy = 0$$

Solución

Separamos variables dividiendo por $x\,y\,ln\,y$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y\,ln\,y} = 0$$

de modo que la solución general esta dada por

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y \ln y} = C$$

o

$$\ln|x| + \ln|\ln y| = C$$

o bien

$$x \ln y = e^C = C'$$

Observe que cuando dividimos por x y $\ln y$, supusimos $x \neq 0$, $y \neq 1$.

Se verifica directamente que $x = 0$ y $y = 1$ son también soluciones que se obtienen como condición límite de $C \to -\infty$ (o bien $C' \to 0$).

Algunas veces no es tan evidente el hecho de que una ecuación sea de variables separables. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación

$$y' + \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} = \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

Solución

Escribiendo

$$\operatorname{sen} \frac{x \pm y}{2} = \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \pm \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{y}{2}$$

la ecuación queda como

$$y' + \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{y}{2} =$$

$$= \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{y}{2}$$

o

$$dy + 2 \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{y}{2} \, dx = 0$$

Dividiendo por $\operatorname{sen} \frac{y}{2}$ obtenemos

$$\frac{dy}{\operatorname{sen} \frac{y}{2}} + 2 \cos \frac{x}{2} \, dx = 0$$

De modo que la solución general de la ecuación está dada por

$$\int \frac{dy}{\operatorname{sen} \frac{y}{2}} + \int 2 \cos \frac{x}{2}\, dx = C$$

es decir,

$$2\, ln \left| \tan \frac{y}{4} \right| + 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = C$$

Nuevamente, supusimos que sen $\frac{y}{2} \neq 0$

$$\Rightarrow y \neq \pm 2 k \pi \ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Se comprueba directamente que $y = \pm 2k\pi$ $(k \in N)$ son soluciones de la ecuación dada.

Una ecuación de la forma

$$y' = f(ax + by + c)$$

siempre puede reducirse a una ecuación de variables separables por medio de la introducción de la nueva variable dependiente z, tal que

$$ax + by + c = z$$

En efecto, de esta última expresión obtenemos

$$y' = \frac{1}{b}(z' - a)$$

$\left(\text{donde } z' = \frac{dz}{dx}\right)$. Sustituyendo en la ecuación dada nos queda

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f(z)$$

o bien

$$\frac{dz}{f(z) + \frac{a}{b}} = b dx$$

por lo que su solución general está dada por

$$\int \frac{dz}{f(z) + \frac{a}{b}} = b \int dx + C$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación

$$(x + y)^2 y' = a^2$$

Solución

Dividiendo por $(x + y)^2$ la ecuación queda

$$y' = \frac{a^2}{(x + y)^2}$$

Haciendo $x + y = z \Rightarrow y' = z' - 1$, tenemos

$$z' - 1 = \frac{a^2}{z^2}$$

o

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a^2 + z^2}{z^2}$$

Separando variables e integrando nos queda

$$\int \frac{z^2\, dz}{a^2 + z^2} = \int dx + C$$

o sea

$$z - a \arctan \frac{z}{a} = x + C$$

En términos de las variables originales este resultado puede escribirse como

$$y - C = a \arctan \frac{x + y}{a}$$

o, si $C' = -\dfrac{C}{a}$

$$x + y = a \tan \left(C' + \frac{y}{a}\right)$$

(Ciertamente $y = -x$ no es solución de la ecuación).

También puede ocurrir que alguna sustitución "no canónica" nos reduzca la ecuación dada a una de variables separables.

Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$(xy + 2\,xy\,ln^2\,y + y\,ln\,y)\,dx + (2\,x^2\,ln\,y + x)\,dy = 0$$

haciendo $x\,ln\,y = t$

Solución

De $x\,ln\,y = t$ obtenemos $y = e^{t/x}$, de modo que

$$\begin{aligned} dy &= e^{t/x}\,\frac{1}{x}\,dt + e^{t/x}\left(-\,\frac{t}{x^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{x}\,e^{t/x}\left[dt - \frac{t}{x}\,dx\right] \end{aligned}$$

Haciendo las sustituciones correspondientes en la ecuación original nos queda

$$\begin{aligned} &(x\,e^{t/x} + 2\,t\,\frac{t}{x}\,e^{t/x} + \frac{t}{x}\,e^{t/x})\,dx + (2\,xt + x) \\ &\frac{1}{x}\,e^{t/x}\,(dt - \frac{t}{x}\,dx) = 0 \end{aligned}$$

Simplificando por $e^{t/x}$ y agrupando términos nos queda la ecuación

$$x\,dx + (2\,t + 1)\,dt = 0$$

cuya solución general es

$$\tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{4}\,(2\,t + 1)^2 = C$$

o, si $C' = 4C$

$$2\,x^2 + (2\,x\,ln\,y + 1)^2 = C'$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 2. SECCIÓN 1)

En los siguientes ejercicios (1 – 14) resuelva las ecuaciones diferenciales

1. $e^{x^{1/2}} - y\,dx = \sqrt{x(1 - e^y)}\;\,dy$

2. $\dfrac{x}{y}\,y' = \dfrac{1 - ln^2 y}{(ln\,y)\,\sqrt{3 - ln^2 x}}$

3. $(y + 1)\,a^{mx}\,b^{nx}\,dx = y^3\,dy$

4. $(\arctan x)^n\,dx = (1 + x^2)(1 - \tan 3y)^2\,dy$

5. $y\,y' = e^{-2y} \arctan x$

6. $y\sqrt{y+1}\;dx = (1 + \sqrt{x+1}\,)\;dy$

7. $y' = xy\,(y-1)\,3^x$

8. $(2x - \sqrt{\text{arcsen}\,x}\,)\;dx = \left[\dfrac{\sqrt[4]{1-x^2}}{y+\sqrt{y^2-1}}\right]^2 dy$

9. $(1+y^2)^2\,(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) - (1+y)\,dy = 0$

10. $\dfrac{y^3}{(a+x)^{1/3}}\,y' = x\,(y-1)^{12}$

11. $(x\,e^{x^{1/3}}\,dx - y\,e^{y^2}\,dy) - y^3\,e^{y^2}\,dy = 0$

12. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^4 y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x^{15}-1}$

13. $y^2\sqrt{\dfrac{y}{x}}\,y' = \sqrt{\dfrac{1-y}{1-x^{3/2}}}$

▲ 14. $y' = \dfrac{e^y + 1}{e^{x+y} - 1 + e^y - e^x}$

15. Hallar la solución de la ecuación $yy' = -x$ tal que $y(0) = 1$. Describa geométricamente la solución a este problema.

16. Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial $(1+x^2)\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$ tal que $y(0) = 1$. Demuestre que esta solución puede escribirse como

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

17. Resuelva $y' = (y-a)(y-b)$ tal que $y(0) = y_0$. Considere los dos casos $a = b$ y $a \neq b$.

▲ 18. Encuentre la solución particular de la ecuación

$$(x^2y - 3x - 3xy + 9x + 2y - 6)\,dy + (x^2y^2 + x^2y + 2x^2 + xy^2 + xy + 2x + y^2 + y + 2)\,dx = 0$$

tal que $y(0) = 0$.

19. Resuelva $y' = ln\,(y + e^x\cos x) + e^x(\text{sen}\,x - \cos x)$ tal que $y(0) = y_0$. (Sugerencia: haga $y + e^x\cos x = v$).

▲ 20. Resuelva $(ln\,x + y^3)\,dx - 3\,xy^2\,dy = 0$.

21. Resuelva

$(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2y)\,dx + (xyx^2 - 4x^3)\,dy = 0$ haciendo $y = tx$.

Hallar las soluciones generales de los siguientes ejercicios (22 a 26).

22. $y' = ax + by + c$

23. $y' + 1 = (x + y + 1)^3$

24. $y' = \cos(x + y)$

25. $y' = \tan^2(ax + by + c) \quad a \neq b,\ ab > 0$

26. $y' + \cos \dfrac{x + y}{2} = \cos \dfrac{x - y}{2}$

27. Demuestre que la ecuación

$$[F(x) + yG(xy)]\,dx + xG(xy)\,dy = 0$$

se reduce a una ecuación de variables separables haciendo la sustitución $v = xy$.

28. Demuestre que la ecuación $yF(xy)\,dx + xG(xy)\,dy = 0$ puede resolverse haciendo $v = xy$.

29. Con base en los dos últimos ejercicios resuelva las ecuaciones

a) $[x^2 + 1 + x^2y^3 + y]\,dx + x(x^2y^2 + 1)\,dy = 0.$
b) $(\cos x + y \operatorname{sen} yx)\,dx + x \operatorname{sen} xy\,dy = 0.$
c) $ye^{xy}\,dx + x(e^{xy} - 1)\,dy = 0.$

▲ 30. Resuelva $y' = \dfrac{y(y^2 - x^2 - 1)}{x(y^2 - x^2 + 1)}$ pasando a las coordenadas polares.

16 ✱

2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS Y REDUCIBLES A HOMOGÉNEAS

2.1 Ecuaciones homogéneas

Definición

Decimos que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado p si

$$f(tx, ty) = t^p f(x, y) \ \forall\ t > 0$$

Así, por ejemplo, la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ es homogénea de grado 2, pues

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(x^2 + xy + y^2) = t^2 f(x, y)$$

Según la definición, una función es homogénea de grado cero si

$$f(tx, ty) = f(x, y) \qquad \forall\ t > 0$$

Por ejemplo, las funciones

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{x + y}{x - y}$$

y

$$g(x, y) = \frac{x^3 + xy^2}{y^3 + x^2y}$$

son funciones homogéneas de grado cero.

Una propiedad importante de las funciones homogéneas es la siguiente:

Si $f(x, y)$ es homogénea de grado p, entonces existe una función ϕ (de una sola variable) tal que

$$f(x, y) = |x|^p \phi \left[\frac{y}{x}\right]$$

En efecto, por ser $f(x, y)$ homogénea de grado p

$$f(tx, tx) = t^p f(x, y)$$

para toda $t > 0$. En particular, si $t = \dfrac{1}{|x|}$ obtenemos que

$$f\left(\pm 1, \frac{y}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^p} f(x, y)$$

de donde

$$f(x, y) = |x|^p f\left(\pm 1, \frac{y}{|x|}\right)$$

Si ϕ es tal que $\phi\left(\dfrac{y}{x}\right) = f\left(\pm 1, \dfrac{y}{|x|}\right)$, obtenemos la propiedad enunciada.

Entonces, para una función homogénea de grado cero $f(x, y)$ existe siempre una función ϕ tal que

$$f(x, y) = \phi\left[\frac{y}{x}\right]$$

Definición

Decimos que la ecuación diferencial

$$y' = F(x, y)$$

es una ecuación diferencial homogénea si $F(x, y)$ es una función homogénea de grado cero.

Equivalentemente decimos que la ecuación diferencial.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

(M y N son funciones dadas de las variables x, y) es homogénea si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado.

La estrategia para resolver una ecuación diferencial homogénea es introducir la nueva variable dependiente u tal que $y = ux$. Con esta sustitución obtenemos una ecuación de variables separables.

En efecto, sea la ecuación homogénea

$$y' = F(x, y)$$

Como $F(x, y)$ es homogénea de grado cero, existe una función ϕ tal que

$$F(x, y) = \phi\left[\frac{y}{x}\right].$$

Entonces, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$y' = \phi\left[\frac{y}{x}\right]$$

Ahora, haciendo $y = ux$, tenemos que $y' = u + xu'$.

Sustituyendo

$$u + xu' = \phi(u)$$

o

$$x\frac{du}{dx} = \phi(u) - u$$

que es una ecuación de variables separables cuya solución general es

$$\int \frac{du}{\phi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Observación. Nuevamente hemos puesto que $\phi(u) - u \neq 0$.

Si existe u_0 tal que $\phi(u_o) - u_0 = 0$, se verifica de inmediato que $u = u_0$ es solución de la correspondiente ecuación homogénea. Esta solución es pues $y = u_0x$, una recta que pasa por el origen.

Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

Solución

Escribiendo la ecuación en la forma $y' = F(x, y)$ vemos que la función

$$F(x, y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

es homogénea de grado cero. En este caso tenemos

$$F(x, y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = \phi\left[\frac{y}{x}\right]$$

Haciendo $y = ux$, tenemos $y' = u + xu'$. Sustituyendo

$$u + xu' = u + \sqrt{u^2 - 1}$$

o

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{u^2 - 1}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x} + C$$

es decir,

$$ln|u + \sqrt{u^2 - 1}\,| = ln|x| + C$$

Regresando a las variables originales obtenemos finalmente que la solución general está dada por

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = C'x^2 \qquad (C' = e^C)$$

o bien

$$2\,C'y = C'^2x^2 + 1$$

Observe que supusimos $u \neq \pm 1$ de modo que las rectas $y = \pm x$ serán también soluciones de nuestra ecuación (en este caso se trata de un par de soluciones singulares, pues no es posible obtenerlas de la solución general con algún valor específico de C').

Ejemplo 2

Encontrar la solución de la ecuación

$$(1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

tal que $y(1) = 1$

Solución

Ciertamente las funciones

$$M(x, y) = 1 + e^{\frac{x}{y}}$$

y

$$N(x, y) = e^{\frac{x}{y}} (1 - \frac{x}{y})$$

son homogéneas de grado cero.

Para comenzar la solución del ejemplo no es necesario escribir la ecuación dada en la forma $y' = F(x, y)$.

Podemos proceder directamente como sigue

$$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$$

Sustituyendo en la ecuación nos queda

$$(1 + e^{1/u})\,dx + e^{1/u}\,(1 - 1/u)\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

Agrupando términos

$$(1 + u\,e^{1/u})\,dx + e^{1/u}\,(1 - 1/u)\,du = 0$$

Dividiendo por $x\,(1 + u\,e^{1/u})$ e integrando nos queda

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{e^{1/u}\,(1 - 1/u)}{1 + u\,e^{1/u}}\,du = C$$

Observe que

$$\frac{d}{du}\,(1 + u\,e^{1/u}) = e^{1/u}\,(1 - 1/u)$$

de modo que la solución general está dada por

$$ln|x| + ln|1 + u\,e^{1/u}| = C$$

Regresando a las variables originales nos queda

$$x\,(1 + \frac{y}{x}\,e^{x/y}) = C'$$

Queremos obtener la solución particular tal que $y(1) = 1$.

Entonces

$$1\,(1 + e^{1}) = C'$$

De modo que la solución buscada es

$$x\,(1 + \frac{y}{x}\,e^{x/y}) = 1 + e$$

2.2 Ecuaciones reducibles a homogéneas

Consideremos la ecuación diferencial del tipo

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Geométricamente resulta claro que una función lineal del tipo $g(x, y) = ax + by + c$ será homogénea (de grado 1) si y sólo si la recta que representa la función $g(x, y) = 0$ pasa por el origen.

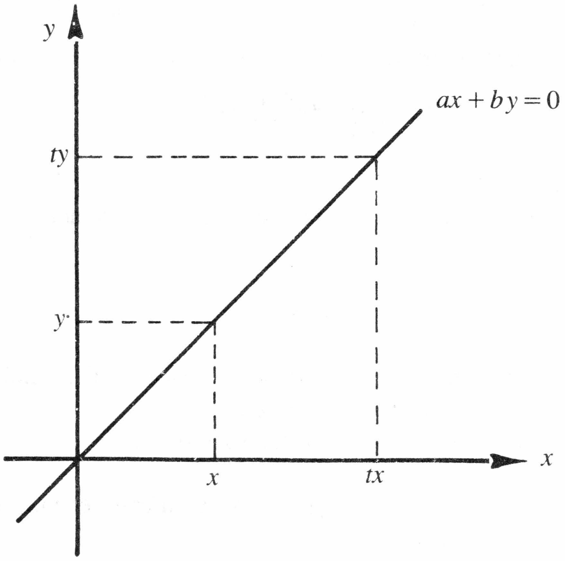


Figura 1. La función homogénea $g(x, y) = 0$.

Desde el punto de vista de la estructura algebraica de $g(x, y)$ tenemos que esta función será homogénea si y sólo si $c = 0$.

Entonces, la función

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

será homogénea de grado cero si y sólo si las funciones $g_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1$ y $g_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2$ son tales que $c_1 = c_2 = 0$, i.e. las gráficas de $g_1(x, y) = 0$ y $g_2(x, y) = 0$ son rectas que pasan por el origen.

Una manera de provocar la homogeneidad (de grado cero) en una función del tipo

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

en la cual c_1 y c_2 son diferentes de cero (o al menos una de ellas lo es) es trasladando el origen de coordenadas al punto en donde las rectas $g_1(x, y) = 0$ y $g_2(x, y) = 0$ se intersectan. Es decir, si introducimos las nuevas variables X, Y tales que

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}$$

con h y k tales que

$$a_1(X + h) + b_1 (Y + k) + c_1 = a_1X + b_1Y + \boxed{a_1h + b_1k + c_1} = 0$$

$$a_2(X + h) + b_2 (Y + k) + c_2 = a_2X + b_2Y + \boxed{a_2h + b_2k + c_2} = 0$$

tendremos entonces que la nueva función

$$f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$$

será homogénea de grado cero.

En la discusión anterior el único caso de interés es cuando el sistema

$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene una única solución, es decir, cuando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (cuando las rectas $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y)$, $= 0$ *si* se intersectan en *un* punto).

En el caso de que $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ tendríamos que

i) Existe λ tal que $g_1(x, y) = \lambda\, g_2(x, y)$, y en tal caso tenemos la ecuación diferencial de variables separables

$$y' = f(\lambda)$$

o bien

ii) Existe μ tal que $a_1x + b_1y = \mu\,(a_2x + b_2y)$, y entonces la ecuación original sería

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$= f\left(\frac{\mu(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = h(a_2x + b_2y)$$

que, según vimos en la sección anterior, se reduce a variables separables introduciendo la nueva variable dependiente z tal que $z = a_2x + b_2y$.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación

$$(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0$$

Solución

Hallamos el punto de intersección de las rectas

$$\begin{aligned} x - y + 3 &= 0 \\ 3x + y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema encontramos que $h = -1$ y $k = 2$.

Trasladamos entonces el origen de coordenadas al punto $(-1, 2)$ haciendo $x = X - 1$ y $y = Y + 2$.

Como $dx = dX$ y $dy = dY$, la ecuación original se transforma en

$$(X - Y)\,dX + (3X + Y)\,dY = 0$$

que es una ecuación diferencial homogénea.

Haciendo $Y = uX$, $dY = u\,dX + X\,du$ nos queda

$$(X - uX)\,dX + (3X + uX)\,(u\,dX + X\,du) = 0$$

Agrupando términos y simplificando nos queda

$$(1 + u)^2\,dX + X\,(3 + u)\,du = 0$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dX}{X} + \int \frac{3 + u}{(1 + u)^2}\,du = C$$

o

$$ln|X| + ln\,|1 + u| - \frac{2}{1 + u} = C$$

Recordemos que $u = \dfrac{Y}{X}$, entonces

$$ln|Y + X| - \frac{2X}{Y + X} = C$$

Regresando a las variables originales x, y tenemos que $X = x + 1$, $Y = y - 2$, de modo que la solución general es

$$ln|x + y - 1| = C + \frac{2\,(x + 1)}{x + y - 1}$$

o bien

$$y = 1 - x + C'\,e^{\frac{2(x + 1)}{x + y - 1}}$$

Observe que dividimos por $(u + 1)^2$, lo cual reporta también la solución $u = -1$, o sea $Y = -X$, o en términos de x, y, la solución $y = 1 - x$ que se obtiene de la solución general en el caso $C' = 0$ (caso límite $C = -\infty$).

Algunas veces es posible ''provocar'' la homogeneidad de una ecuación diferencial por medio de la introducción de nuevas variables s y t, tales que $y = s^q$ y $x = t^p$, donde q y p son exponentes *por determinar* (precisamente de una elección adecuada de ellos es que podríamos obtener una ecuación diferencial homogénea para las variables s y t).

Ejemplo 4

Resolver la ecuación

$$y' = \frac{3x^5 + 3x^2y^2}{2x^3y - 2y^3}$$

Solución

La ecuación diferencial por resolver no es homogénea.

Hagamos $y = s^q$, $x = t^p$. Entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{q\, s^{q-1}\, ds}{p\, t^{p-1}\, dt} = \frac{q\, s^{q-1}}{p\, t^{p-1}} \frac{ds}{dt}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\frac{q\, s^{q-1}}{p\, t^{p-1}} \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2} \frac{t^{5p} + t^{2p}\, s^{2q}}{t^{3p}\, s^q - s^{3q}}$$

o

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3p}{2q} \frac{t^{6p-1} + t^{3p-1}\, s^{2q}}{t^{3p}\, s^{2q-1} - s^{4q-1}}$$

Para que esta ecuación fuese homogénea tendríamos que tener $m = n$, donde

$$\begin{aligned} m &= 6p - 1 = 3p - 1 + 2q \\ n &= 3p + 2q - 1 = 4q - 1 \end{aligned}$$

Observamos que escogiendo $p = 2$, $q = 3$ obtenemos la condición deseada.

Entonces, la ecuación diferencial original se ha transformado en

$$\frac{ds}{dt} = \frac{t^{11} + t^5\, s^6}{t^6\, s^5 - s^{11}}$$

donde $t^2 = x$ y $s^3 = y$, la cual es una ecuación diferencial homogénea.

Haciendo $s = tu$ (u nueva variable dependiente) obtenemos

$$u + tu' = \frac{1 + u^6}{u^5 - u^{11}}$$

o

$$t \frac{du}{dt} = \frac{1 + u^{12}}{u^5 - u^{11}}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{(u^5 - u^{11})\, du}{1 + u^{12}} = \int \frac{dt}{t} + C$$

o

$$\frac{1}{6} \arctan u^6 - \frac{1}{12} ln\,(1 + u^{12}) = ln\, t + C$$

Sustituyendo u por $\frac{s}{t}$ y simplificando nos queda

$$t^{12} + s^{12} = C'\, e^{2 \arctan (s^6/t^6)} \quad (C' = e^{-12\,C})$$

o bien, regresando a las variables x, y nos queda finalmente

$$x^6 + y^4 = C'\, e^{2 \arctan (y^2/x^3)}$$

Observación: en realidad pudimos haber hecho sólo la sustitución $y = s^q$, donde s es la nueva variable dependiente, y q se escoge convenientemente.

Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$(y + y\sqrt{x^2\, y^4 + 1})\, dx + 2x\, dy = 0$$

Solución

Haciendo $y = s^q$ tenemos $dy = qs^{q-1}\, ds$.

Sustituyendo

$$(s^q + s^q\sqrt{x^2\, s^{4q} + 1})\, dx + 2q\, xs^{q-1}\, ds = 0$$

Si $2 + 4q = 0$ obtenemos una ecuación homogénea, pues así tanto el coeficiente de dx como el de ds serían funciones homogéneas (de las variables x y s) de grado q.

Tenemos pues que $q = -½$ y la ecuación nos queda

$$(s^{-½} + s^{-½}\sqrt{x^2\, s^{-2} + 1})\, dx - x\, s^{-3/2}\, ds = 0$$

Haciendo $s = xu$ (u es la nueva variable dependiente) tenemos $ds = x\, du + u\, dx$. Sustituyendo

$$(x^{-½}\, u^{-½} + x^{-½}\, u^{-½}\sqrt{x^2\, x^{-2}\, u^{-2} + 1})\, dx -$$

$$x\, x^{-3/2}\, u^{-3/2}\, (x\, du + u\, dx) = 0$$

Simplificando

$$x^{-1/2}\, u^{-3/2}\, (u^2 + 1)^{1/2}\, dx - x^{1/2}\, u^{-3/2}\, du = 0$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

o

$$ln|x| - ln|u + \sqrt{u^2 + 1}| = C$$

Regresando a las variables x, s queda

$$ln \left| \frac{x^2}{s + \sqrt{s^2 + x^2}} \right| = C$$

y por último, regresando a las variables x, y (recordando que $y = s^{-1/2}$) queda

$$\sqrt{1 + x^2y^4} = C' x^2 y^2 - 1 \; (C' = e^{-C})$$

(al dividir por u perdimos la solución $y = 0$, que obviamente satisface la ecuación diferencial original).

EJERCICIOS (CAPÍTULO 2. SECCIÓN 2)

1. Considere la siguiente definición de homogeneidad de una función de 2 variables: "se dice que la función $f(x, y)$ es homogénea (de grado p) si $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$ para todo t real". ¿Es equivalente esta definición a aquélla dada en el texto? (Sugerencia: $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$).

2. Diga si las siguientes funciones son homogéneas e indique el grado de homogeneidad.

   a) $f(x,y) = xy^2 + x^2y + x^3$
   b) $g(x,y) = xy^2 + x^2y + x^3 + 1$
   c) $h(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/3}$
   d) $z(x,y) = (\text{sen}\, x/y)^{1/n}$
   e) $u(x,y) = ln\,(x^2 + xy) + ln\,(y^2 - xy)$

   f) $z = e^{x/y} + \sqrt{\dfrac{x - y}{x - y}}$
   g) $u = ln\,(x^2 + \sqrt{x^4 + xy^3}) - ln\,(xy\,\text{sen}(y/x + 1/2)) + \exp(\arctan \sqrt[3]{\dfrac{x + 2y}{(x - 2y)}})$

3. ¿El producto de funciones homogéneas es una función homogénea?, ¿el cociente? Dé ejemplos.

4. Demuestre que si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado p entonces sus derivadas parciales (respecto de x y respecto de y) son funciones homogéneas de grado $p - 1$.

▲ 5. Demuestre el teorema de Euler para funciones homogéneas: si $f(x,y)$ es homogénea de grado p entonces

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = p f$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO BIBLIOTECA

▲ 6. Demuestre el recíproco del teorema del ejercicio anterior: si $f(x,y)$ es tal que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = p f$$

para alguna p, entonces $f(x,y)$ es homogénea de grado p.

En los ejercicios del 7 al 24 resuelva las ecuaciones dadas

7. $(2x^3 + 3y^2x)\, dy = (x^3 + y^3)\, dx$

8. $y' = y/x + \cos y/x$

9. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}\, /x$

10. $y' = \dfrac{2x^2 + 6\,xy - 3y^2}{x^2 + xy - y^2}$

11. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'\,(bx^2 + 2cxy + fy^2) = 0$

12. $x^3y' = x^3 + xy^2 - y^3$

13. Resuelva la ecuación $y' = x/y$: *a*) como una ecuación de variables separables *b*) como una ecuación homogénea. Verifique que se obtiene el mismo resultado.

▲ 14. $y' = \dfrac{\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}}{\sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}}$

15. $y' = \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}}$

16. $(2x + y + 1)\, dx + (3x - y + 3)\, dy = 0$

17. $(6x + y - 2)\, dy + (5x - y + 1)\, dx = 0$

18. $y' = \sqrt{\dfrac{x + y - 1}{x + y - 2}}$

19. $(2x + y - 1)\, dx = (4x + 2y - 3)\, dy$

20. $y' = \left(\dfrac{x + 3y - 2}{x - 3y + 1}\right)^2$

21. $(2 + 3xy^2)\, dx - 4x^2y\, dy = 0$

22. $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})\, dx + x^3\, dy = 0$

23. $4xy^2\, dx + (3x^2y - 1)\, dy = 0$

24. $(x + y^3)\, dx + (3y^5 - 3y^2x)\, dy = 0$

▲ 25. Demuestre que si en la ecuación homogénea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se realiza el cambio de coordenadas a polares la solución de ésta se vería como

$$r = C \exp \int \frac{\tan\theta\, M(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) - N(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta)}{M(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) + \tan\theta\, N(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta)}\, d\theta$$

26. Use el resultado del ejercicio anterior para resolver

$$a)\ y' = \frac{x + y}{x - y}$$

$b)\ (3x - y)\, dx + (x - 2y)\, dy = 0$

▲ 27. En términos de los coeficientes a, b, c y d clasifique las soluciones de la ecuación

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

64☆

3. ECUACIONES LINEALES Y REDUCIBLES A LINEALES

3.1 Ecuaciones lineales

A una ecuación diferencial del 1er. orden del tipo

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son ciertas funciones (continuas) de x se le llama ecuación lineal.

En este capítulo estudiaremos solamente ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo cual nos concretaremos a realizar un estudio de la ecuación como la citada anteriormente. Las ecuaciones diferenciales lineales, que en general tienen la forma

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = Q(x)$$

con $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ y $Q(x)$ funciones (continuas) de x (a una ecuación de este tipo se le llama lineal de orden n) ocupan un papel muy importante dentro de las ecuaciones diferenciales. Por lo anterior dedicaremos un capítulo especial para su estudio. En esta sección comenzaremos a introducir algunas ideas básicas que aparecen en el estudio de las ecuaciones lineales de orden n, las cuales servirán de referencia para una generalización posterior.

Por lo tanto, el lector deberá prestar una atención especial a los resultados y a los métodos de solución que aparezcan en esta sección.

Introduzcamos la siguiente terminología para una ecuación lineal de primer orden:

Refiriéndonos a la ecuación (1) decimos que es *homogénea* si $Q(x) \equiv 0$. En caso contrario decimos que es *no homogénea.*

Así, por ejemplo, la ecuación

$$y' + x^2 y = 0$$

será una ecuación (lineal de primer orden) homogénea mientras que la ecuación

$$y' + xy = \operatorname{sen} x$$

es no homogénea.

Dada la ecuación lineal (1) diremos que la ecuación

$$y' + P(x)y = 0$$

es la ecuación *homogénea asociada* a ella.

Observe que la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal es de variables separables. Esta ecuación tiene por solución general

$$y_h = C\, e^{-\int P(x)\, dx}$$

(usamos el subíndice h para remarcar que se trata de la solución de la ecuación homogénea).

Veamos el siguiente teorema que nos dice de qué forma es la solución general de la ecuación lineal.

Teorema (Estructura de la solución general para una ecuación lineal de primer orden no homogénea).

Sea la ecuación diferencial lineal

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Sea y_h la solución general de la ecuación homogénea asociada a ella. Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea. Entonces, la solución general de esta ecuación es

$$y = y_h + y_p$$

Demostración

Ciertamente la función $y = y_h + y_p$ posee una constante arbitraria. Además $y' = y_h' + y_p'$, de modo que sustituyendo en la ecuación nos queda

$$y_h' + y_p' + P(x)\,(y_h + y_p) = Q(x)$$

o

$$(y_h' + P(x)\,y_h) + (y_p' + P(x)\,y_p) = Q(x)$$

Pero

$$y_h' + P(x)\,y_h \equiv 0$$

pues y_h es, por hipótesis, la solución general de la homogénea asociada, y

$$y_p' + P(x)\,y_p = Q(x)$$

pues y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Entonces la expresión a la que llegamos después de sustituir $y = y_h + y_p$ es una identidad, i.e. ésta es la solución general de la ecuación dada.

Q.E.D.

En nuestro caso ya explicamos lo que es y_h. En realidad veremos en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n que el teorema anterior sigue siendo válido y que y_h es, en general, más fácil de calcular que y_p.

Por ejemplo, aquí tuvimos y_h al resolver una ecuación diferencial de variables separables. Por lo tanto, nuestra atención se centra ahora en descubrir un método para calcular y_p. Pero antes de esto veamos un método intuitivo para resolver la ecuación (1). La idea usada en este método será extendida para ecuaciones lineales de orden 2 (con coeficientes constantes).

Tenemos, pues, nuestra ecuación (1) dada por

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

la cual queremos resolver (hallar su solución general).

El método que usaremos consiste en provocar de alguna manera que el lado izquierdo de esta ecuación sea la derivada del producto vy, donde v es cierta función a determinar.

Esta idea no es fruto de una inspiración, es sugerida por la aparición de y' y de y en el lado izquierdo de la ecuación y de recordar que

$$(vy)' = v\,y' + v'\,y$$

Entonces, si multiplicamos toda la ecuación (1) por la función v obtenemos que

$$v\,y' + v\,P(x)\,y = v\,Q(x)$$

por lo que la función v que nos serviría para nuestros propósitos sería *una* función que tuviera la propiedad de que

$$v\,P(x) = v'$$

Ésta es una ecuación de variables separables de la cual podemos obtener, resolviéndola, una función como la que nos interesa.

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dv}{v} = \int P(x)\,dx + C$$

o

$$v = C'\,e^{\int P(x)\,dx} \qquad (C' = e^C)$$

Ésta es la *solución general* de la ecuación $v\,P(x) = v'$. Nosotros estamos interesados tan sólo en una función v que la satisfaga. Tomemos entonces, por comodidad, $C' = 1$, de modo que la función

$$v = e^{\int P(x)\,dx}$$

es tal que si multiplicamos nuestra ecuación diferencial por ella, obtenemos en el primer miembro de la ecuación la derivada del producto vy.

Es decir

$$\underbrace{e^{\int P(x)\,dx}\,y' + P(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,y}_{(e^{\int P(x)\,dx}\,y)'} = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)$$

Por lo tanto, nuestro problema está prácticamente resuelto, pues la ecuación

$$(e^{\int P(x)\,dx}\,y)' = \frac{d\,(e^{\int P(x)\,dx}\,y)}{dx} = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)$$

es de variables separables para la función $e^{\int P(x)\,dx}\,y$.

Esto es

$$\int d(e^{\int P(x)\,dx}\,y) = \int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

o

$$e^{\int P(x)\,dx}\,y = \int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + C$$

de donde

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + C\,e^{-\int P(x)\,dx}}$$

que es la solución general que buscábamos.

Observe que $C\,e^{-\int P(x)\,dx}$ es lo que ya habíamos hallado como solución general de la ecuación homogénea asociada.

Entonces, según el teorema visto antes, tendremos que una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

En efecto, es de verificación inmediata que

$$y_p' + P(x)\, y_p = Q(x)$$

es una identidad.

Veamos un ejemplo de aplicación de este método.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$$

Solución

En este caso $P(x) = -2x$.

Hallamos entonces el factor $e^{\int P(x)\,dx}$ que convertirá al primer miembro de la ecuación en la derivada del producto $ye^{\int P(x)\,dx}$

Tenemos

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

Multiplicando la ecuación por e^{-x^2} obtenemos

$$e^{-x^2} y' - 2\,xe^{-x^2} y = 2x$$

o

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2} y) = 2x$$

de donde

$$e^{-x^2} y = x^2 + C$$

o

$$y = (x^2 + C)\, e^{-x^2}$$

que es la solución general de la ecuación.

Según la teoría desarrollada hasta este momento vemos que una opción para resolver la ecuación lineal no homogénea es:

1. Resolver la ecuación homogénea asociada (que como vimos es una ecuación de variables separables), i.e. obtener su solución general.
2. Hallar una solución particular de la ecuación no homogénea.
3. Sumar los resultados obtenidos en (1) y (2). Ésta será la solución general de la ecuación lineal no homogénea.

Nuestro problema está entonces en la etapa (2). ¿Cómo hallamos una solución particular de la ecuación dada (la no homogénea)? En seguida se expone el conocido método de *variación del parámetro* para hallar soluciones particulares de la ecuación no homogénea.

El método se basa en el hecho de que de alguna forma ya conocemos y_h (la solución general de la homogénea asociada) y en introducir la hipótesis de que la solución particular que buscamos es del tipo

$$y_p = g(x)\, y_h$$

(con la constante de y_h fija por ejemplo en 1), donde $g(x)$ es una función por determinar.

Esta función $g(x)$ la determinaremos imponiendo la condición de que y_p es solución (particular) de la no homogénea. En efecto, por ser y_p solución de la no homogénea tenemos que

$$y_p' + P(x)\, y_p = Q(x)$$

es una identidad. O sea

$$g(x)\, y_h' + g'(x)\, y_h + P(x) g(x)\, y_h = Q(x)$$

o

$$g(x)\,(y_h' + P(x)\, y_h) + g'(x)\, y_h = Q(x)$$

Pero $y_h' + P(x)\, y_h \equiv 0$, pues y_h es solución de la ecuación homogénea asociada.

Entonces

$$g'(x)\, y_h = Q(x)$$

En este caso

$$y_h = e^{-\int P(x)\,dx}$$

por lo que

$$g(x) = \int e^{\int P(x)\,dx}\, Q(x)\, dx \; *$$

y entonces la solución particular buscada es

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx}\, Q(x)\, dx$$

expresión que coincide con la establecida en la página 57 para y_p.

---

* Como buscamos una solución particular tomamos la constante de integración igual a cero.

Observación: el hecho de haber tomado y_h con C fija a 1 fue irrelevante. Bastaba con pedir que $C \neq 0$. ¿Por qué?

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación

$$y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$$

Solución

Hallamos primero y_h, i.e. la solución general de

$$y' + y\cos x = 0$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x\, dx + C'$$

de donde

$$y_h = C\, e^{-\operatorname{sen} x}$$

La solución particular y_p la suponemos de la forma

$$y_p = g(x)\, e^{-\operatorname{sen} x}$$

Entonces

$$y_p' = -g(x)\cos x\, \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x} + g'(x)\, e^{-\operatorname{sen} x}$$

y como $y_p' + y_p \cos x = \operatorname{sen} x$ tenemos que

$$-g(x)\cos x\, e^{-\operatorname{sen} x} + g'(x)\, e^{-\operatorname{sen} x} + g(x)\cos x\, e^{-\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cos x$$

de donde

$$g(x) = \int \operatorname{sen} x \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx$$

Haciendo $\operatorname{sen} x = t$ tenemos

$$g(x) = \int \operatorname{sen} x \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx = \int te^t\, dt = (t-1)\, e^t = (\operatorname{sen} x - 1)\, e^{\operatorname{sen} x}$$

por lo que

$$y_p = \operatorname{sen} x - 1$$

y entonces la solución general de la ecuación dada es

$$y = y_h + y_p = C\,e^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$$

Veamos otro par de ejemplos interesantes.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación

$$y' = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2\,y}$$

Solución

Ciertamente esta ecuación está muy lejos de tener una estructura del tipo $y' + P(x)y = Q(x)$. Sin embargo, podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{dx}{dy} = x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2\,y$$

o

$$\frac{dx}{dy} - (\operatorname{sen} y)x = 2 \operatorname{sen} 2\,y$$

la cual tiene la forma $x' + R(y)x = S(y)$ donde R y S son ciertas funciones de y. Es decir, considerando a x como variable dependiente y a y como independiente, nuestra ecuación tiene la estructura de una ecuación lineal. Procedamos a resolverla.

Hallamos x_h, solución general de

$$\frac{dx}{dy} - (\operatorname{sen} y)\,x = 0$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dx}{x} = \int \operatorname{sen} y\,dy + C'$$

o

$$x_h = C\,e^{-\cos y}$$

Hallamos x_p suponiendo que

$$x_p = g(y)\,e^{-\cos y}$$

Entonces

$$x_p' = g(y)\ \text{sen}\ y\ e^{-\cos y} + g'(y)\ e^{-\cos y}$$

como $x_p' + (\text{sen}\ y)x_p = 2\ \text{sen}\ 2\ y$, tenemos que

$$g(y)\ \text{sen}\ y\ e^{-\cos y} + g'(y)\ e^{-\cos y} - (\text{sen}\ y)\ g(y)\ e^{-\cos y} = 2\ \text{sen}\ 2\ y$$

de donde

$$\begin{aligned} g(y) &= \int 2\ \text{sen}\ 2\ y\ e^{\cos y}\,dy \\ &= 4\int e^{\cos y}\ \text{sen}\ y\ \cos y\ dy \end{aligned}$$

Haciendo $\cos y = t$ tenemos

$$g(y) = 4\int e^{\cos y}\ \text{sen}\ y\ \cos y\ dy = -4\int e^t\ t\ dt =$$

$$-4\ e^t\ (t-1) = -4\ e^{\cos y}\ (\cos y - 1)$$

Entonces

$$x_p = -4\ (\cos y - 1)$$

por lo que la solución general buscada es

$$x = C\ e^{-\cos y} - 4\ (\cos y - 1)$$

Ejemplo 4

Demostrar que

$$\int_0^x e^{zx - z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$$

Solución

Sea

$$I(x) = \int_0^x e^{zx - z^2}\,dz$$

Por la regla de Leibniz tenemos que

$$I'(x) = e^{x\cdot x - x^2} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{zx - z^2}\right)dz = 1 + \int_0^x z\ e^{zx - z^2}\,dz$$

Observe que

$$\int_0^x z\, e^{zx-x^2}\, dz = -\tfrac{1}{2}\int_0^x (x - 2z - x)\, e^{zx-z^2}\, dz$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^x (x - 2z)\, e^{zx-z^2}\, dz + \frac{x}{2}\int_0^x e^{zx-z^2}\, dz$$

$$= -\tfrac{1}{2}\, e^{zx-z^2}\Big|_0^x + \frac{x}{2}\, I(x)$$

$$= \frac{x}{2}\, I(x)$$

por lo que

$$I'(x) = 1 + \frac{x}{2}\, I(x)$$

o

$$I'(x) - \frac{x}{2}\, I(x) = 1$$

que es una ecuación diferencial lineal para $I(x)$.

Resolviendo la homogénea asociada

$$I'(x) = \frac{x}{2}\, I(x)$$

tenemos

$$I(x)_h = C\, e^{\frac{x^2}{4}}$$

La solución particular de la no homogénea es de la forma

$$I(x)_p = g(x)\, e^{\frac{x^2}{4}}$$

Derivando

$$I'(x)_p = \frac{x}{2}\, g(x)\, e^{\frac{x^2}{4}} + g'(x)\, e^{\frac{x^2}{4}}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{x}{2} g(x)\, e^{\frac{x^2}{4}} + g'(x)\, e^{\frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} g(x)\, e^{\frac{x^2}{4}} = 1$$

de donde

$$g(x) = \int e^{-\frac{x^2}{4}}\, dx$$

o

$$g(x) = \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\, dz + K$$

para alguna constante K, por lo que

$$I(x)_{\text{p}} = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\, dz + K\, e^{\frac{x^2}{4}}$$

Entonces la solución general para $I(x)$ es

$$I(x) = C'\, e^{\frac{x^2}{4}} + e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\, dz \qquad C' = C + K$$

Pero observe que $I(x)$, tal como fue definida en el comienzo de la solución del ejemplo, satisface que

$$I(0) = 0$$

Imponiendo esta condición en la solución general tenemos que

$$0 = C'(1) + (1) \int_0^0 e^{-\frac{z^2}{4}}\, dt \qquad C' = 0$$

por lo que

$$\int_0^x e^{zx - z^2}\, dz = I(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\, dz$$

que era lo que queríamos probar.

Observación: este último ejemplo muestra un camino para probar una identidad, el cual, aunque bastante indirecto, goza de una gran elegancia. Una manera menos elegante pero más directa (y más elemental) es simplemente observar que

$$\int_0^x e^{zx-z^2}\,dz \underset{\underset{z=\frac{x+t}{2}}{\Big\downarrow}}{=} \int_{-x}^{x} e^{\frac{x+t}{2}\cdot x-\left(\frac{x+t}{2}\right)^2}\,\frac{dt}{2} = \tfrac{1}{2}\int_{-x}^{x} e^{\frac{x^2-t^2}{4}}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\, e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt \underset{\underset{\substack{\text{integral de una}\\ \text{función par en un}\\ \text{intervalo simétrico}\\ \text{respecto del origen}}}{\Big\uparrow}}{=} e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$$

3.2 Ecuaciones reducibles a lineales

A una ecuación de la forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \qquad\qquad n \neq 0{,}1$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones (continuas) de x se le llama *Ecuación de Bernoulli.*

Los casos $n = 0{,}1$ no se consideran, pues corresponden a una ecuación lineal no homogénea y a una ecuación lineal homogénea, respectivamente, que ya fueron estudiadas.

La introducción de la nueva variable dependiente z, tal que $z = y^{1-n}$, transforma a una ecuación de Bernoulli del tipo citado anteriormente en una ecuación lineal.

En efecto, tenemos que $z = y^{1-n}$, $dz = (1-n)\,y^{-n}dy$, por lo que sustituyendo en la ecuación dada nos queda

$$\frac{1}{1-n}\,y^n\,\frac{dz}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

o

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + P(x)\,z = Q(x)$$

que es una ecuación lineal para $z = z(x)$.

$$\underset{\Big\downarrow\; z=\frac{x+t}{2}}{\int_0^x e^{zx-z^2}\,dz} = \int_{-x}^x e^{\frac{x+t}{2}\cdot x-\left(\frac{x+t}{2}\right)^2}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_{-x}^x e^{\frac{x^2-t^2}{4}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-x}^x e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt = e^{\frac{x^2}{4}}\underset{\Big\uparrow}{\int_0^x} e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$$

integral de una
función par en un
intervalo simétrico
respecto del origen

3.2 Ecuaciones reducibles a lineales

A una ecuación de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad\qquad n \neq 0,1$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones (continuas) de x se le llama *Ecuación de Bernoulli.*

Los casos $n = 0,1$ no se consideran, pues corresponden a una ecuación lineal no homogénea y a una ecuación lineal homogénea, respectivamente, que ya fueron estudiadas.

La introducción de la nueva variable dependiente z, tal que $z = y^{1-n}$, transforma a una ecuación de Bernoulli del tipo citado anteriormente en una ecuación lineal.

En efecto, tenemos que $z = y^{1-n}$, $dz = (1-n)y^{-n}dy$, por lo que sustituyendo en la ecuación dada nos queda

$$\frac{1}{1-n}\,y^n\,\frac{dz}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

o

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

que es una ecuación lineal para $z = z(x)$.

Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$3y' + y\,\frac{x^2+a^2}{x\,(x^2-a^2)} = \frac{1}{y^2}\,\frac{x(3\,x^2-a^2)}{x^2-a^2}$$

Solución

En este caso $n = -2$, por lo que hacemos $z = y^{1-n} = y^3$.

Entonces $\dfrac{dz}{dx} = 3\,y^2\,y'$. Sustituyendo

$$3\,\frac{1}{3\,y^2}\,\frac{dz}{dx} + y\,\frac{x^2+a^2}{x\,(x^2-a^2)} = \frac{1}{y^2}\,\frac{x\,(3\,x^2-a^2)}{x^2-a^2}$$

o, multiplicando por y^2

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x^2+a^2}{x\,(x^2-a^2)}\,z = \frac{x\,(3\,x^2-a^2)}{x^2-a^2}$$

Resolvamos la homogénea asociada

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x^2+a^2}{x\,(x^2-a^2)}\,z = 0$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{x^2+a^2}{x\,(x^2-a^2)}\,dx + C'$$

Para resolver la integral del lado derecho separamos en fracciones parciales

$$\frac{x^2+a^2}{x\,(x^2-a^2)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}$$

Entonces

$$\int \frac{x^2+a^2}{x\,(x^2-a^2)}\,dx = -ln\,|x| + ln\,|x-a| + ln\,|x+a|$$

$$= ln\left|\frac{x^2-a^2}{x}\right|$$

por lo que la solución general de la homogénea asociada será

$$z_h = C \frac{x}{x^2 - a^2}$$

Una solución particular de la no homogénea será de la forma

$$z_p = g(x) \frac{x}{x^2 - a^2}$$

Derivando

$$z_p' = -g(x) \frac{x^2 + a^2}{(x^2 - a^2)^2} + g'(x) \frac{x}{x^2 - a^2}$$

Como $z_p' + \dfrac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)} z_p = \dfrac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}$ tenemos

que $-g(x) \dfrac{x^2 + a^2}{(x^2 - a^2)^2} + g'(x) \dfrac{x}{x^2 - a^2} +$

$$+ \frac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)} \frac{x}{x^2 - a^2} g(x) = \frac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}$$

de donde

$$\begin{aligned} g(x) &= \int (3x^2 - a^2)\, dx \\ &= x^3 - a^2 x = x(x^2 - a^2) \end{aligned}$$

Entonces

$$z_p = x(x^2 - a^2) \frac{x}{x^2 - a^2} = x^2$$

y la solución general de la ecuación lineal será

$$z = x^2 + \frac{Cx}{x^2 - a^2}$$

por lo que la solución general de la ecuación de Bernoulli inicial es

$$y^3 = x^2 + \frac{Cx}{x^2 - a^2}$$

Desde el punto de vista de estructura, la ecuación

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

con $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ funciones (continuas) de x representa una extensión natural de una ecuación lineal. A una ecuación de esta forma se le llama *Ecuación de Riccati.*

Se sabe que en general no existe procedimiento alguno que permita obtener explícitamente la solución general de una ecuación de Riccati. Sin embargo, conociendo una solución particular de ella, digamos y_1, es posible reducirla a una ecuación lineal (y, por lo tanto, explicitar por completo su solución general) por medio de la introducción de la nueva variable dependiente u tal que

$$y = y_1 + 1/u$$

En efecto, tendríamos que

$$y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u'$$

De modo que sustituyendo en la ecuación original nos queda

$$y_1' - \frac{1}{u^2}u' + P(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 = R(x)$$

Efectuando las operaciones indicadas y reagrupando términos nos queda

$$(y_1' + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2) - \frac{1}{u^2}u' + P(x)\frac{1}{u} + 2Q(x)\frac{y_1}{u} +$$

$$Q(x)\frac{1}{u^2} = R(x)$$

Pero el paréntesis que aparece en el primer miembro de esta ecuación es precisamente $R(x)$, pues y_1 es una solución particular de la ecuación dada. Entonces, multiplicando por $-u^2$ obtenemos

$$u' - [P(x) + 2Q(x)y_1]u = Q(x)$$

que es una ecuación lineal para $u = u(x)$.

Aún más, si se conocen dos soluciones particulares de la ecuación de Riccati, es posible explicitar su solución general de una forma muy simple.

En efecto, sean y_1 y y_2 dos soluciones particulares (distintas) de la ecuación de Riccati.

Entonces

$$y_1' + P(x)\,y_1 + Q(x)\,y_1^2 = R(x)$$

y

$$y_2' + P(x)\,y_2 + Q(x)\,y_2^2 = R(x)$$

Si llamamos y_g a la solución general de la ecuación dada tenemos que

$$y_g' + P(x)\,y_g + Q(x)\,y_g^2 = R(x)$$

de modo que podemos obtener la siguiente información (restando cada una de las expresiones con y_1, y_2 de la última expresión con y_g).

$$(y_g - y_1)' + P(x)\,(y_g - y_1) + Q(x)\,(y_g^2 - y_1^2) = 0$$

o

$$(y_g - y_1)' + [P(x) + (y_g + y_1)\,Q(x)]\,(y_g - y_1) = 0$$

resolviendo para $h = y_g - y_1$ obtenemos que

$$y_g - y_1 = C_1\,e^{-\int [P(x) + (y_g + y_1)Q(x)]\,dx}$$

Similarmente obtenemos que

$$y_g - y_2 = C_2\,e^{-\int [P(x) + (y_g + y_2)Q(x)]\,dx}$$

de modo que, llamando $C = \dfrac{C_1}{C_2}$ obtenemos que la solución general y_g satisface que

$$\frac{y_g - y_1}{y_g - y_2} = C\,e^{\int (y_2 - y_1)\,Q(x)\,dx}$$

o

$$y_g = \frac{y_1 - [Ce^{\int (y_2 - y_1)\,Q(x)\,dx}]\,y_2}{1 - Ce^{\int (y_2 - y_1)\,Q(x)\,dx}}$$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación

$$y' + y^2 = 1 + x^2$$

Solución

Se trata de una ecuación de Riccati con $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$, $R(x) = 1 + x^2$. No es difícil darse cuenta que $y_1 = x$ es una solución particular de esta ecuación.

De modo que, según lo visto anteriormente, la sustitución

$$y = x + \frac{1}{u}$$

donde u es la nueva variable dependiente transformará nuestra ecuación original en una ecuación lineal.

En efecto, tenemos que

$$y' = 1 - \frac{1}{u^2} u'$$

Sustituyendo

$$1 - \frac{1}{u^2} u' + \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 = 1 + x^2$$

o

$$u' - 2 x u = 1$$

Resolviendo la homogénea asociada obtenemos que

$$u_h = C e^{x^2}$$

Una solución particular de la no homogénea será de la forma

$$u_p = g(x) e^{x^2}$$

Derivando obtenemos

$$u_p' = 2 x g(x) e^{x^2} + g'(x) e^{x^2}$$

De modo que

$$2 x g(x) e^{x^2} + g'(x) e^{x^2} - 2 x g(x) e^{x^2} = 1$$

de donde

$$g(x) = \int e^{-x^2} dx$$

Entonces la ecuación general de la ecuación lineal es

$$u = e^{x^2} \int e^{-x^2}\, dx + C\, e^{x^2}$$

y entonces la solución general de la ecuación de Riccati es

$$y = x + e^{-x^2} \left(\int e^{-x^2}\, dx + C \right)^{-1}$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 2. SECCIÓN 3)

En los ejercicios del 1 al 5 resuelva la ecuación lineal correspondiente por el método de ''convertir el primer miembro de la ecuación en la derivada de un producto''

1. $y' + 3x^3 y = 2x$
2. $5y' + (\operatorname{sen} x) y = \operatorname{sen} x$
3. $y' = \dfrac{3y + x}{x^2}$
4. $y' + 10\, y = e^{tx}$
5. $y' + x^{-1} y = e^x$

En los ejercicios del 6 al 10 resuelva la ecuación lineal correspondiente resolviendo primero la homogénea asociada y hallando luego una solución particular de la ecuación no homogénea

6. $y' + 2xy = x\, e^{2x}$
7. $y' - y = 2x\, e^{x + x^2}$
8. $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
9. $x^2 y' - 2xy = x^2 + x + 1$
10. $xy' + y = x^3 + 1$

En los ejercicios del 11 al 17 resuelva las ecuaciones

11. $x\, lnx\; y' - (1 + lnx) y + \dfrac{1}{2} x^2 (2 + lnx) = 0$
12. $y' + y g'(x) - g(x) g'(x) = 0$, donde $g(x)$ es cierta función dada.
13. $y' = \dfrac{y}{2y\, lny + y - x}$
14. $(x + 1)\, dy - [2y + (x + 1)^4]\, dx = 0$
15. $y' + x \operatorname{sen} 2y = x\, e^{-x^2} \cos^2 y$ (haga $t = \tan y$)
16. $y' = (x \cos y + \operatorname{sen} 2y)^{-1}$

17. $\int_0^1 h(tx)\,dt = n\,h(x)$

En los ejercicios del 18 al 23 encuentre las soluciones particulares de las ecuaciones dadas

18. $yy' - 2x = 3x^2 - 2$ $\quad y(1) = 1$
19. $y\,dx - 4x\,dy = y^3\,dy$ $\quad y(4) = 1$
20. $(5 + xy)\,dx = (1 + x^2)\,dy$ $\quad y(0) = 10$
21. $y' - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} y < \infty$
22. $y' - y\,lnx = -(1 + 2lnx)\,x^{-x}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$
23. $(1 + x^2)\,ln(1 + x^2)\,y' - 2xy = ln(1 + x^2) - 2x \arctan x$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} y = -\dfrac{\pi}{2}$

24. Sean y_1 y y_2 dos soluciones distintas de la ecuación

$$y' + P(x)\,y = 0$$

Demostrar que existe una constante C tal que $y_1 = C\,y_2$.

25. Sean y_1 y y_2 dos soluciones distintas de la ecuación

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

a) Demostrar que $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ es la solución general de la misma ecuación.
b) ¿Cuál debería ser la relación entre las constantes C_1 y C_2 para que la combinación lineal $C_1y_1 + C_2y_2$ sea la solución general de la ecuación dada?
c) Demuestre que si y_3 es una tercera solución distinta de y_1 y y_2, entonces $(y_2 - y_1)/(y_3 - y_1)$ es constante.

26. Sea y_i, $i = 1,2,\ldots,n$ una solución de la ecuación

$$y' + P(x)\,y = Q_i(x)$$

Demuestre que $\sum\limits_{i=1}^{N} y_i$ es solución de la ecuación

$$y' + P(x)\,y = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x)$$

Use este hecho para resolver

$$y' + 2y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

27. Demuestre que la ecuación diferencial

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y \ln y$$

puede resolverse haciendo $\ln y = v$. Resuelva

$$y' + 3y = x^2\, y \ln y$$

28. Demuestre que la propiedad de linealidad de la ecuación

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

no se pierde al cambiar la variable x por la variable t por medio del cambio de variable $x = f(t)$.

29. Un circuito RL es un circuito formado por una resistencia (R) y una inductancia (L) conectados a una fuente de tensión (V), tal como se muestra en la siguiente figura

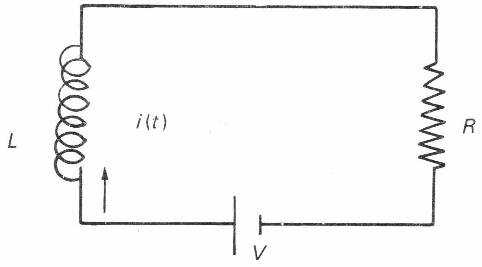


Figura 2. Circuito RL.

La intensidad de la corriente que circula por el circuito es una función del tiempo (transcurrido desde que se cierre el circuito). La denotamos por $i(t)$. Las llamadas "leyes de Kirchhoff" nos dan la siguiente información

$$L\, i'(t) + R\, i(t) = V$$

Suponga que a $t = 0$ la corriente que circulaba por el circuito era nula.

a) Si la tensión V es constante, demuestre que la intensidad de corriente que circula por el circuito a un tiempo t viene dada por la expresión

$$i(t) = -\frac{V}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}\, t\right) + \frac{V}{R}$$

b) Si la tensión depende del tiempo por medio de la fórmula $V(t) = V_o \operatorname{sen} \omega t$, donde V_o y ω son constantes (positivas), demuestre que la intensidad de la corriente que circula por el circuito a un tiempo t es

$$i(t) = \frac{V_o\, \omega\, L}{R^2 + \omega^2 L^2} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) + \frac{V_o}{[R^2 + \omega^2 L^2]^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

donde ϕ es el ángulo que satisface

$$\cos \phi = \frac{R}{[R^2 + \omega^2 L^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad \operatorname{sen} \phi = \frac{\omega L}{[R^2 + \omega^2 L^2]^{\frac{1}{2}}}$$

En los ejercicios del 30 al 37 resuelva las ecuaciones

30. $xy' + y = (x/y)^2$

31. $x^3 y' + 2x^4 y = y^2 \dfrac{1 + 2x^2}{x^2}$

32. $y' + y \dfrac{x + 1/2}{x^2 + x + 1} = \dfrac{(1 + x^2)}{(x^2 + x + 1)^{3/2}}$

33. $(1 + x^2)y' = xy + (xy)^2$
34. $2x^3 y' = y(y^2) + 3x^2)$
35. $6y^2\, dx - x(ax^3 + y)\, dy = 0$
36. $(y^4 - 2xy)\, dx + 3x^2\, dy = 0$ tal que $y(2) = 1$
37. $xy' - y = x^\alpha y^\beta$ $\alpha + \beta \neq 1,\ \beta \neq 1$
38. Demuestre que la ecuación de Bernoulli

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n \quad n \neq 0,1$$

podría ser resuelta haciendo $y = u(x)v(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones por determinar. Use esta idea para resolver

$$(2 \operatorname{sen} x)y' + y \cos x = y^3(x \cos x - \operatorname{sen} x)$$

39. Demuestre que si y_1, y_2 y y_3 son tres soluciones distintas de la ecuación de Ricatti

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

entonces la solución general viene dada por

$$\frac{(y - y_1)(y_2 - y_3)}{(y - y_2)(y_1 - y_3)} = C$$

40. Resuelva la ecuación

$$y' = xy^2 - 2y + 4 - 4x$$

sabiendo que $y = 2$ es una solución particular.

41. Resuelva la ecuación

$$y' = \frac{y^2}{x+1} - \frac{xy}{x+1} + 1$$

sabiendo que $y = 1$ y $y = x$ son soluciones.

4. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS. FACTORES DE INTEGRACIÓN

4.1 Ecuaciones exactas

A una ecuación del tipo

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones[*] de las variables x, y, tales que existe una función $f(x, y)$ con la propiedad de que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

se le llama *ecuación diferencial exacta.*

Observe que en tal caso tendríamos que en términos de la función $f(x, y)$ la ecuación diferencial se escribiría como

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = 0$$

o

$$df = 0$$

donde df es la diferencial total de la función f.

Es claro entonces que la solución general de la ecuación diferencial original sería dada por la familia monoparamétrica de curvas en el plano $f(x, y) = C$.

---

[*] Para la teoría que se desarrolla aquí es necesario pedir que estas funciones sean al menos de clase C^1. Como siempre, estamos suponiendo que las funciones que aparecen en este capítulo son tan diferenciables como queramos o bien como necesitemos, y también que están definidas en lugares "convenientes".

$-1 + C_2 - 2C_2 = 0$

$-11 - C_2 = 0$

Nosotros ya habíamos considerado el problema de *construir* la ecuación diferencial de la familia $f(x, y) = C$. Veíamos pues que esta ecuación diferencial era

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

o

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

Ahora nuestro problema es el inverso. Dada la ecuación $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$, ¿será que existe una función $f(x, y)$ tal que $df(x, y) = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$?, i.e. dada tal ecuación, ¿será esta ecuación exacta? En principio esta pregunta no es de respuesta evidente. Para responderla tendremos que *caracterizar* las ecuaciones diferenciales exactas. Esto lo lograremos con el siguiente teorema.

Teorema

La ecuación diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{a}$$

es una ecuación diferencial exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Demostración

Necesidad

Supongamos entonces que la ecuación (*a*) es exacta. Existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Derivando la primera de estas expresiones respecto de y, la segunda respecto de x, obtenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Como $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son al menos C^1 (ver nota en la página 75), f es al menos C^2 y entonces (por el teorema de Schwartz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

es decir

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Suficiencia

Tenemos ahora un par de funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tales que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y queremos probar que la ecuación diferencial $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ es exacta, i.e. que existe una función $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial x} = N$. Para demostrar la suficiencia exhibiremos tal función.

Como $f(x, y)$ debe ser tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ proponemos que $f(x, y)$ sea de la forma

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y)$$

donde $\int M(x, y)\, dx$ representa la función de x, y, cuya derivada parcial respecto de x es $M(x, y)$ y $g(y)$ es una cierta función que *sólo depende de* y.

Es claro entonces que esta $f(x, y)$ satisface que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$.

Encontremos ahora la función $g(y)$. Derivando la expresión para $f(x, y)$ respecto de y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx + g'(y)$$

Pero por hipótesis $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$, por lo que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M (x, y)\, dx + g'(y) = N(x, y)$$

de donde $g(y)$ debe ser

$$g(y) = \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx \right) dy$$

La demostración quedaría concluida si probamos que el integrando de esta última expresión *depende únicamente de y* (pues solamente así g sólo dependería de y).

Probemos entonces que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx \right) = 0$$

En efecto

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx \right) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M(x, y)\, dx = \frac{\partial}{\partial x} N (x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M(x, y)\, dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} N (x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M (x, y)\, dx \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = 0 \quad \text{(por hipótesis)}$$

Por lo tanto, la función $f(x, y)$ que tiene la propiedad de que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} N$ es

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx + \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx \right) dy$$

y queda así probada la suficiencia. **Q.E.D.**

Observación: en la prueba de la suficiencia de este teorema *se ha proporcionado un método* para resolver ecuaciones exactas.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación

$$\left(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0$$

Solución

En este caso

$$M(x, y) = \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}$$

$$N(x, y) = x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}$$

y como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y + \operatorname{sen} x = \frac{\partial N}{\partial y}$$

la ecuación es exacta.

Queremos obtener una función $f(x, y)$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Tenemos

$$f(x, y) = \int \left(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right) dx + g(y)$$

$$= x \operatorname{sen} y - y \cos x + ln\,|x| + g(y)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y - \cos x + g'(y)$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$, tenemos que

$$g'(y) = \frac{1}{y}$$

por lo que

$$g(y) = ln\ |y|$$

y entonces

$$f(x, y) = x \text{ sen } y - y \cos x + ln\ |x| + ln\ |y|$$

por lo que la solución general de la ecuación es

$$x \text{ sen } y - y \cos x + ln\ |xy| = C$$

Ejemplo 2

Sea dada la ecuación

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

Suponga que esta ecuación es homogénea y exacta. Investigar, entonces, la estructura de su solución.

Solución

Sea $f(x, y) = C$ la solución general de la ecuación dada.

Por ser esta ecuación exacta debemos tener que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Multiplicando la primera de estas expresiones por N, la segunda por $-M$, y sumando miembro a miembro, obtenemos que f debe entonces satisfacer que

$$N\frac{\partial f}{\partial x} - M\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{b}$$

Recíprocamente, si g es cualquier función que satisface que

$$N\frac{\partial g}{\partial x} - M\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

afirmamos que $g(x, y) = C$ es la solución general de la ecuación dada.

En efecto, la ecuación inicial puede reescribirse como

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

De $g(x, y) = C$, obtenemos que $y' = -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}$

Pero g satisface (**c**), por lo que

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{M}{N}$$

i. e. $g(x, y) = C$ es la solución general de la ecuación dada.

Consideremos entonces la solución general de la ecuación dada por $f(x, y) = C$. Queremos investigar de qué tipo es f.

Como la ecuación dada es homogénea, las funciones M y N son homogéneas del mismo grado, y entonces debe cumplirse que [*].

$$x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y} = pM$$

y

$$x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y} = pN$$

Entonces, después de multiplicar (**b**) por p, sustituyendo estas últimas expresiones nos queda

$$\left(x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(d)}$$

Pero la ecuación es, por hipótesis, exacta, por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

de modo que (**d**) nos queda como

$$\left(x\frac{\partial M}{\partial y} + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

---

[*] Según el teorema de Euler para funciones homogéneas, si $\phi(x, y)$ es una función homogénea de grado p, se cumple entonces que

$$x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = p\,\phi(x, y)$$

Sumando miembro a miembro esta última expresión con la (**b**) obtenemos

$$\left(x\frac{\partial M}{\partial y}+y\frac{\partial N}{\partial y}+N\right)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial x}+M\right)\frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad (\mathbf{e})$$

Observe que si llamamos

$$g = xM + yN$$

entonces

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial M}{\partial y} + y\frac{\partial N}{\partial y} + N$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial x} + M$$

de modo que sustituyendo en (**e**) nos queda

$$\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

poniendo $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ (y multiplicando por (-1)) obtenemos que

$$N\frac{\partial g}{\partial x} - M\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

por lo que $g(x, y) = C$ debe ser la solución general de la ecuación dada (por ser una función que satisface (**c**)); es decir, la solución general de la ecuación original es de la forma

$$x\,M(x, y) + yN(x, y) = C$$

4.2 Factores de integración

En realidad la propiedad de exactitud de la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es una propiedad muy restrictiva.

Dada una ecuación diferencial de este tipo es más probable que la ecuación no sea exacta a que lo sea.

Estudiaremos aquí qué es lo que se puede hacer cuando nos enfrentamos a una ecuación no exacta (cuando es posible hacer algo, pues ya se dijo que son muy pocas las ecuaciones diferenciales de las cuales puede explicitarse su solución).

Para ilustrar la técnica que se debe usar en casos de no exactitud de una ecuación diferencial, consideremos el siguiente ejemplo.

Sea la ecuación

$$(1 - x^2y)\,dx + x^2\,(y - x)\,dx = 0$$

En este caso

$$M(x, y) = 1 - x^2y$$

$$N(x, y) = x^2 (y - x)$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\,xy - 3\,x^2$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación dada no es exacta.

Veamos lo que sucede si multiplicamos toda esta ecuación por el factor $\frac{1}{x^2}$. Obtendríamos

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x)\, dy = 0$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2} - y\right) = -1 = \frac{\partial}{\partial x}(y - x)$$

de modo que esta nueva ecuación sí es exacta y podremos explicitar su solución según el método expuesto en 4.1. Vemos entonces que el factor $\frac{1}{x^2}$ convirtió a la ecuación original, que no era exacta, en una ecuación exacta. Llamaremos a un factor como este factor de integración (correspondiente a la ecuación dada).

En general, decimos que la función (no nula) $\mu(x, y)$ es un *factor de integración* para la ecuación

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{f}$$

si la ecuación que se obtiene de multiplicar a esta ecuación por $\mu(x, y)$ es una ecuación exacta; i.e. si la ecuación

$$\mu(x, y)\, M(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, N(x, y)\, dy = 0 \tag{g}$$

es exacta.

Veamos qué condiciones debe satisfacer un factor de integración de una ecuación como (**f**) no exacta.

Como la ecuación (**g**) es exacta debemos tener que

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)\, M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)\, N(x, y)]$$

o sea

$$\mu(x, y)\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) + M(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \mu(x, y) =$$

$$\mu(x, y)\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) + N(x, y)\frac{\partial}{\partial x} \mu(x, y)$$

o

$$N(x, y)\frac{\partial}{\partial x} \mu(x, y) - M(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \mu(x, y) =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)\right] \mu(x, y) \qquad (\mathbf{h})$$

En realidad, preguntarnos por la forma del factor de integración $\mu(x, y)$ nos ha conducido a una ecuación diferencial parcial para función $\mu(x, y)$ la cual resulta más difícil de resolver que el mismo problema inicial (el de resolver la ecuación no exacta dada). Nos tendremos que conformar con estudiar algunos casos particulares para los cuales esta ecuación parcial tiene una fácil solución.

1. $\mu\ (x, y)$ sólo depende de x.

En este caso, si llamamos $\mu\ (x, y) = \mu\ (x\ )$ la ecuación (**h**) se escribe como

$$N\ (x, y)\frac{d\ \mu\ (x)}{dx} = \left[\frac{\partial}{\partial y} M\ (x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N\ (x, y)\right] \mu\ (x)$$

de donde se obtiene que

$$\frac{d\ \mu\ (x)}{u\ (x)} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial\ y} M\ (x, y) - \dfrac{\partial}{\partial\ x} N\ (x, y)}{N\ (x, y)}\, dx$$

Para que exista $\mu(x)$ será necesario (y suficiente) que la expresión

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)}{N(x, y)}$$

dependa sólo de x. En tal caso el factor de integración será

$$\mu(x) = exp \int \frac{\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)}{N(x, y)} dx$$

2. $\mu(x, y)$ sólo depende de y.
Llamando $\mu(x, y) = \mu(y)$, la ecuación (**h**) se escribe como

$$- M(x, y) \frac{d\mu(y)}{dy} = \left[\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)\right] \mu(y)$$

de donde se obtiene

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y)}{M(x, y)} dy$$

Nuevamente, una condición necesaria y suficiente para que exista este factor de integración es que la expresión

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y)}{M(x, y)}$$

dependa sólo de y. En tal caso el factor de integración será

$$\mu(y) = exp \int \frac{\dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y)}{M(x, y)} dy$$

3. El factor de integración depende sólo de la variable z, donde $z = z(x, y)$. Tenemos pues $\mu = \mu(z)$ donde $z = z(x, y)$.
En este caso

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(z) = \frac{d}{dz}\mu(z)\frac{\partial}{\partial x}z(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(z) = \frac{d}{dz}\mu(z)\frac{\partial}{\partial y}z(x, y)$$

y la ecuación (**h**) se escribe como

$$N(x, y)\frac{d}{dz}\mu(z)\frac{\partial}{\partial x}z(x, y) - M(x, y)\frac{d}{dz}\mu(z)\frac{\partial}{\partial y}z(x, y) =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x, y)\right]\mu(z)$$

o bien

$$\frac{d\mu(z)}{\mu(z)} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x}N(x, y)}{N(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x}z(x, y) - M(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}z(x, y)}\,dz$$

Para que exista este factor de integración será necesario y suficiente que

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x}N(x, y)}{N(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x}z(x, y) - M(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}z(x, y)}\,dz$$

dependa sólo de la variable z. En este caso el factor de integración buscado es

$$\mu(x, y) = exp\int\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y}N(x, y)}{N(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x}z(x, y) - M(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}z(x, y)}\,dz$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación

$$(x + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0$$

Solución

Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y$$

por lo que la ecuación no es exacta.

Observe que

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)}{N(x, y)} = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

por lo que

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

es un factor de integración para la ecuación.

En efecto, multiplicando toda la ecuación por $\frac{1}{x^2}$ tenemos que

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x}\, dy = 0$$

y ahora

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y}{x}\right)$$

por lo que la ecuación obtenida es exacta.

Se deja como ejercicio al lector obtener la solución general de esta ecuación.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación

$$(2\,xy^2 - 3\,y^3)\,dx + (7 - 3\,xy^2)\,dy = 0$$

Solución

Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2\,xy^2 - 3\,y^3) = 4\,xy - 9\,y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(7 - 3\,xy^2) = -3\,y^2$$

por lo que la ecuación no es exacta.

Sin embargo, observe que

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y)}{M(x, y)} = \frac{3\,y^2 - 4xy + 9\,y^2}{2\,xy^2 - 3\,y^3} = -\frac{2}{y}$$

por lo que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}$$

es un factor de integración de la ecuación dada.

En efecto, la ecuación

$$(2\,x - 3\,y)\,dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3\,x\right) dy = 0$$

es exacta (las parciales correspondientes a las nuevas funciones M y N son iguales a -3)

Se podrá obtener sin dificultad que $x^2 - \dfrac{7}{y} - 3\,xy = C$ es la solución buscada.

Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$(3\,y^2 - x)\,dx + (2\,y^3 - 6\,xy)\,dy = 0$$

sabiendo que posee un factor de integración que depende de $x + y^2$.

Solución

Llamando $z = x + y^2$, en esta ecuación tenemos $M(x, y) = 3y^2 - x$, $N(x, y) = 2y^3 - 6xy$, de modo que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)}{N(x, y) \frac{\partial}{\partial x} z(x, y) - M(x, y) \frac{\partial}{\partial y} z(x, y)} =$$

$$\frac{6y + 6y}{(2y^3 - y\,xy) - (3y^2 - x)(2y)} = \frac{-3}{x + y^2} = \frac{-3}{z}$$

de tal forma que

$$\mu(z) = e^{\int -\frac{3}{z} dz} = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{(x + y^2)^3}$$

es un factor de integración de la ecuación dada.

En efecto, la ecuación

$$\frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3} dx + \frac{2y^3 - 6xy}{(x + y^2)^3} dy = 0$$

es exacta, pues

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3} \right) = \frac{12y(x - y^2)}{(x + y^2)^4} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y^3 - 6xy}{(x + y^2)^3} \right)$$

El lector podrá obtener sin dificultad la solución general siguiente

$$(x + y^2)^2 C = x - y^2$$

Ejemplo 6

Estudie la ecuación lineal de primer orden no homogénea desde el punto de vista de ecuaciones exactas.

Solución

Tenemos la ecuación lineal no homogénea

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

o

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0$$

Entonces

$$M(x, y) = P(x)y - Q(x)$$

$$N(x, y) = 1$$

Evidentemente esta ecuación no es exacta, pero

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)}{N(x, y)} = P(x)$$

por lo que

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

será un factor de integración de nuestra ecuación.

En efecto

$$\left[e^{\int P(x)\,dx} P(x)\,y - e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\right] dx +$$

$$+ \; e^{\int P(x)\,dx}\,dy = 0$$

es una ecuación exacta, pues

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\int P(x)\,dx} P(x)\,y - e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\right] = P(x)\,e^{\int P(x)\,dx} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\, e^{\int P(x)\,dx}$$

Entonces. buscamos una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\int P(x)\,dx} P(x)y - e^{\int P(x)\,dx} Q(x)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\int P(x)\,dx}$$

Comencemos usando esta última condición y proponiendo $f(x, y)$ como

$$f(x, y) = \int e^{\int P(x)\,dx}\,dy + h(x)$$

$$= y\,e^{\int P(x)\,dx} + h(x)$$

Derivando respecto de x obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\int P(x)\,dx}\,P(x)\,y + h'(x)$$

Según la primera condición tenemos

$$e^{\int P(x)\,dx}\,P(x)\,y + h'(x) = e^{\int P(x)\,dx}\,P(x)y - e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)$$

por lo que

$$h(x) = -\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

y entonces la solución general de la ecuación lineal dada es

$$y\,e^{\int P(x)\,dx} - \int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx = C$$

o

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + C\,e^{-\int P(x)dx}$$

fórmula que ya habíamos obtenido anteriormente.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 2. SECCIÓN 4)

En los ejercicios del 1 al 20 resuelva las ecuaciones

1. $(2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$
2. $[y\,(x^2 + y^2) + 2x]\,dx + \left[\frac{1}{3}\,x\,(x^2 + 9x^2) + 2y\right]dy = 0$
3. $(x^2 - ay)\,dx + (y^2 - ax)\,dy = 0$
4. $\operatorname{sen} y\,dx + (x \cos y + \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

5. $(\cos xy - \operatorname{sen} xy)\,(y\,dx + x\,dy) = 0$

6. $(\sqrt{1-(xy)^2} - \sqrt{1-(x+y)^2})\,dx -$

$$- (\sqrt{1-(x-y)^2} + \sqrt{1-(x+y)^2})\,dy = 0$$

7. $x^{m-1}\,y^{n-1}\,(my\,dx + nx\,dy) = 0$

8. $\dfrac{1}{y^2}\,(y\,dx - x\,dy) = 0$

9. $e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy) = 0$

10. $xy\,[(2y^3 - 3xy^2 + 4x^2y)\,dx + (4y^2x - 3yx^2 + 2x^3)\,dy] = 0$

11. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}} = 0$

12. $xy^{y-1}\,dx + x^y\,ln\,x\,dy = 0$

13. $\left(\dfrac{1}{y}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} +\right.$

$$\left. + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$$

14. $\left(3x^2\tan y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

15. $\{n\cos(nx + my) - m\operatorname{sen}(mx + ny)\}\,dx +$

$$+ \{m\cos(nx + my) - n\operatorname{sen}(mx + ny)\}\,dy = 0$$

16. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)\,(1 - x^2 - y^2)}} + \left(\dfrac{1}{y\sqrt{y^2 - x^2}} + \dfrac{e^{x/y}}{y^2}\right)(ydx - xdy) = 0$

17. $\dfrac{2}{1 + (x^2 + y^2)^2}\,(xdx + ydy) + xdy + ydx = 0$

18. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\,x^{y-1}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x^y\,ln\,x\right)dy = 0$

19. $\left(yx^{y-1}\,ln\,y + \dfrac{1}{xlnx}\right)dx + \left(\dfrac{x^y}{y} + x^y\,lnx\,lny\right)dy = 0$

20. $(\operatorname{sen} 2x)\left(\dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx - (\operatorname{sen} 2y)\,ln\,\operatorname{sen}^2 x\,dy = 0$

21. Demostrar que toda ecuación de variables separables es (trivialmente) una ecuación exacta.

En los ejercicios del 22 al 31 resuelva las ecuaciones dadas encontrando un factor de integración que las haga exactas.

22. $(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0$

23. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

24. $y(2x - y + 1)\,dx + x(3x - 4y + 3)\,dy = 0$

25. $y(2x^2 - xy + 1)\,dx + (x - y)\,dy = 0$

26. $(4xy^2 + 3y + 10x^2)\,dx + (2yx^2 + x)\,dy = 0$

27. $(y^3 + 2xy)\,dx + (6y^2x + 4x^2)\,dy = 0$

28. $(3xy + 4y + 4x^2y^4)\,dx + (2x^2 + 4x + 5x^3y^3)\,dy = 0$

Sugerencia: $\mu = \mu\,(xy)$.

29. $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$

Sugerencia: $\mu = \mu\,(x^2 + y^2)$

30. $xdx + ydy + (x^2 + y^2)\,dx = 0$

Sugerencia: $\mu = \mu\,(x^2 + y^2)$

31. Resolver la ecuación de Bernoulli

$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad n \neq 0, 1$

hallando primeramente un factor de integración y resolviendo luego como ecuación exacta.

32. ¿Bajo qué condiciones la ecuación

$M(x, y)\,dx + N\,(x, y)\,dy = 0$

posee un factor de integración del tipo

a) $\mu = \mu\,(xy)$
b) $\mu = \mu\,(x + y)$
c) $\mu = \mu\,(x^2 + y^2)$
d) $\mu = \mu\,(y/x)$?

33. Demostrar que la ecuación diferencial

$x^py^q\,(\alpha ydx + \beta xdy) + x^ry^s\,(\gamma ydx + \delta xdy) = 0$

donde $p, q, r, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes dadas, posee un factor de integración de la forma $x^a\,y^b$ donde a y b se escogen convenientemente.

34. Resuelva las ecuaciones

a) $(x^2y + 2y^4)\,dx + (x^3 + 3xy^3)\,dy = 0$

b) $(2ydx - xdy) + (xy^3\,dx - 2x^2y^2\,dy) = 0$

c) $\left(xdx + \dfrac{3x^2}{y}\,dy\right) + 2x^3y^2dx - 5x^4\,ydy = 0$

35. Demuestre que si $xM(x, y) + yN(x, y) \not\equiv 0$, entonces $(xM(x, y) + yN(x, y))^{-1}$ es un factor de integración para la ecuación homogénea $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$. Estudie el caso en que $xM(x, y) + yN(x, y) \equiv 0$.
Sugerencia: use el teorema de Euler para funciones homogéneas (ver ejercicios 5 y 6 de la sección 2 de este capítulo).
36. Resuelva las siguientes ecuaciones hallando primeramente un factor de integración e integrando luego la diferencial exacta.

a) $y^3\, dx + (x^2y + xy^2 + x^3)\, dy = 0$

b) $(x^2 + y^2)\, dx + 5xy\, dy = 0$

c) $x(5x + 2y)\, dx + y\,(3x - 2y)\, dy = 0$

37. Demuestre que si $xM(x, y) - yN(x, y) \not\equiv 0$, entonces $(xM(x, y) - yN(x, y))^{-1}$ es un factor de integración para la ecuación $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = xf_1\,(xy)dx + f_2(xy)dy = 0$, donde f_1 y f_2 son funciones dadas de xy. Estudie el caso en que $xM(x, y) - yN(x, y) \equiv 0$.

38. Resuelva las ecuaciones

a) $(xy^2 + 2y)dx + (x^2y - 2x)\, dy = 0$

b) $y \operatorname{sen} xy\, dx + x\, dy = 0$

c) $y(xy + 1)^2\, dx + x(xy - 1)^2\, dy = 0.$

5. ECUACIONES EXACTAS DESDE UN PUNTO DE VISTA AVANZADO (UN POCO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO)

En la sección 4 de este capítulo estudiamos las ecuaciones diferenciales exactas. Como siempre, y siguiendo nuestro espíritu poco riguroso de exposición, hemos evitado ser ''detallistas'', tanto en las definiciones establecidas ahí como en el teorema que en esa sección fue enunciado y demostrado.

Por ejemplo, retomemos la primera definición que en esa sección aparece. Se dijo que la ecuación diferencial

$$M(x,y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

era exacta si existe una función $f(x,y)$ con la propiedad de que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Observando esta definición desde un punto de vista más crítico, vemos que existen varias preguntas que pueden surgir y que la definición misma no contesta:

1. ¿Dónde están definidas M y N? ¿Su dominio de definición es el mismo?
2. ¿Dónde está definida la función f?
3. Según la definición dada, la función f debe poseer derivadas parciales (¿dónde?). ¿Será esto suficiente o habrá que pedirle más a esta función (por ejemplo, diferenciabilidad)*?

En esta sección se pretende hacer un poco de teoría ''detallista'' (rigurosa) de las ecuaciones diferenciales exactas. En realidad durante el desarrollo de la teoría que se expondrá se estarán pisando los terrenos del análisis matemático (integración de formas diferenciales de grado uno, o bien, integrales curvilíneas); lo cual no debe sorprendernos demasiado, pues la teoría de las ecuaciones diferenciales puede verse contenida naturalmente dentro del estudio del análisis (en un sentido amplio). Se debe advertir que, aunque se irá construyendo la teoría de una manera rigurosa, las pretensiones no son demasiado ambiciosas, pues el ''resultado cumbre'' al que se pretende llegar (5.8) no será demostrado en toda su generalidad, pues para lograr esto tendríamos que involucrarnos en discusiones bastante profundas sobre ciertos temas de topología, que caen fuera del objetivo central de esta parte, el cual es (explicitándolo) involucrar al lector con ''espíritu matemático'' en un estudio de algo así como ''ecuaciones exactas desde un punto de vista avanzado''. Para esto se usarán solamente algunos conocimientos de cálculo (riguroso) que pueden aprenderse en cualquiera de los cursos de los primeros semestres de matemáticas en una licenciatura técnica (aunque por otra parte se advierte también que los requisitos previos para estudiar esta sección son de hecho más rigurosos de los que se habían pedido hasta este momento, pues, como ya se dijo, se hace necesario tener algunos conocimientos de cálculo *riguroso* para poder acompañar la teoría que será desarrollada aquí).

Un primer paso que debemos dar en este estudio es *definir con precisión* lo que debemos entender por ''ecuación diferencial exacta''

Definición (1)

Sean M y N funciones reales definidas en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Decimos que la ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

---

* Recuerde que para una función de dos variables la existencia de las derivadas parciales (en un punto) no implica diferenciabilidad de la función (en ese punto), por ejemplo, la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/x^2 + y^2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tiene derivadas parciales (iguales a cero) en el origen, pero ahí esa función no es diferenciable.

es *exacta* si existe una función f: U → ℛ diferenciable tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Aparentemente esto no es más que una manera nueva de decir lo mismo que ya se había mencionado en la sección 4. Sin embargo, veremos que aceptar esta definición nos conducirá a reconstruir la teoría desarrollada en esa sección.

5.1 Nuestro contraejemplo

Para ver que en la definición (1) se está diciendo *mucho más* de lo que se dijo en su símil de la sección 4, consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = 0 \qquad \text{- - - - } (\mathbf{i})$$

En este caso M y N son funciones reales definidas en el abierto $ℛ^2 - \{0\}$ dadas por

$$M(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$N(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

En el teorema visto en la sección 4 se caracterizó a las ecuaciones exactas diciendo que para la exactitud de una ecuación del tipo $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dx = 0$ era necesario y *suficiente* que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

En nuestro ejemplo tendríamos que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

por lo que, a la luz del teorema citado, la ecuación (**i**) sería exacta.

Entonces, según la definición (1) debería existir una función f: $ℛ^2 - \{0\}$ → ℛ diferenciable, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \text{. . . . } (\mathbf{J})$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{. . . . } (\mathbf{K})$$

Pero . . . ¡esta función no existe! En realidad la situación es mucho más dramática, pues veremos que no existe ninguna función f: $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ *continua* con tales características.

Veamos primeramente que en el caso de que esta función existiera, tendría que ser una *función ángulo*, es decir, una función que a cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ asocia el valor del ángulo que forma el radio vector asociado a este punto con la parte positiva del eje de las abscisas.

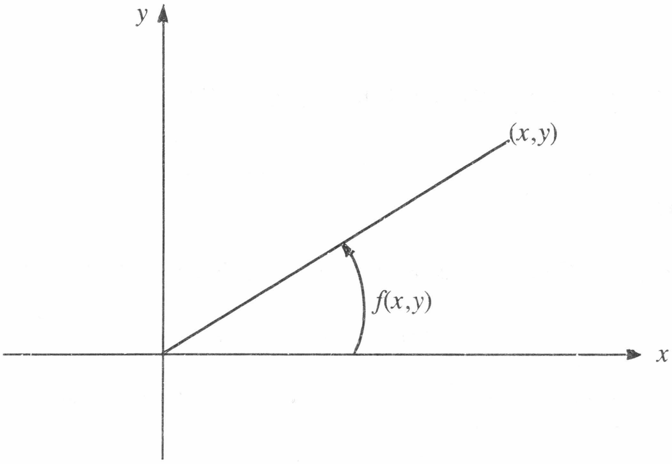


Figura 2. Función ángulo f: $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$.

En efecto, siendo f una función ángulo, tendríamos que

$$\cos f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{- - - - (L)}$$

$$\operatorname{sen} f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{- - - - (M)}$$

Derivando (**M**) respecto de x obtenemos que

$$\cos f(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Usando (**L**) obtenemos que, si $x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Similarmente, derivando (**L**) respecto de y y usando (**M**), obtenemos que si $y \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Por lo tanto, si $(x,y) \neq (0,0)$ la función f: $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ caracterizada por (**L**) y (**M**) satisface (**J**) y (**K**), i.e. $f(x,y) = C$ sería la solución a la ecuación (**i**).

Proposición

No existe función ángulo *continua* f: $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$.

Demostración

Suponga que existe. En tal caso consideramos la función g: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dada por

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Ciertamente g es una función continua (y diferenciable), pues sus funciones componentes $t \to \cos t$, y $t \to \operatorname{sen} t$ lo son.
Hagamos la compuesta $f_\circ g$: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}$.

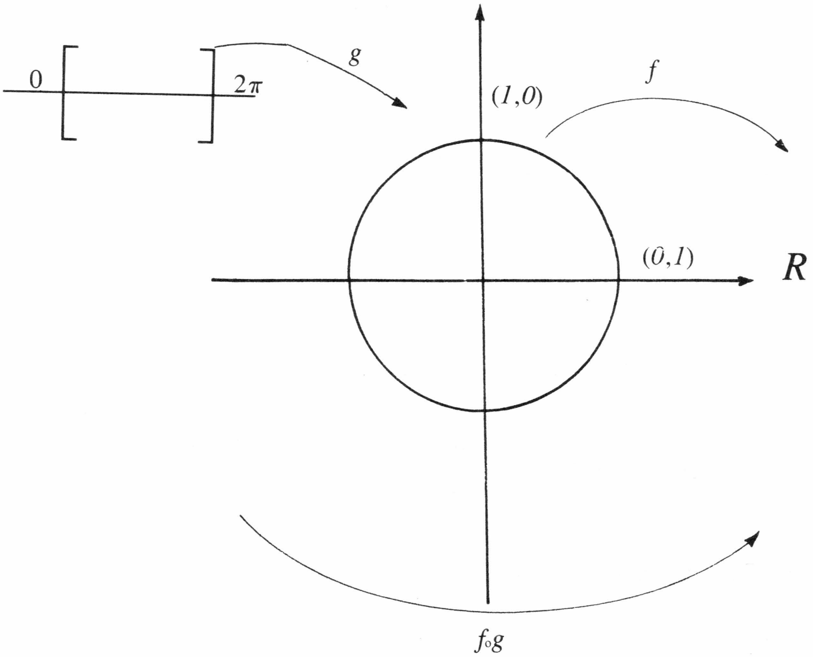


Figura 3. Composición de la función ángulo f con la función g.

Como estamos suponiendo que f es continua, la compuesta $f_\circ g$ también lo será (compuesta de continuas es continua). Esta función $f_\circ g$ estaría caracterizada por

$$\cos\,(f_\circ g)\,(t) = \cos t$$

$$\operatorname{sen}\,(f_\circ g)\,(t) = \operatorname{sen} t$$

Observe que la restricción de $f_\circ g$ al abierto $(0,2\,\pi)$ es diferenciable, puesto que $(f_\circ g)\,(t) = t \quad \forall t \in (0,2\pi)$.

Además observe que

$$\cos\,(f_\circ g)\,(0) = \cos 0 = \cos 2\pi = \cos\,(f_\circ g)\,(2\pi)$$

$$\operatorname{sen}\,(f_\circ g)\,(0) = \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen}\,(f_\circ g)\,(2\pi)$$

por lo que $(f_\circ g)\,(0) = (f_\circ g)\,(2\pi)$ (ambas valen cero).

Tenemos, pues, la función $f_\circ g\colon [0,2\,\pi] \to \mathcal{R}$ continua con $f_\circ g\,|_{(0,2\pi)}$ diferenciable y tal que $(f_\circ g)\,(0) = (f_\circ g)\,(2\pi)$.

Según el teorema de Rolle debe existir $t_0 \in (0,2\,\pi)$ tal que $(f_\circ g)'\,(t_0) = 0$

Pero

$$(f_\circ g)'\,(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(g(t))\,\frac{d}{dt}\,(\cos t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\,(g(t))\,\frac{d}{dt}\,(\operatorname{sen} t) = 1 \qquad \forall t \in (0,2\pi)$$

lo cual es una contradicción. **Q.E.D.**

Hemos llegado a la conclusión de que en realidad *no es suficiente* que se cumpla $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para garantizar la exactitud (con la definición de exactitud dada en esta sección) de la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

Acontece que tendremos que pedir algo más que la igualdad $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para poder concluir que la ecuación es exacta.

Este ''algo más'' tiene que ver con la estructura topológica en donde están definidas M y N (y por lo tanto f), y que será estudiada más tarde.

Reflexionando un poco, este hecho en realidad no es tan extraño como parece. La propiedad de que en una ecuación se tenga $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ está expresada en términos de derivadas parciales, las cuales dan una información *local* de tales funciones (y por lo tanto de la ecuación diferencial). Sin embargo, la propiedad de exactitud de una ecuación es una propiedad *global* (''. . . existe una función $f\colon U \to \mathcal{R}$ diferenciable tal que. . .'').

Por lo tanto, el hecho de que una ecuación satisfaga cierta propiedad local no tiene por qué garantizarnos el cumplimiento de una propiedad global como lo es la exactitud. Nuestro siguiente paso será dar una caracterización de las ecuaciones exactas, pues vimos ya que aquélla dada en el teorema de la sección 4 no es del todo correcta (la condición no es suficiente). Es decir, queremos hallar alguna condición que *nos permita concluir* que la ecuación sea exacta. Antes de esto tendremos que recordar algo sobre integrales curvilíneas.

5.2 Formas diferenciales. Integrales curvilíneas

Introduciremos el concepto de "forma diferencial" con la única intención de facilitarnos la comprensión de este tema y los subsiguientes.

Diremos que una expresión del tipo

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy$$

es una *forma diferencial* de grado 1 (en las variables x y y) definida en el abierto U de $\mathbb{R}^2$, en donde están definidas las funciones M y N. Usaremos la notación $\omega(x,y)$ para denotar tal forma.

Es claro entonces que dada la ecuación diferencial

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$$

podemos pensar en su *forma diferencial asociada*

$$\omega(x,y) = M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy$$

Recíprocamente, dada una forma diferencial $\omega(x,y)$ podemos asociar a ésta la ecuación diferencial $\omega(x,y) = 0$.

En realidad una definición más apropiada de lo que es una forma diferencial de grado 1 definida en el abierto U de $\mathbb{R}^2$ es como una función del tipo ω: $U \to (\mathbb{R})^*$, donde $(\mathbb{R}^2)^*$ denota el dual del espacio $\mathbb{R}^2$, en el cual se encuentran los funcionales lineales sobre $\mathbb{R}^2$ (definidos en U), que son expresiones del tipo $adx + bdy$, donde a y b son funciones (reales) definidas en U. En otras palabras, dar la forma ω: $U \to (\mathbb{R}^2)^*$, vista como función que a cada punto $x \in U$ le asocia un funcional lineal $\omega(x) \in (\mathbb{R}^2)^*$, equivale a dar un par de funciones reales a,b: $U \to \mathbb{R}$ tales que $\omega\ (x,y) = a\ dx + b\ dy$.

Diremos que la forma $\omega(x,y)$ es de clase C^k, si las funciones a,b tales que $\omega(x,y) = a\ dx + b\ dy$ son de clase C^k. Así por ejemplo, la ecuación diferencial (sen x y) dx + (cos xy) $dy = 0$ tiene una forma diferencial asociada $\omega(x,y) =$ (senxy) dx + (cos xy) dy de clase C^∞. (i.e. de clase C^k para todo $k \in N$).

Ya que la forma $\omega(x,y)$ es un tipo de función (definida en algún abierto U de $\mathbb{R}^2$ y tomando valores en $(\mathbb{R}^2)^*$), podemos pensar en la integral de esta forma sobre algún elemento de su dominio (así como es posible pensar en la integral de la función continua f: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en cualquier intervalo $J \subset I$). Los elementos sobre los cuales podremos integrar formas son *curvas* (*o caminos*) en U.

Vamos a recordar entonces el concepto de *curva* en $U \subset \mathbb{R}^2$.

A una función λ: $I \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^2$, definida en algún intervalo I de la recta (que podría ser toda la recta) y tomando valores en $U \subset \mathbb{R}^2$, se le llama *curva* o *camino*. Denotemos a I por [a,b] (con la aclaración de que I puede ser toda la recta).

Es claro entonces que dar un camino λ: $[a,b] \to U$ equivale a dar dos funciones reales x,y: $[a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ $\forall\ t \in [a,b]$. Diremos que el camino λ: $[a,b] \to U$ es de la clase C^k si las funciones x,y: $[a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ son de clase C^k.

Por ejemplo, el camino λ: $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es de clase C^∞, pues las funciones $t \to \cos t$, $t \to \operatorname{sen} t$ son de clase C^∞, mientras que el camino μ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mu(t) = (t, |t|)$ es de clase C^0 (esto quiere decir que es solamente continuo), pues aunque la función $t \to t$ es de clase C^∞, la función $t \to |t|$ es solamente continua.

Podemos ahora definir el concepto de integral de una forma (de grado 1 en las variables x,y) a lo largo de un camino.

Definición 2

Sea la forma continua ω: $U \to (\mathbb{R}^2)^*$ dada por $\omega(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$, y sea el camino de clase C^1 λ: $[a,b] \to U$ dado por $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ (lo anterior significa entonces, como ya se dijo anteriormente, que las funciones M, N: $U \to \mathbb{R}$ son continuas y que las funciones x,y: $[a,b] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1). Definimos la integral de la forma ω a lo largo del camino λ, la cual denotamos por $\int_\lambda \omega$ como

$$\int_\lambda \omega = \int_a^b [M(\lambda(t))\, x'(t) + N(\lambda(t))\, y'(t)\,]dt$$

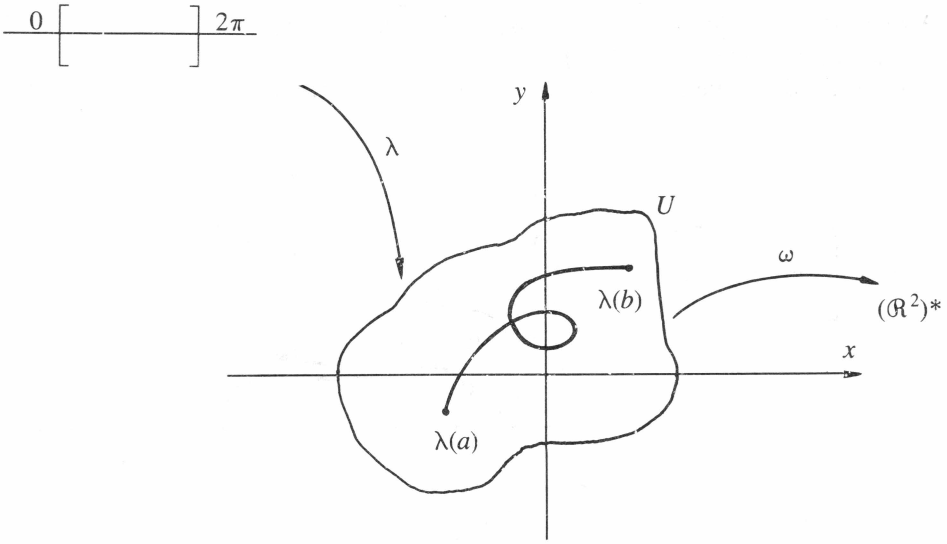


Figura 4. La integral $\int_\lambda \omega = \int_a^b [M(\lambda(t)\, x'(t) + N(\lambda(t))\, y'(t)]\, dt$.

Por ejemplo, consideremos la forma asociada a la ecuación diferencial del contraejemplo de la subsección anterior. Tenemos entonces que $\omega\colon \Re^2 - \{0\} \to (\Re^2)^*$ está dada por

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

Ciertamente las funciones M, N: $\Re^2 - \{0\} \to \Re$ dadas por

$$M(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad N(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

son continuas en $\Re^2 - \{0\}$.
Consideremos el camino $\lambda\colon [0, 2\pi] \to \Re^2 - \{0\}$ de clase C^1 (de hecho C^∞) dado por

$$\lambda(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$$

Entonces:

$$\int_\lambda \omega = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}(-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}(\cos t) \right] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Es importante mencionar un par de propiedades que posee la integral de una forma a lo largo de un camino.

Primeramente observamos que dado el camino $\lambda\colon [a,b] \to U$, podemos definir el camino $-\lambda\colon [a,b] \to U$ de la siguiente manera:

$$-\lambda(t) = \lambda(a + b - t)$$

Observe que el camino $-\lambda$ posee la propiedad siguiente:
$-\lambda(a) = \lambda(b)$ y $-\lambda(b) = \lambda(a)$. Además, es claro que $\lambda([a,b]) = -\lambda([a,b])$ (igualdad de conjuntos de puntos en el plano).

En realidad el camino $-\lambda$ es el mismo camino λ pero recorrido en sentido contrario.

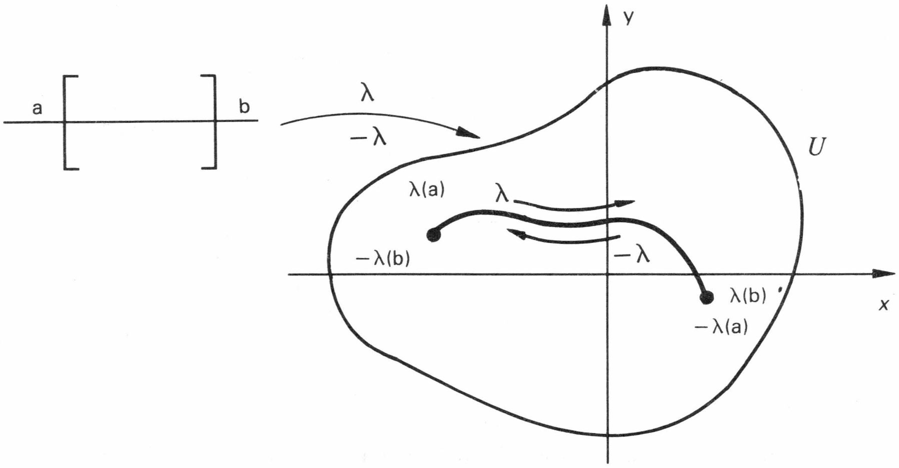


Figura 5. La trayectoria λ y su inversa − λ.

Es de esperarse que:

$$\int_{-\lambda} \omega = - \int_{\lambda} \omega$$

(análoga a la propiedad $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$).

En efecto

$$\int_{-\lambda} \omega = \int_a^b (M(-\lambda(t)) \quad \tilde{x}\,'(t) + N(-\lambda(t)) \quad \tilde{y}\,'(t))\, dt$$

donde $\tilde{x}$, $\tilde{y}$: $[a,b] \rightarrow \Re$ son tales que $-\lambda(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$.
Observe entonces que, por la manera como se definió $-\lambda$, tenemos que:

$\tilde{x}(t) = x(a + b - t)$, $\tilde{y}(t) = y(a + b - t)$, donde:

x,y: $[a,b] \rightarrow \Re$ son tales que $\lambda(t) = (x(t), y(t))$.

Entonces $\tilde{x}\,'(t) = - x'(a + b - t)$ y $\tilde{y}\,'(t) = -y'(a + b - t)$, por lo que:

$$\int_{-\lambda} \omega = \int_a^b [M(\lambda(a + b + t)) \, (-x'(a + b - t)) +$$

$$+N(\lambda(a + b - t)) \, (-y'(a + b - t))]\, dt$$

$$= - \int_a^b [M(\lambda(s)) \, x'\ (s) + N(\lambda(s)) \, y'\ (s)]\, ds$$

$$= - \int_{\lambda} \omega$$

Obteniendo así la propiedad deseada.

Por ejemplo, si consideramos el camino:

λ: $[0, 2\pi] \rightarrow \Re^2 - \{0\}$, $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, tenemos que

$-\lambda$; $[0, 2\pi] \rightarrow \Re^2 - \{0\}$, $-\lambda(t) = \lambda(2\pi - t) =$
$= (\cos(2\pi - t), \operatorname{sen}(2\pi - t)) = (\cos t, - \operatorname{sen} t)$, y si

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy, \text{ tenemos que}$$

$$\int_{-\lambda} \omega = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}(-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}(-\cos t)\right] dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

tal como tenía que ocurrir (pues ya habíamos calculado

$$\int_\lambda \omega = 2\pi).$$

Pasemos ahora a definir la "suma de caminos".

Dado un camino λ: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$, escribimos $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ y decimos que λ es la suma de los caminos λ_1 y λ_2 cuando para algún $c \in [a,b]$ se tenga que $\lambda_1 = \lambda \mid [a,c]$ y $\lambda_2 = \lambda \mid [c,b]$ (i.e. λ_1 y λ_2 son las restricciones del camino λ a los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente).

Observe entonces que para que tenga sentido sumar los caminos λ_1: $[a_1,b_1] \to \mathbb{R}^2$ y λ_2: $[a_2,b_2] \to \mathbb{R}^2$ es necesario (y suficiente) que $b_1 = a_2$ y que $\lambda_1(b_1) = \lambda_2(a_2)$.

Por ejemplo, si λ_1: $[0, \pi] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y λ_2: $[\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ son los caminos $\lambda_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) = \lambda_2(t)$, tenemos que $\lambda_1(\pi) = (-1,0) = \lambda_2(\pi)$, de modo que podemos pensar en la suma de λ_1 y λ_2, siendo éste el camino

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 - \{0\} \text{ dado por}$$

$$\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

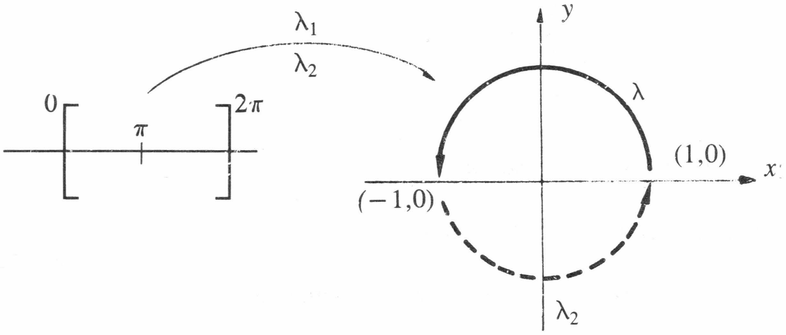


Figura 6. El camino λ:$[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ como suma de λ_1 y λ_2.

Por otra parte, dados los caminos λ_1: $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda_1(t) = (t, t^2)$ y λ_2: $[1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda_2(t) = (2t, t^2)$, no tiene sentido hablar de $\lambda_1 + \lambda_2$, pues $\lambda_1(1) = (1, 1)$ y $\lambda_2(1) = (2, 1) \neq \lambda_1(1)$.

Podemos extender la definición de suma de caminos de modo que podamos hablar de la suma de λ_1: $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, λ_2: $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con la única condición de que $\lambda_1(b) = \lambda_2(c)$, i.e. pidiendo sólo que "el punto en donde termina λ_1 sea el mismo en donde comienza λ_2", sin tener ya que $b = c$. Gráficamente tendríamos la siguiente situación.

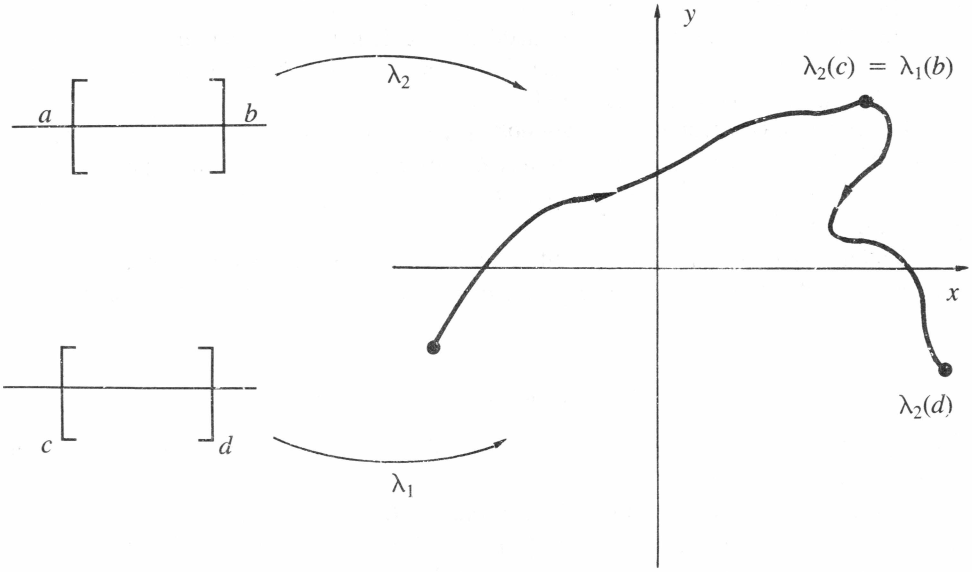


Figura 7. Suma de λ_1 y λ_2.

Para esto, fijemos un intervalo $[\alpha, \beta]$ y un punto $\gamma \in (\alpha, \beta)$ y consideremos los intervalos $[\alpha, \gamma]$ y $[\gamma, \beta]$.

Es posible hallar homeomorfismos (funciones continuas con inversas continuas) ϕ y ψ del tipo ϕ: $[a,b] \rightarrow [\alpha, \gamma]$ y ψ: $[c, d] \rightarrow [\gamma, \beta]$. Por ejemplo:

$$\phi(t) = \frac{\gamma - \alpha}{b - a}(t - a) + \alpha$$

$$\psi(t) = \frac{\beta - \gamma}{d - c}(t - c) + \gamma$$

donde ϕ^{-1}: $[\alpha, \gamma] \rightarrow [a, b]$ y ψ^{-1}: $[\gamma, \beta] \rightarrow [c, d]$ son

$$\phi^{-1}(t) = \frac{b - a}{\gamma - \alpha}(t - \alpha) + a$$

$$\psi^{-1}(t) = \frac{d - c}{\beta - \gamma}(t - \gamma) + c$$

Observe que $\lambda_1 \circ \phi^{-1}$: $[\alpha, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\lambda_2 \circ \psi^{-1}$: $[\gamma, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ son dos caminos en los cuales $\lambda_1 \circ \phi^{-1}(\gamma) = \lambda_1(\phi^{-1}(\gamma)) = \lambda_1(b) = \lambda_2(c) = \lambda_2(\psi^{-1}(\gamma)) = \lambda_2 \circ \psi^{-1}$

(γ), de modo que tiene sentido hablar de $\lambda_1 \circ \phi^{-1} + \lambda_2 \circ \psi^{-1}$. Defina entonces $\lambda_1 + \lambda_2$: $[\alpha, \beta] \to \Re^2$ como:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 \circ \phi^{-1} + \lambda_2 \circ \psi^{-1}.$$

En particular observe que dado un camino λ: $[a, b] \to \Re^2$, tiene sentido hablar (según la discusión anterior) del camino $\lambda + (-\lambda)$, pues, siendo el camino $-\lambda$: $[a, b] \to \Re^2$ dado por $-\lambda(t) = \lambda(a + b - t)$, tenemos $\lambda(b) = -\lambda(a)$.

Otra observación interesante que puede hacerse de la suma de caminos es la siguiente: si los caminos λ_1 y λ_2 son de clase C^1 y tiene sentido hablar del camino $\lambda_1 + \lambda_2$, este último no es necesariamente de clase C^1.

Por ejemplo, considerando los caminos λ_1: $[-1, 0] \to \Re^2$, $\lambda_1(t) = (t, -t)$ y λ_2: $[0, 1] \to \Re^2$, $\lambda_2(t) = (t, t)$, que son caminos C^1 (de hecho C^∞) tendremos que: $\lambda_1 + \lambda_2$: $[-1, 1] \to \Re^2$ está dado por $(\lambda_1 + \lambda_2)(t) = (t, |t|)$, que es apenas de clase C^0 (continuo).

Decimos que el camino λ: $[a, b] \to \Re^2$ es *seccionalmente de clase* C^k si existe una partición del intervalo $[a, b]$, digamos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, tal que:

$$\lambda \,|\, [t_{j-1}, t_j] | \text{ sea de clase } C^k, \; j = 1, \ldots, n.$$

Entonces, si λ_1 y λ_2 son caminos seccionalmente C^1 y tiene sentido hablar de $\lambda_1 + \lambda_2$, este último será seccionalmente C^1.

Consideremos la forma diferencial continua ω: $U \to (R^2)^*$ dada por $\omega(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, y sea el camino λ: $[a,b] \to U$ seccionalmente C^1. Podemos definir (de la manera más natural posible) la integral de ω a lo largo de λ como:

$$\int_\lambda \omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{\lambda | [t_{j-1}, t_j]} \omega$$

donde $\lambda | [t_{j-1}, t_j]$ es de clase C^1 (observe que los sumandos del lado derecho de esta última expresión se expusieron en la definición 2).

Sean entonces los caminos λ_1: $[a,b] \to U$ y λ_2: $[c,d] \to U$, de clase C^1, tales que $\lambda_1(b) = \lambda_2(c)$. Ya vimos que tiene sentido hablar del camino $\lambda_1 + \lambda_2$: $[\alpha, \beta] \to U$. Sea la forma continua ω: $U \to (\Re^2)^*$, $\omega(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dx$. Afirmamos que

$$\int_{\lambda_1 + \lambda_2} \omega = \int_{\lambda_1} \omega + \int_{\lambda_2} \omega$$

(similar a la propiedad $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx$).

En efecto, podemos suponer que $b = c$ (en caso contrario hacemos el homeomorfismo ϕ: $[a,b] \to [a,c]$, y consideramos el camino $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 \circ \phi^{-1}$), de modo que el camino $\lambda_1 + \lambda_2$: $[a,d] \to U$ queda descrito por

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(t) = \begin{cases} \lambda_1(t) & \text{si } t \in [a, c] \\ \lambda_2(t) & \text{si } t \in [c, d] \end{cases}$$

y entonces, si $\lambda_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ y $\lambda_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ nos queda

$$\int_{\lambda_1 + \lambda_2} \omega = \int_a^b [M(\lambda_1(t))x_1'(t) + N(\lambda_1(t))\, y_1'(t)]dt$$

$$+ \int_c^d [M(\lambda_2(t))\, x_2'(t) + N(\lambda_2(t))\, y_2'(t)]dt$$

$$= \int_{\lambda_1} \omega + \int_{\lambda_2} \omega$$

tal como queríamos ver.
De la discusión anterior se desprende inmediatamente que siendo λ cualquier camino (de clase C^1)

$$\int_{\lambda+(-\lambda)} \omega = \int_{\lambda} \omega + \int_{-\lambda} \omega = \int_{\lambda} \omega - \int_{\lambda} \omega = 0$$

para cualquier forma continua.

Por último diremos que el camino λ: $[a,b] \to \Re^2$ se dice ser *cerrado* si $\lambda(a) = \lambda(b)$. Obviamente, dado un camino cerrado, existen (infinidad de) caminos λ_1 y λ_2 tales que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. De hecho basta tomar $c \in (a,b)$ y definir λ_1: $[a,c] \to \Re^2$, λ_2: $[c,b] \to \Re^2$ como $\lambda_1(t) = \lambda(t)$ y $\lambda_2(t) = \lambda(t)$, de modo que obviamente $\lambda_1(c) = \lambda_2(c)$ y entonces tiene sentido hablar de $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$: $[a,b] \to \Re^2$.

5.3 Caracterización de ecuaciones exactas

Si tenemos la ecuación

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$$

donde M, N: $U \to \Re$ son funciones de clase C^1 (i.e. la forma ω: $U \to (\Re^2)^*$ dada por $\omega(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es de clase C^1), entonces, como ya se había visto, una condición necesaria para que esta ecuación sea exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

puesto que, siendo la ecuación exacta, existe una función f: $U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \cdot \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

En este caso f es C^2, puesto que M y N son C^1.

Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Teorema de Schwartz}}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que nos proponemos con el siguiente teorema es obtener condiciones *suficientes* para que tal ecuación sea exacta.

Teorema (1)

Sea la ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

donde M, N: $U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La ecuación es exacta.
2. La integral de la forma asociada a esta ecuación $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$, $\omega(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, a lo largo de cualquier camino λ: $[a,b] \rightarrow U$ seccionalmente C^1, depende solamente de las extremidades $\lambda(a)$ y $\lambda(b)$.
3. Para todo camino cerrado μ: $[a,b] \rightarrow U$ seccionalmente C^1, se tiene $\int_\mu \omega = 0$.

Demostración

Demostraremos que (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (2).

$$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$$

Como la ecuación es exacta, existe f: $U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Consideremos la forma asociada a la ecuación

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = df$$

donde df denota la diferencial total de la función f.

Entonces, si λ: $[a,b] \to U$, $\lambda(t) = (x(t) = y(t))$ es una curva de clase C^1, tendríamos que

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\lambda} df = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x} \lambda(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} (\lambda(t)) y'(t) \;\; dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \lambda)(t)\, dt =$$

$$= (f \circ \lambda)(b) - (f \circ \lambda)(\mathrm{a})$$

En el caso más general de tener una curva λ: $[a,b] \to U$, $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ seccionalmente C^1, consideramos la partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)\}$ tal que $\lambda|_{[t_i-1,\, t_i]}$ $i = 1, \ldots, n$ sea de clase C^1. Entonces

$$\int_{\lambda} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda\ [t_{i-1}, t_i]} \omega = \sum_{i=1}^{n} [(f \circ \lambda)(t_i) - (f \circ \lambda)(t_{i-1})]$$

$$= (f \circ \lambda)(b) - (f \circ \lambda)(a)$$

quedando entonces probado que (1) ⇒ (2)

(2) ⇒ (1)

Para simplificar la situación supondremos que el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto conexo ("U está constituido de un solo pedazo"). Usaremos un resultado que se prueba en topología, el cual establece que siendo $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo, entonces él es conexo por caminos, lo cual significa que dados $p, q \in U$, existe una función λ: $[a,b] \to U$ seccionalmente C^1, tal que $\lambda(a) = p$ y $\lambda(b) = q$ (intuitivamente podemos pensar que un conjunto es conexo por caminos si posee la propiedad de que dados dos puntos del conjunto siempre se consigue una curva seccionalmente suave que une a esos dos puntos y que queda completamente contenida en el conjunto).

Después de este preámbulo topológico pasemos a la demostración. Fijemos un punto $p \in U$. Entonces, siendo U conexo por caminos, para cada punto $q = (x,y) \in U$ existe una curva λ: $[a,b] \to U$ seccionalmente C^1 tal que $\lambda(a) = p$ y $\lambda(b) = $ q. Denotemos por λ_{pq} tal curva (que depende de q, pues p está fijo).

Sea f: $U \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \int_{\lambda_{pq}} \omega$$

Esta función está bien definida pues, por hipótesis, la integral $f(x,y)$ depende sólo de los extremos p (fijo) y q (argumento de f), y no de la curva λ_{pq}.

Vamos a demostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$. Con esto tendríamos de inmediato la diferenciabilidad de f, pues, por hipótesis, las funciones M y N son continuas *, y entonces la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)dy = 0$ será exacta.

Demostramos que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$.

Por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h,y) - f(x,y)}{h}$$

donde

$$f(x + h,y) = \int_{\lambda_{pq'}} \omega, \quad q' = (x + h,y)$$

$$f(x,y) = \int_{\lambda_{pq}} \omega, \quad q = (x,y)$$

Como obviamente $\lambda_{pq'} = \lambda_{pq} + \lambda_{qq'}$ tenemos que

$$\int_{\lambda_{pq'}} \omega = \int_{\lambda_{pq}} \omega + \int_{\lambda_{qq'}} \omega$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\lambda_{qq'}} \omega$$

Observe que $\lambda\colon [0,h] \to U$, $\lambda(t) = (x + t,y)$ es un camino del tipo $\lambda_{qq'}$, por lo que podemos usarlo para calcular

$$\int_{\lambda_{qq'}} \omega$$

---

* Si $f\colon U \to \mathcal{R}$, $U \subset \mathcal{R}^2$ es tal que las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}\colon U \to \mathcal{R}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}\colon U \to \mathcal{R}$ (existen y) son continuas, entonces f es diferenciable en U.

Entonces

$$\int_{\lambda_{qq'}} \omega = \int_0^h [M(x + t,y)\ (1) + N(x + t,y)\ (0)]\, dt$$

$$= \int_0^h M(x + t,y)\, dt$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h M(x + t,y)\, dt$$

Sea

$$\phi(s) = \int_0^s M(x + t,y)\, dt$$

Observe que

$$\phi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h M(x + t,y) dt =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Pero

$$\phi'(0) = \left(\frac{d}{ds} \int_0^s M(x + t,y)\, dt \right)_{S=0} = (M(x + s,y))_{S = 0} = M(x,y)$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$$

que era lo que queríamos probar.

La prueba de que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ es completamente análoga y se deja como ejercicio.

$(2) \Rightarrow (3)$

Sea $\mu\colon (a,b) \rightarrow U$ un camino seccionalmente C^1 cerrado.

Esto significa que $\mu(a) = \mu(b)$.

Sea $c \in (a,b)$, y considere los caminos $\lambda_1\colon [a,c] \rightarrow U$, $\lambda_2\colon [c,b] \rightarrow U$ dados por $\lambda_1(t) = \mu(t)$, $\lambda_2(t) = -\mu(t) = \mu(c+b-t)$.

Observe que λ_1 y λ_2 tienen las mismas extremidades, pues

$$\lambda_1(a) = \mu(a) = \mu(b) = -\mu(c) = \lambda_2(c) \quad \text{y}$$

$$\lambda_1(c) = \mu(c) = -\mu(b) = \lambda_2(b).$$

Además, $\mu = \lambda_1 + (-\lambda_2)$, i.e.

$$\mu(t) = \begin{cases} \lambda_1(t) \text{ si } t \in [a,c] \\ -\lambda_2(t) \text{ si } t \in [c,b] \end{cases}$$

Entonces

$$\int_\mu \omega = \int_{\lambda_1+(-\lambda_2)} \omega = \int_{\lambda_1} \omega + \int_{-\lambda_2} \omega = \int_{\lambda_1} \omega - \int_{\lambda_2} \omega$$

Pero λ_1 y λ_2 tienen las mismas extremidades, y como $\int_\lambda \omega$ sólo depende de éstas (y no de λ) tenemos que $\int_{\lambda_1} \omega = \int_{\lambda_2} \omega$; por lo que $\int_\mu \omega = 0$, quedando así probado que

$(2) \Rightarrow (3)$.

$(3) \Rightarrow (2)$.

Sea la curva $\lambda\colon [a,b] \rightarrow U$ seccionalmente C^1, y sea $\mu\colon [c,d] \rightarrow U$ cualquier otra curva (también seccionalmente C^1) tal que $\lambda(a) = \mu(c)$ y $\lambda(b) = \mu(d)$. Entonces $\rho = \lambda + (-\mu)$ es una curva cerrada y

$$0 = \int_\rho \omega = \int_{\lambda+(-\mu)} \omega = \int_\lambda \omega - \int_\mu \omega$$

por lo que

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega$$

quedando así completa la demostración del teorema.

Q.E.D.

Como una aplicación de este teorema vemos que la ecuación diferencial

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

no es exacta (lo cual ya habíamos comprobado antes directamente) pues, siendo λ: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ una curva cerrada (de clase C^∞) tenemos que

$$\int_{\lambda} \omega = 2\pi \neq 0.$$

5.4 Propiedad local de exactitud

En la subsección 5.3 hemos logrado dar condiciones suficientes para garantizar la exactitud de una ecuación. Se ha visto, pues, que si la ecuación

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

es tal que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, *no* podemos concluir que la ecuación es exacta, pues para que esto ocurra tendrá que cumplirse alguna de las condiciones (2) ó (3) de las que trata el teorema (1).

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿será que si para la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ se cumple que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ *no se puede concluir nada relacionado con la exactitud de tal ecuación*?

Ya habíamos visto que la condición $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ daba información local acerca de la ecuación.

Es natural esperar que de ella podamos concluir también alguna propiedad local. En efecto, se tiene el siguiente

Teorema (2)

Sea la ecuación

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

en donde $M, N: U \to \mathbb{R}^2$ son funciones de clase C^1 definidas en algún abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Si ocurre que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in U$$

entonces tal ecuación es *localmente exacta,* es decir, cada punto $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$ es centro de alguna bola $B((\tilde{x}, \tilde{y}), \epsilon_{(\tilde{x}, \tilde{y})}) = \{(x,y) \in U \| (x,y) - (\tilde{x}, \tilde{y} | < \epsilon_{(\tilde{x}, \tilde{y})}\}$ tal que, restringiendo el dominio de M y N a $B((\tilde{x}, \tilde{y}), \epsilon_{(\tilde{x}, \tilde{y})})$, la ecuación es entonces exacta (en la bola).

Demostración

Haremos la demostración suponiendo $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$. El caso general se obtiene de éste por una simple traslación. Queremos entonces ver que si restringimos el dominio de M y N a una bola de centro en el origen y radio ε (contenida en U), entonces la ecuación será exacta. Sea B tal bola.

Definimos $f: B \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 (M(tx, ty)\, x + N(tx, ty)\, y)\, dt \\ &= \int_\lambda \omega \end{aligned}$$

donde $\omega = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$, y $\lambda: [0,1] \to B$ dado por $\lambda(t) = (tx, ty)$

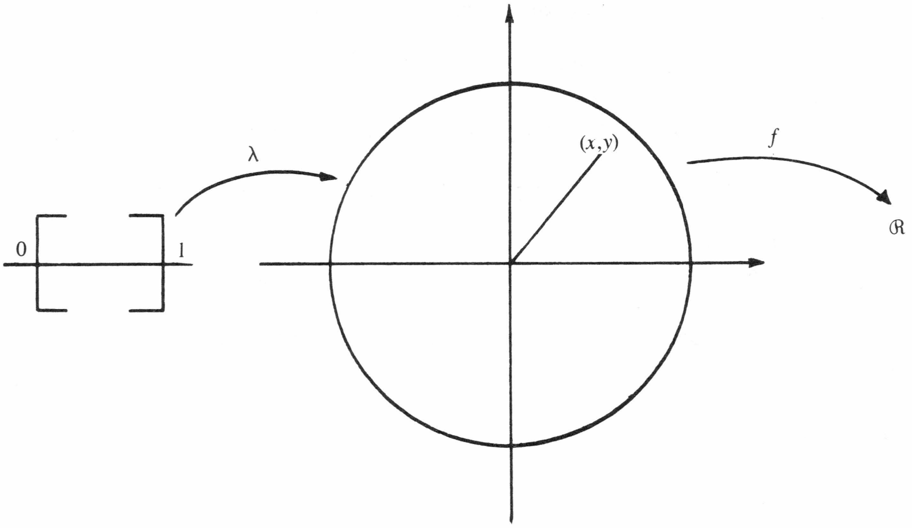


Figura 8. La función f (x,y).

Vamos a probar que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, i.e. que la ecuación es exacta en B.

Por la regla de Leibniz tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 (M(tx,ty)\,x + N(tx,ty)y)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\partial M}{\partial x}(tx,ty)tx + \frac{\partial N}{\partial x}(tx,ty)ty + M(tx,ty)\right] dt$$

Usando nuestra hipótesis nos queda

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \left[\frac{\partial M}{\partial x}(tx,ty)tx + \frac{\partial M}{\partial y}(tx,ty)ty + M(tx,ty)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial M}{\partial y}(tx,ty)y\right)t + M(tx,ty)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\Big(M(tx,ty)\Big)\,t + M(tx,ty)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(M(tx,ty)t)\,dt$$

$$= M(x,y)$$

Similarmente se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$.

Q.E.D.

Como un corolario inmediato del teorema anterior tenemos que si M y N son funciones definidas en una bola o en todo $\mathbb{R}^2$ y son tales que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es exacta.

5.5 Homotopía. Conjuntos simplemente conexos

Resumamos los resultados que hasta este momento hemos obtenido.

Hemos establecido una definición rigurosa de exactitud de una ecuación. Con ella hemos visto que si la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ tiene la propiedad $\frac{\partial M}{\partial y} =$

$\dfrac{\partial N}{\partial x}$, ésta no es suficiente para concluir exactitud. También, hemos logrado caracterizar las ecuaciones exactas usando para ello integrales curvilíneas.

El desarrollo mismo de esta teoría nos hace pensar que si añadimos a la hipótesis $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ alguna otra propiedad, podríamos entonces concluir exactitud de la ecuación. Esta propiedad debe de estar relacionada de alguna manera con la estructura topológica del dominio de M y N. Por ejemplo, vimos que si el dominio era una bola o todo $\mathbb{R}^2$, con la condición $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ podíamos concluir exactitud.

Lo que pretendemos ahora es llegar a concretar ese ''ingrediente topológico'' del dominio de M y N que nos permita, junto con la condición de la igualdad de las derivadas parciales, concluir que la ecuación es exacta.

Introduzcamos ahora el concepto de homotopía, que nos ayudará a conseguir nuestro objetivo.

Sean η, ν: $[a,b] \rightarrow D$ dos curvas, tales que $\eta(a) = \nu(a)$ y $\eta(b) = \nu(b)$ (i.e. los extremos son de η y ν son los mismos).

Diremos que estas curvas son *homotópicas* si existe una función continua del tipo

$$H\colon [a,b] \times [0,1] \rightarrow D$$

tal que

$$H(s,0) = \eta(s)$$

$$H(s,1) = \nu(s)$$

$$H(a,t) = \eta(a) = \nu(a)$$

$$H(b,t) = \eta(b) = \nu(b)$$

para todo $s \in [a,b]$ y para todo $t \in [0,1]$.

Imaginemos que t es el tiempo. La condición $H(s,0) = \eta(s)$ dice que a $t = 0$, la función H aplica hacia $\eta(s)$ mientras s recorre de a hasta b, (i.e. mientras t sea cero, H estará sobre $\eta(s)$ para todo $s \in [a,b]$). Similarmente, la condición $H(s,1) = \nu(s)$, dice que a $t = 1$, la función H aplica hacia $\nu(s)$ con $s \in [a,b]$. Ahora, la condición $H(s,t) = \eta(a) = \nu(a)$, dice que mientras $s = a$, independientemente del tiempo t, H va a aplicar al punto $\eta(a) = \nu(a)$; y por último, la condición $H(b,t) = \eta(b) = \nu(b)$ dice que para cualquier tiempo t, si $s = b$, la función H va a aplicar al punto $\eta(b) = \nu(b)$.

Entonces podemos interpretar una homotopía entre las curvas η y ν como una *deformación continua* de camino η al camino ν (o viceversa*), quedando fijas las extremidades de éstos (que, por hipótesis, coinciden).

---

* En realidad puede verificarse que la relación de homotopía entre curvas es una relación de equivalencia, es decir, toda curva es homotópica a sí misma; si η es homotópica a ν entonces ν es homotópica a η; y, por último,

El siguiente esquema nos ayudará a comprender esta idea.

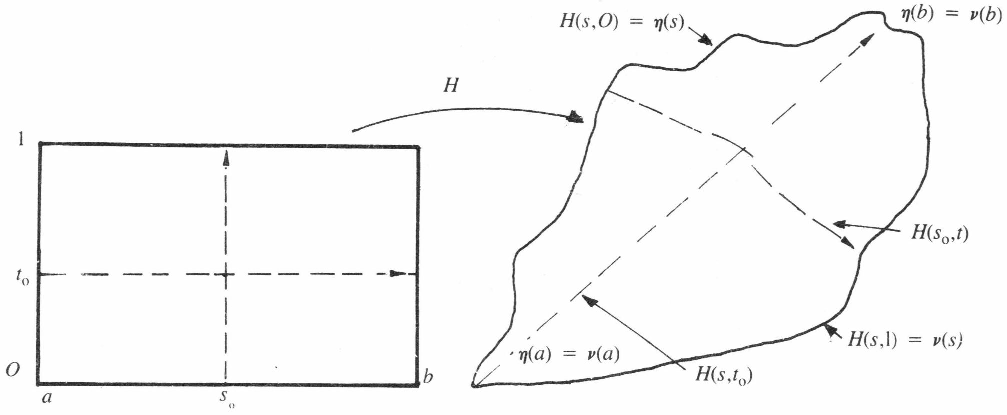


Figura 9. Homotopía entre las curvas η y ν.

Así, por ejemplo, las curvas

$$\eta,\ \nu\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$$

dadas por

$$\eta(s) = (s,\ 3\pi^4 \operatorname{sen} s)$$

$$\nu(s) = (s, s^4 - 8\pi s^3 + 22\pi^2 s^2 - 24\pi^3 s)$$

son homotópicas.

En efecto, $H\colon [0,4\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$H(s,t) = (s, (3\pi^4 \operatorname{sen} s)t + (1 - t)(s^4 - 8\pi s^3 + 22\pi^2 s^2 - 24\pi^3 s))$$

es una homotopía entre estas curvas.

En la siguiente gráfica se han "retratado" varias curvas correspondientes al proceso de deformación continua de ν a η, correspondientes a los tiempos $t = 0.1, 0.2, \ldots\ldots, 0.9$.

---

si η es homotópica a ν y ν es homotópica a μ, entonces η es homotópica a μ. Podemos entonces hablar de la "homotopía entre η y ν" sin temor a confusión.

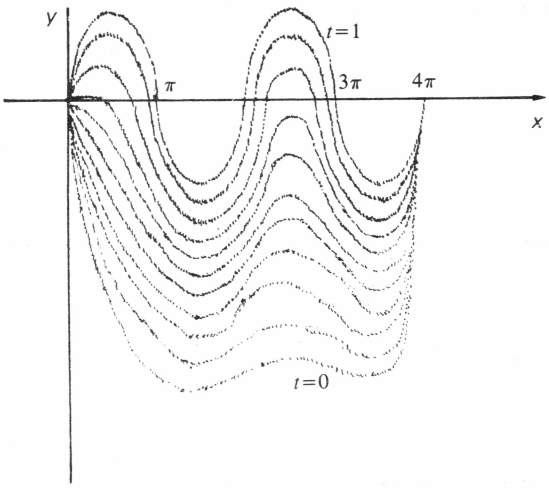


Figura 10. Deformación continua de ν a η.

Más generalmente, si η, ν: $[a,b] \to D$ son dos curvas con las mismas extremidades definidas en el intervalo $[a,b]$ y tomando valores en el conjunto *convexo** - $D \subset R^2$, entonces la función H: $[a,b] \times [0,1] \to D$, $H(s,t) = t\,\eta(s) + (1+t)\,\nu(s)$ es una homotopía entre η y ν.

Observe la importancia que tiene el conjuto D, en donde están dibujadas las curvas para que ellas puedan ser homotópicas. Por ejemplo, si el conjunto D es convexo, vimos que esto era suficiente (¡no necesario!) para que cualesquiera dos curvas tomando valores en D fuesen homotópicas.

Así, las curvas η, ν:$[-2,2] \to D$, $\eta(s) = (s, \frac{1}{2}s^2 - 2)$, $\nu(s) = (s, -\frac{1}{2}s^2 + 2)$, en donde D es el conjunto $\{ (x,y) \in R^2 |\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \}$ no son homotópicas, puesto que no es posible pasar de η a ν por deformación continua de η: en algún momento η tendría que "romperse" para poder llegar a ser ν.

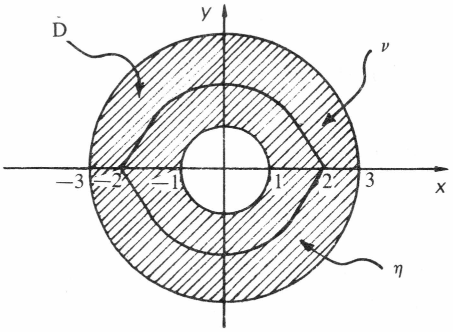


Figura 11. Las curvas η y ν no son homotópicas en D.

---

* $D \subset \Re^2$ es un conjunto convexo si dados cualesquiera dos puntos p, $q \in D$, se tiene que $tp + (1 - t)\,q \in D\ \forall t \in [0,1]$. Es decir, D es convexo si el segmento que une a cualesquiera dos puntos de él queda siempre contenido en D. Por ejemplo, una bola (cerrada o abierta) es un conjunto convexo (¡pruébelo!), así como el espacio $\Re^n$ también lo es.

En realidad el concepto de homotopía es un concepto que sirve para "detectar hoyos en un conjunto".

Para lo que sigue estaremos interesados en "conjuntos sin hoyos".

Definición

Decimos que el conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto *simplemente conexo* si él es conexo y para cualesquier dos puntos $p, q \in U$, y cualesquiera dos curvas $\lambda, \mu: [a,b] \rightarrow U$ tales que $\lambda(a) = \mu(a) = p$, $\lambda(b) = \mu(b) = q$, éstas son homotópicas.

Así pues, todo conjunto convexo es simplemente conexo mientras que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ no es simplemente conexo.

Las siguientes dos subsecciones (5.6 y 5.7) se ocupan de establecer un par de resultados técnicos que nos servirán de herramienta para poder dar una prueba de nuestro pretendido resultado que estudiaremos en 5.8.

5.6 El teorema de Green en un rectángulo

Mostraremos ahora un resultado que aparece en el estudio de las integrales curvilíneas (en realidad un caso particular de él) que se conoce como Teorema de Green.

Teorema (3)

Sean $f,g: U \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 definidas en el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, el cual contiene al rectángulo $R = [A,B] \times [C,D]$. Si ∂R denota al bordo del rectángulo R, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces

$$\int_R \int \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial R} g\, dx + f\, dy$$

donde la integral del lado derecho denota la integral curvilínea de la forma $\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ de clase C^1 $\omega(x,y) = g\, dx + f\, dy$, a lo largo de ∂R.

Demostración

Sea $\partial R = \sum_{i=1}^{4} \partial R_i$ como se muestra en la figura.

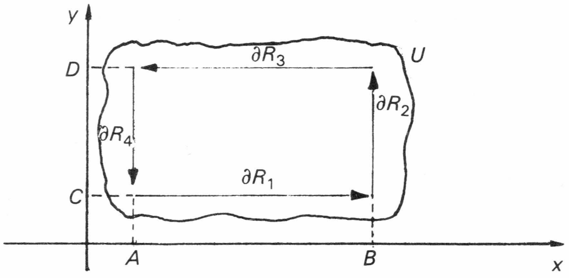


Figura 12. El camino $\partial R = \partial R_1 + \partial R_2 + \partial R_3 + \partial R_4$.

Existen funciones x, y: $[a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 (de hecho C^∞), tales que $x(a) = A$, $x(b) = B$, $y(a) = C$, y $y(b) = D$. Tenemos que, según el teorema de integración repetida,

$$\int_R \int \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dy = \int_C^D \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dy$$

Pero

$$\begin{aligned}
\int_C^D \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dy &= \int_C^D [f(B, y) - f(A, y)] \, dy \\
&= \int_C^D f(B, y) \, dy - \int_C^D f(A, y) \, dy = \\
&= \int_a^b f(B, y(t)) \, y'(t) \, dt - \int_a^b f(A, y(t)) \, y'(t) \, dt \\
&= \int_a^b f(B, y(t)) \, y'(t) \, dt + \int_b^a f(A, y(t)) \, y'(t) \, dt \\
&= \int_{\partial R_2} \omega + \int_{\partial R_4} \omega
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\int_R \int \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy &= \int_A^B \int_C^D \frac{\partial g}{\partial y} \, dy \, dx \\
&= \int_A^B [g(x, D) - g(x, C)] \, dx \\
&= \int_a^b [g(x(t), D) - g(x(t), C)] \, x'(t) \, dt \\
&= - \int_b^a g(x(t), D) \, x'(t) \, dt - \int_a^b g(x(t), C) \, x'(t) \, dt \\
&= - \int_{\partial R_3} \omega - \int_{\partial R_1} \omega
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_R \int \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \, dy = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} \omega = \int_{\sum_{i=1}^{4} \partial R_i} \omega = \int_{\partial R} \omega$$

Q.E.D.

5.7 Formas diferenciales inducidas

Consideremos una forma diferencial ω: $V \to (\mathcal{R}^2)^*$ de clase C^1 definida en el abierto $V \subset \mathcal{R}^2$.

Sea F: $U \to V$ una función de clase C^2 definida en el abierto $U \subset \mathcal{R}^2$. Veamos cómo F induce una forma diferencial de clase C^1 definida en U.

Sea $\omega = M\,dx + N\,dy$, con M, N: $V \to \mathcal{R}$ funciones de clase C^1, y $F = (\phi_1, \phi_2)$, con ϕ_1, ϕ_2: ϕ_2: $U \to V$ funciones de clase C^2. Definimos la forma $\overset{\approx}{\omega}$: $U \to (\mathcal{R}^2)^*$ denotada por $F^*\omega$ como

$$F^*\omega = M \circ F\, d\phi_1 + N \circ F\, d\phi_2$$

O sea

$$(F^*\omega)\,(x,\ y) = M(F(x,\ y)) \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,\ y)\,dx + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x,\ y)\,dy\right]$$

$$+\ N(F(x,\ y)) \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,\ y)\,dx + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,\ y)\,dy\right]$$

$$= \left(M\,(F(x,\ y))\,\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,\ y) + N(F(x,\ y))\,\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,\ y)\right) dx$$

$$+ \left(M\,(F(x,\ y))\,\frac{\partial\ \phi_1}{\partial y}(x,\ y) + N(F(x,\ y))\,\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,\ y)\right) dy$$

Se ve entonces que, por ser ω de clase C^1 y F de clase C^2, se tiene que $F^*\omega$ es de clase C^1.

Esta forma $F^*\omega$ (leemos ''F estrella ω'') se obtiene, pues, llevando a la forma ω, que inicialmente estaba definida en V, a la nueva forma $F^*\,\omega$ que está definida en U (por esta razón a veces se dice que la operación ''estrella'' es un ''pullback'').

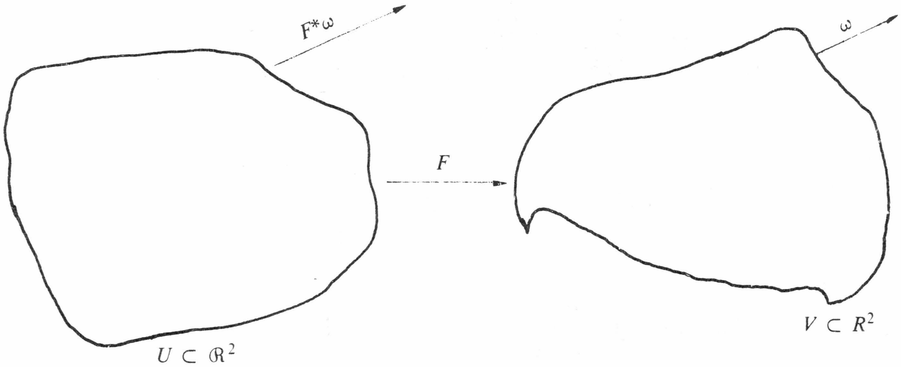


Figura 13. La forma $F^*\omega$.

Teorema (4)

La operación "estrella" goza de las siguientes propiedades:

1. Si $\omega = M\,dx + N\,dy$ es tal que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces $F^*\omega = \alpha\,dx + \beta\,dy$ es tal que

$$\frac{\partial\,\alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

2. Si $\lambda\colon [a, b] \to U$ es una curva de clase C^1, entonces

$$\int_\lambda F^*\,\omega = \int_{F\circ\lambda} \omega$$

Demostración

1. Vimos que si $F = (\phi_1, \phi_2)$, entonces

$$\alpha = M\circ F\,\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + N\circ F\,\frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

$$\beta = M\circ F\,\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + N\circ F\,\frac{\partial \phi_2}{\partial y}$$

Entonces

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = M\circ F\,\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\left(\frac{\partial M}{\partial x}\,\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y}\,\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right)$$

$$+ N\circ F\,\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\,\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}\,\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right)$$

Considerando el hecho de que $\dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial y\partial x}$ $i = 1, 2$ (por ser F de clase C^2) y la hipótesis $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x},$ podemos reescribir la expresión anterior como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= M\circ F\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial x}\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \\
&+ N\circ F\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial \beta}{\partial x}
\end{aligned}
$$

2. Si $F = (\phi_1, \phi_2)$ y $\lambda\colon [a, b] \rightarrow U$, $\lambda(t) = (x(t), y(t))$, entonces $F\circ\lambda\colon [a, b] \rightarrow U$, $F\circ\lambda = (\phi_1 \circ\lambda, \phi_2\circ\lambda)$

De modo que

$$
\begin{aligned}
\int_{F\circ\lambda} \omega &= \int_a^b \Big(M\ ((F\circ\lambda)(t))\ (\phi_1\circ\lambda)'\ (t) + \\
& N\ ((F\circ\lambda)\ (t))\ (\phi_2\circ\lambda)'\ (t) \Big)\ dt \\
&= \int_a^b \Big[(M\circ F)\ (\lambda\ (t)) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\ (\lambda(t))\, x'(t) + \right. \\
& \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\ (\lambda(t))\ y'\ (t) \right) + (N\circ F)\ (\lambda\ (t)) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\ (\lambda\ (t))\ x'\ (t) \right. \\
& \left. + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\ (\lambda\ ((t))\ y'\ (t) \right) \Big]\ dt \\
&= \int_a^b \Big[\Big((M\circ F)\ (\lambda\ (t))\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\ (\lambda\ (t)) + (N\circ F)\ (\lambda(t)) \\
& \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\ (\lambda(t)) \Big)\ x'\ (t) + \Big((M\circ F)\ (\lambda\ (t))\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (\lambda\ (t)) \\
& + (N\circ F)\ (\lambda\ (t))\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\ (\lambda\ (t)) \Big)\ y'\ (t) \Big]\ dt
\end{aligned}
$$

que con la notación de (1) para $F^*\ \omega$ nos queda

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b [\ \alpha\ (\lambda\ (t))\ x'\ (t) + \beta\ (\lambda\ (t))\ y'\ (t)]\ dt \\
&= \int_\lambda F^*\omega
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

5.8 Integrales curvilíneas y homotopía

Vamos ahora a establecer el resultado cumbre de esta sección, del cual se va a desprender como un corolario casi inmediato el resultado que comentábamos ya en 5.5., y que nos dice cuál es ese ''ingrediente topológico'' relacionado con el dominio de las funciones M y N que debemos añadir a la hipótesis $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ para poder concluir que la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ es exacta.

Al comienzo de esta sección comentábamos que no íbamos a demostrar nuestro resultado cumbre en toda su generalidad; sin embargo, las dos subsecciones anteriores, referentes al teorema de Green en un rectángulo y a las formas diferenciales inducidas, nos dan las herramientas suficientes para poder establecer un bello argumento de la demostración de una versión un poco debilitada de tal resultado.

En realidad el enunciado del teorema en su forma más general es muy simple pero posee un contenido profundo. En palabras poco precisas este teorema establece que si tenemos una forma diferencial $\omega = M\,dx + N\,dy$, en la que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces la integral curvilínea de ω sobre la curva λ, $\int \omega$ *será invariante por homotopías de* λ, i.e. si μ es otra curva cualquiera, homotópica a λ, se tendrá:

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega .$$

Más precisamente establezcamos el

Teorema (5)

Sea ω una forma diferencial definida en un abierto $U \subset R^2$, $\omega = M\,dx + N\,dy$, con $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Si λ, μ: $[a, b] \rightarrow U$ son dos curvas C^1, homotópicas en U, entonces

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega$$

La versión debilitada de este teorema (con hipótesis aumentadas y con generalidad debilitada), de la cual daremos su demostración, está contenida en el siguiente teorema.

Teorema (6)

Sean λ, μ: $[a, b] \rightarrow U$ dos curvas con las mismas extremidades, de clase C^1, tomando valores en el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, tales que existe una homotopía H: $[a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ de clase C^2 entre ellas (i.e. si $H(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ entonces las funciones x, y: $V \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^2, donde V es un abierto de $\mathbb{R}^2$, tal que $[a, b] \times [0,1] \subset V$). Sea ω: $U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ una forma diferencial de clase C^1 definida en U, $\omega = M\,dx + N\,dy$, con $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Entonces

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega$$

Demostración

Tenemos la siguiente situación

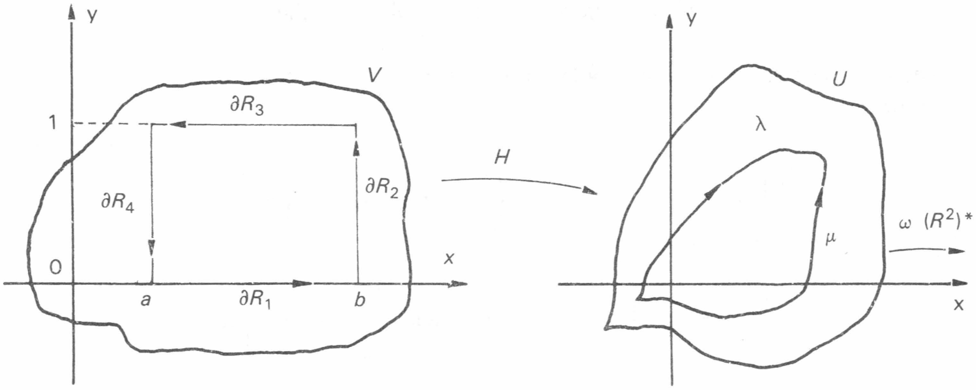


Figura 14. Demostración del teorema 6.

Llamamos ∂R_1, ∂R_2, ∂R_3, ∂R_4 a los cuatro lados del rectángulo $[a, b] \times [0, 1]$, como lo muestra la figura 14.

Consideremos la forma $H^*\omega$: $V \to (\Re^2)^*$ de clase C^1, definida en V, $H^*\omega = \alpha\, dx + \beta\, dy$.

Apliquemos el teorema de Green a la forma $H^*\omega$ sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [0, 1]$. Entonces

$$\int_R \int \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial R} H^*\omega$$

Pero $\omega = M\, dx + N\, dy$ es tal que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, por lo que (inciso (1) del teorema (4)) la forma

$$H^*\omega = \alpha\, dx + \beta\, dx \text{ es tal que } \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Entonces, el teorema de Green dirá que

$$\int_{\partial R} H^*\omega = 0$$

Ahora, usando el inciso (2) del teorema (4) nos queda

$$\int_{\partial R} H^*\omega = \int_{H\circ\partial R} \omega = 0$$

Pero

$$\int_{H\circ\partial R} \omega = \int_{H\circ\partial R_1} \omega + \int_{H\circ\partial R_2} \omega + \int_{H\circ\partial R_3} \omega + \int_{H\circ\partial R_4} \omega$$

Recuerde que H es una homotopía entre λ y μ.
Entonces

$$\int_{H\circ\partial R_1} \omega = \int_{\lambda} \omega \qquad \left(\text{o bien} \int_{H\circ\partial R_1} \omega = \int_{\mu} \omega\right)$$

$$\int_{H\circ\partial R_2} \omega = -\int_{\mu} \omega \qquad \left(\text{o bien} \int_{H\circ\partial R_2} \omega = -\int_{\lambda} \omega\right)$$

y

$$\int_{H\circ\partial R_2} \omega = \int_{H\circ\partial R_4} \omega = 0$$

por lo que

$$0 = \int_{H\circ\partial R} \omega = \int_{\lambda} \omega - \int_{\mu} \omega$$

$$\left(\text{o bien } 0 = \int_{H\circ\partial R} \omega = \int_{\mu} \omega - \int_{\lambda} \omega\right)$$

y finalmente obtenemos que

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega$$

Q.E.D.

Ahora sí, establezcamos el tan buscado resultado al que queríamos llegar.

Corolario

Sea la ecuación diferencial

$$M\ (x,\ y)\ dx + N\ (x,\ y)\ dy = 0$$

con M, N: $U \rightarrow \mathcal{R}$, definidas en el abierto $U \subset \mathcal{R}^2$, y tales que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si U es simplemente conexo, la ecuación diferencial es exacta

Demostración

Sea ω: $U \rightarrow (\mathcal{R}^2)^*$ la forma diferencial asociada a la ecuación dada.
Sea λ: $[a,\ b] \rightarrow U$ una curva de clase C^1 *cerrada*, i.e. $\lambda(a) = \lambda(b)$.

Demostraremos que $\displaystyle\int_\lambda \omega = 0.$

En la demostración del teorema (1), cuando se demostró que (2) $\Rightarrow$ (3), se vio que toda curva cerrada λ se puede escribir (de muchas maneras) como $\lambda_1 + (-\lambda_2)$, donde λ_1: $[a,\ c] \rightarrow U$ y λ_2: $[c,\ b] \rightarrow U$, con $c \epsilon (a,\ b)$, definidas por

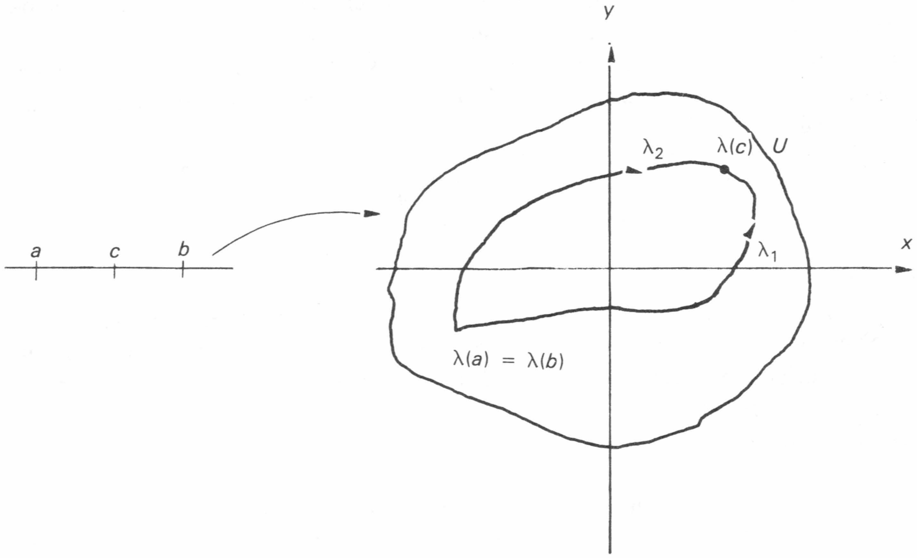


Figura 15. Demostración del colorario del teorema 6.

$$\lambda_1 (s) = \lambda(s)$$

$$\lambda_2 (s) = - \lambda(c + b - s)$$

Ahora el abierto U es simplemente conexo, por lo que las curvas λ_1 y $(- \lambda_2)$ son homotópicas.
Entonces

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\lambda_1+(-\lambda_2)} \omega = \int_{\lambda_1} \omega + \int_{-\lambda_2} \omega = \int_{\lambda_1} \omega - \int_{\lambda_2} \omega = 0 \qquad \text{(teorema (5))}$$

Entonces, por el teorema (1), la ecuación es exacta.

Q.E.D.

Ahora ya podemos ver por qué la ecuación

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy = 0$$

no es exacta en $\mathcal{R}^2 - \{0\}$, a pesar de que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Es evidente que $\mathcal{R}^2 - \{0\}$ no es un conjunto simplemente conexo.

Entonces, el teorema que fue establecido en la sección 4 acerca de la caracterización de ecuaciones exactas es completamente cierto (la suficiencia es verdadera) si las funciones M y N están definidas en un conjunto simplemente conexo.

Así, si restringimos el dominio de las funciones N, N: $U \to \mathcal{R}$, que consideramos en el contraejemplo (5.1), de tal modo que U sea simplemente conexo, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = 0$$

será exacta.

Una manera de "convertir" al conjunto $\mathcal{R}^2 - \{0\}$ (donde inicialmente estaban definidas M y N) en un conjunto simplemente conexo, es eliminando de él una semirecta cerrada partiendo del origen. Por ejemplo, eliminando el conjunto $\{(x, y) \epsilon \mathcal{R}^2 | x > 0, y = 0\}$ (parte positiva del eje x).

Así, el conjunto

$$D = \mathcal{R}^2 - \{(x, y) \epsilon \mathcal{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}$$

es simplemente conexo, pues cualesquiera dos curvas del tipo λ, μ: $[a, b] \to D$ son homotópicas.

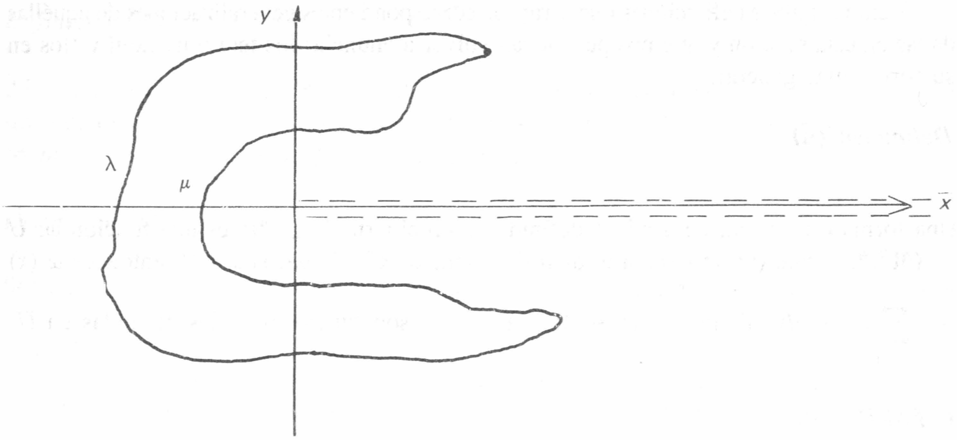


Figura 16. Las curvas λ y μ son homotópicas en D.

Se deja como ejercicio al lector exhibir una función ángulo $f: D \to \mathbb{R}$ diferenciable. Esta será solución de la ecuación diferencial dada.

5.9 Comentarios finales

Quisiera terminar esta sección haciendo algunos comentarios sobre la teoría que se ha desarrollado aquí acerca de las ecuaciones diferenciales exactas. Estos comentarios van dirigidos principalmente al lector que, sin resistir su espíritu de curiosidad matemática, ha consultado en otros libros y se ha encontrado con la agradable (¿desagradable?) sorpresa de que el teorema (5) —nuestro ''resultado cumbre''— es demostrado de una manera mucho más simple de lo que se ha hecho aquí, sin hacer uso de formas diferenciales, formas diferenciales inducidas, homotopías, etc., usando, cuando mucho, el teorema de Green (su forma más general).

Ante todo, quisiera decir que la manera como se ha encarado aquí la teoría tiene una grandísima ventaja respecto de cualquiera otra que el lector haya consultado en otros textos. Y esta ventaja es que aquí hemos dejado prácticamente listo el terreno para poder considerar un problema que, si bien no es considerado ''tradicionalmente'' en textos de ecuaciones diferenciales, no es más que una generalización natural de la problemática relacionada con las ecuaciones exactas.

Esta generalización es la siguiente:

Sean $a_1, \ldots, a_n: U \to \mathbb{R}$ funciones reales definidas en el abierto U del espacio $\mathbb{R}^n$. ¿Existirá una función $f: U \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i \qquad i = 1, \ldots n?$$

Ciertamente este problema es mucho más general (e interesante) que aquél relacionado con saber si una ecuación diferencial del tipo $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta (caso $n = 2$).

Demos algunas definiciones que serán las correspondientes generalizaciones de aquéllas dadas en esta sección y que nos permitirán volver a enunciar los teoremas aquí vistos en su forma más general.

Definición (A)

Una forma diferencial de grado 1 definida en un abierto $U \subset \mathcal{R}^n$ es una función $\omega \colon U \to (\mathcal{R}^n)^*$, donde $(\mathcal{R}^n)^*$ denota el dual del espacio $\mathcal{R}^n$. O sea, si $x \in U$, entonces $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i$, donde $a_i \colon U \to \mathcal{R}$ i: 1,. . ., n son funciones reales definidas en U.

Definición (B)

A la forma $\omega \colon U \to (\mathcal{R}^n)^*$, $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i$ se le llama *cerrada* si

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Definición (C)

A la forma $\omega \colon U \to (\mathcal{R}^n)^*$, $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i$ se le llama *exacta* si existe $b \colon U \to \mathcal{R}$ diferenciable, tal que

$$\frac{\partial b}{\partial x_i} = a_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

A la función b se le llama ''primitiva'' de la forma ω.

Definición (D)

Sea $\omega \colon U \to (\mathcal{R}^n)^*$, $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx$ una forma continua (i.e. las funciones $a_i \colon U \to \mathcal{R}$ son continuas), y sea $\lambda \colon [a, b] \to U$, $\lambda(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ una curva de clase C^1. La integral curvilínea de ω a lo largo de λ es, por definición

$$\int_{\lambda} \omega = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda(t))\, x_i'(t) \right) dt$$

Definición (E)

Sean $\lambda, \mu \colon [a, b] \to U$ dos curvas con las mismas extremidades tomando valores en $U \subset \mathcal{R}^n$. Decimos que estas curvas son homotópicas si existe una función continua

$H \colon [a, b] \times [0, 1] \to U$, tal que $H(s, 0) = \lambda(s)$, $H(s, 1) = \mu(s)$, $H(a, t) = \lambda(a) = \mu(a)$, $H(b, t) = \lambda(b), = \mu(b)$, $\forall\, s \in [a, b]$, $\forall\, t \in [0, 1]$.

Definición (F)

Al conjunto abierto $U \subset \mathcal{R}^n$ se le llama simplemente conexo si él es conexo y, dados dos puntos cualesquiera p, $q \epsilon U$, y dos curvas cualesquiera η, μ: $[a, b] \rightarrow U$, con $\eta\ [a) = \mu(a) = p$, y, $\eta(b) = \mu(b) = q$, éstas son homotópicas.

Definición (G)

Sea ω: $V \rightarrow (\mathcal{R}^n)^*$, $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ (x)\ dx_i$ una forma de clase C^1 definida en el abierto $V \subset \mathcal{R}^n$.

Sea F: $U \rightarrow V$, $F = (b_1, \ldots, b_n)$ una función de clase C^2 definida en el abierto $U \subset \mathcal{R}^m$. Definimos la forma inducida por F, denotada por $F^*\omega$ (leemos "F estrella ω") como la forma (de clase C^1) definida en $U \subset \mathcal{R}^m$, $F^*\omega$: $U \rightarrow (\mathcal{R}^m)^*$ dada por

$$F^*\omega = \sum_{R=1}^{n} (a_R \circ F)\ db_R$$

o

$$(F^*\ \omega)\ (y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{R=1}^{n} a_R\ (F(y))\ \frac{\partial b_R}{\partial x_i}\ (y) \right) dy_i \qquad y \epsilon V.$$

Se enuncian ahora los correspondientes teoremas que generalizan a aquéllos estudiados en esta sección y se invita al lector a que los demuestre (¡hágalo!: el *trabajo* ya está hecho. Basta ir siguiendo las demostraciones dadas en esta sección, usar las definiciones dadas anteriormente, y, eventualmente, cambiar $\mathcal{R}^2$ por $\mathcal{R}^n$).

Teorema (I)

Una condición necesaria para que la forma ω: $U \rightarrow (\mathcal{R}^n)^*$ de clase C^1 sea exacta es que sea cerrada.

Teorema (II) (Generalización del teorema (1)).

Sea ω: $U \rightarrow (\mathcal{R}^n)^*$ una forma continua definida en el abierto $U \subset \mathcal{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. ω es exacta en U.
2. La integral de ω a lo largo de cualquier curva λ: $[a, b] \rightarrow U$ de clase C^1 (seccionalmente) depende solamente de las extremidades $\lambda(a)$ y $\lambda(b)$.
3. Para todo camino cerrado λ: $[a, b] \rightarrow U$ (i. e. $\lambda(a) = \lambda(b)$) de clase C^1 (seccionalmente) se tiene que

$$\int_{\lambda} \omega = 0.$$

Teorema (III) (Generalización del teorema (2)).

Una forma $\omega: U \to (\mathbb{R}^n)^*$ de clase C^1 es cerrada si, y sólo si es localmente exacta, i.e. todo punto de U es centro de alguna bola restricta a la cual la forma ω es exacta.

Teorema (IV) (Generalización del teorema (4)).

La operación "estrella" (ver definición (G)) goza de las siguientes propiedades:

1. Si ω es cerrada, $F^* \omega$ es cerrada.
2. Si $\lambda: [a, b] \to U$ es una curva C^1, entonces

$$\int_{\lambda} F^* \omega = \int_{F \circ \lambda} \omega$$

Teorema (V) (Generalización del teorema (6)).

Sean $\lambda, \mu: [a, b] \to U$ dos curvas con las mismas extremidades, de clase C^1, tomando valores en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, tales que existe una homotopía $H: [a, b] \times [0, 1] \to U$ de clase C^2 entre ellas. Sea $\omega: U \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma diferencial cerrada de clase C^l definida en U. Entonces

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega$$

Nota: En realidad vale también la versión general del teorema (5). Ésta sería: si $\omega: U \to (\mathbb{R}^n)^*$ es una forma diferencial cerrada, y si $\lambda, \mu: [a, b] \to U$ son curvas C^1 homotópicas, entonces

$$\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega$$

Teorema (VI) (Generalización del corolario del teorema (6)).

Sea $\omega: U \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma cerrada de clase C^1 definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si U es simplemente conexo, entonces ω es exacta.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 2. SECCIÓN 5)

1. Un hecho interesante acerca de la manera como se definió un camino en $\mathbb{R}^2$, es que la definición establece que un camino es *una función* del tipo $\lambda: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la cual sabemos que queda completamente determinada si damos un par de funciones reales $x, y: I \to \mathbb{R}$ tales que $\lambda(t) = (x(t), y(t))$. En este sentido el camino $\lambda_1: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\lambda_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ y el camino $\lambda_2: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\lambda_2(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ son *distintos*. ¿Cómo es el conjunto (de puntos en $\mathbb{R}^2$) $\lambda_1([0, 2\pi])$ respecto del conjunto $\lambda_2([0, 2\pi])$?, ¿cómo es el conjunto $\lambda_1([0, 2\pi])$ respecto del conjunto $\lambda_n([0, 2\pi])$ donde $\lambda_n: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^1$ está dado por $\lambda_n(t) = (\cos nt, \operatorname{sen} nt)$ n un entero?
2. Considere el camino $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $\lambda(t) = (t, |t|)$. ¿Es λ un camino diferenciable? (Recuerde: el camino $\lambda: I \to \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ se dice ser diferenciable cuando el vector $\lambda'(t) = (x'(t), y'(t)) \in \mathbb{R}^2$ existe para todo t en I). Considere ahora el camino

μ: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ dado por $\mu(t) = (t^3,\ |t|\ t^2)$. ¿Cómo es $\lambda(\mathcal{R})$ respecto de $\mu(\mathcal{R})$?, ¿es μ un camino diferenciable?

3. En los cursos de cálculo se enseña: "si f: $I \to \mathcal{R}$ es una función cuyo gráfico posee un 'pico' en $x = a$, entonces f no es diferenciable en ese punto". ¿Es esto cierto para caminos? Explique.
4. Demuestre: si λ: $[a, b] \to \mathcal{R}^2$ es un camino cerrado de clase C^2, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\lambda(c)$ y $\lambda'(c)$ son vectores perpendiculares (en $\mathcal{R}^2$). Interprete geométricamente.
5. Demuestre: sea λ: $[a, b] \to \mathcal{R}^2$ un camino diferenciable. Considere la función g: $[a, b] \to \mathcal{R}$, $g(t) = |\lambda(t)|$. Si $g'(t) = 0$ para todo t en $[a, b]$, entonces $\lambda'(t) = (x'(t), y'(t))$ es perpendicular a $\lambda(t)$ para todo t en $[a, b]$. Interprete geométricamente. ¿Es válida la afirmación recíproca?
6. Considere la forma diferencial $\omega(x, y) = y\, dx + x\, dy$.

   a) Sea λ: $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathcal{R}^2$ dado por $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Calcule $\displaystyle\int_\lambda \omega$.

   b) Sea μ: $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathcal{R}$ dado por $\mu(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$. Calcule $\displaystyle\int_\mu \omega$

   c) Sea σ: $\left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right] \to \mathcal{R}^2$ dado por $\sigma(t) = (\cos nt, \operatorname{sen} nt)$. Calcule $\displaystyle\int_\sigma \omega$

   d) ¿Cómo es $\lambda\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ respecto de $\mu\left(\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]\right)$ y respecto de $\sigma\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]\right)$?.

   e) Con base en los resultados anteriores, ¿podría sugerir algún teorema?

7. Con base en el ejercicio anterior argumente por qué es suficiente para calcular la integral de línea de la forma ω a lo largo de la curva λ dar como información (obviamente la forma ω y) el conjunto $\lambda([a, b])$, y no es necesario explicitar la curva λ como $\lambda(t) = (x(t), y(t))$.

En los ejercicios del 8 al 12 se da una forma diferencial

$\omega : U \subset \mathcal{R}^2 \to (\mathcal{R}^2)^*$ y un camino λ. Calcule $\displaystyle\int_\lambda \omega$.

8. $\omega(x, y) = y\, dy$, λ es el contorno del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $3x + 2y = 6$ recorrido en dirección contraria a las manecillas del reloj.
9. $\omega(x, y) = (x^2 - y^2)\, dx$, λ es el arco de parábola $y = x^2$ desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2, 4)$.
10. $\omega(x, y) = y\, dx - x\, dy$, λ: $[0, 2\pi] \to \mathcal{R}^2$ está dado por $\lambda(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$.
11. $\omega(x, y) = (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, λ: $[-1, 1] \to \mathcal{R}^2$ está dado por $\lambda(t) = (t, t^2)$.
12. $\omega(x, y) = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, λ: $[0, 2] \to \mathcal{R}$ está dado por $\lambda(t) = (t, 1 - |1 - t|)$.
13. Use el teorema (1), mostrado en esta sección, para probar que las siguientes ecuaciones diferenciales NO son exactas.

    a) $\dfrac{x}{x^2 + 4y^2}\, dx - \dfrac{y}{x^2 + 4y^2} = 0$ (M y N definidas en $\mathcal{R}^2 - 0$).

    b) $(x^2 + y)dx - x\, dy = 0$.

    c) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y\, dy = 0$.

▲ 14. Demuestre que la relación de homotopía entre curvas es una relación de equivalencia.

15. Demuestre que las curvas λ, μ: $[-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\lambda(t) = (t, t)$, $\mu(t) = (t, t^2)$ son homotópicas. Encuentre una homotopía entre ellas. Construya una gráfica.

16. Sea $D = \mathbb{R}^2 - \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Sean λ, μ, σ: $[-\pi, \pi] \rightarrow D$ dadas por $\lambda(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $\mu(t) = (t, 3 \operatorname{sen} t)$, $\sigma(t) = (t, \cos t)$. ¿Son λ y μ homotópicas? La misma pregunta para λ y σ y para μ y σ. Justifique su respuesta.

17. Sea $D = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Sean λ: $[0, \pi] \rightarrow D$, μ : $[\pi, 2\pi] \rightarrow D$, σ : $[-1, 1] \rightarrow D$, dadas por $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) = \mu(t)$, $\sigma(t) = (t, -2t^2 + 2)$. ¿Son λ y μ homotópicas? La misma pregunta para λ y σ y para μ y σ. Justifique su respuesta.

18. Demuestre que un conjunto convexo es simplemente conexo.

19. ¿El interior de una elipse es un conjunto simplemente conexo? Justifique su respuesta.

20. Use el teorema de Green probado en esta sección para demostrar que la integral $\int_\lambda \omega$, donde

$\omega(x, y) = (2xy - y)dx + x^2\,dy$ y λ es cualquier contorno rectangular, es numéricamente igual al área del dominio limitado por este contorno.

21. Demuestre que la integral

$$\int_\lambda (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy$$

donde λ es cualquier contorno rectangular simétrico respecto del eje y, vale cero.

22. Sea $\omega(x, y) = y\,dx + y\,dy$ y sea $F(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$. Halle $F^*\omega$ y compruebe el teorema (4) con este ejemplo, tomando λ: $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

23. Lo mismo que en el ejercicio anterior con $\omega(x, y) = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$

$F(x, y) = (\operatorname{sen} y, \cos y)$ y λ: $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (\cos \frac{t}{2}, \operatorname{sen} \frac{t}{2})$

24. Lo mismo que en el ejercicio anterior con

$\omega(y, y) = e^y dy + (xe^y - 2y)\,dy$, $F(x, y) = (y, x)$ y λ: $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (t, t)$.

25. Considere la ecuación diferencial exacta $M(x, y)dx + N(y, y)dy = 0$. Sean P_1 y P_2 dos puntos cualesquiera del dominio de M y N. Dé sentido a la expresión

$$\int_{P_1}^{P_2} M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Explique.

26. Calcule

a) $\displaystyle\int_{(-1, 2)}^{(2, 3)} y\,dx + x\,dy$

b) $\displaystyle\int_{(0, 0)}^{(2, 1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$

c) $\displaystyle\int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$

27. Demuestre que

$$\int_{\lambda} [f(x + y) + f(x - y)]dx + [f(x + y) - f(x - y)]dx = 0$$

donde f es cualquier función real continua definida en algún abierto U de $\mathcal{R}^2$, y λ: $[a, b] \to U$ es una curva C^1 cerrada.

28. Recapacite en la demostración de (2) ⇒ (1) del teorema (1). Suponga que sabemos que la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta. Observe que $f(x, y) = c$ es la solución de tal ecuación, donde

$$f(x, y) = \int_{\lambda_{p,\,q}} \omega$$

$\omega\,(x, y) = M(x, y)dy + N(x, y)dy$, p es un punto fijo del dominio de M y N, y $q = (x, y)$.

Use este ''método'' para encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones (primero cerciórese de que se trata de ecuaciones exactas).

a) $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0.$
b) $(x^2 - ay)dx + (y^2 - ax)dy = 0.$
c) $(\cos xy - \operatorname{sen} xy)\,(y\,dy + x\,dy) = 0.$
d) $xy[(2y^3 - 3xy^2 + 4x^2y)dx + (4y^2x - 3yx^2 + 2x^3)dy] = 0.$

(Compare con los resultados de los ejercicios 1), 3), 5) y 10) de la sección 4 de este capítulo).

Generalizando:

▲ 29. Demuestre que las siguientes formas ω: $\mathcal{R}^3 - \{0\} \to (\mathcal{R}^3)^*$ son cerradas

a) $\omega(x, y, z) = \dfrac{dx + dy + dz}{(x + y + z)^2}$

b) $\omega\,(x, y, z) = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$

c) $\omega\,(x, y, y) = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$

▲ 30. Reestructure y resuelva el ejercicio 6 con la forma diferencial $\omega\,(x, y, z) = y\,dx + z\,dy + x\,dz$ y

a) λ: $[0, 2\pi] \to \mathcal{R}^3$ $\lambda(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$
b) μ $[0, \pi] \to \mathcal{R}^3$ $\mu(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 2t)$
c) σ: $[0, \dfrac{\pi}{n}] \to \mathcal{R}^3$ $\sigma(t) = (\cos 2\,nt, \operatorname{sen} 2nt, 2nt)$ (λ, μ y σ son hélices).

▲ 31. Sean M, N, R: $\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ dadas por $M(x, y, z) = yz$, $N(x, y, z) = zx$ y $R(x, y, z) = xy$. Considere la forma $\omega\,(x, y, z)$: $\mathcal{R}^3 \to (\mathcal{R}^3)^*$ $\omega\,(x, y, z) = Mdx + Ndy + Rdz$

a) Demuestre que ω es cerrada.
b) Sea F: $\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ dada por

$F(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 + z^2, y^2 + z^2)$
Halle $F^*\,\omega$: $\mathcal{R}^3 \to (\mathcal{R}^3)^*$.

c) Compruebe que $F^* \omega$ es cerrada.

d) Sea $\lambda\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\lambda(t) = (t, t, t)$. Compruebe que

$$\int_{\lambda} F^* \omega = \int_{F \circ \lambda} \omega$$

32. *a*) Usando integrales curvilíneas; *b*) sin usar integrales curvilíneas, demuestre que la forma

$$\omega (x, y, z) = (y^2 - z^2)dx + 2yz\, dy - x^2 dz$$

no es exacta.

33. Sean $\phi_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ funciones polinomiales. Demuestre que la forma $\omega : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ dada por

$$\omega (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i (x_i)\, dx_i$$

es exacta. Halle una primitiva.

▲ 34. Sea *B* una bola en $\mathbb{R}^3$ que no contiene al origen de coordenadas. Sean $M, N, R\colon B \to \mathbb{R}$ dadas por

$$M(x, y, z) = e^{y/x} \qquad N(x, y, z) = \frac{e^{y/z}(x + 1)}{z} + ze^{yz}$$

$$R(x, y, z) = -\frac{e^{y/z}(x + 1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}$$

a) Demuestre que la forma $\omega\colon B \to (\mathbb{R}^3)^*$ dada por $\omega (x, y, z) = Mdx + Ndy + Rdz$ es cerrada.

b) Sea $f : B \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = \int_{\lambda_{c,\,(x,\,y,\,z)}} \omega$$

donde $\lambda_{c,\,(x,\,y,\,z)}\colon [a, b] \to B$ es un camino C^1 tal que $\lambda_{c,\,(x,\,y,\,z)}(a) = c$ (el centro de la bola *B*) y $\lambda_{c,\,(x,\,y,\,z)}(b) = (x, y, z) \in B$.

Demuestre que $f(x, y, z)$ es una primitiva de ω, i.e. demuestre que $df(x, y, z) = \omega (x, y, z)$.

APÉNDICE A LA SECCIÓN 5. EL TEOREMA DE CAUCHY EN VARIABLE COMPLEJA

En el transcurso de esta sección hemos hecho un poco de análisis matemático, el cual ha surgido naturalmente de la problemática que nos planteamos inicialmente con las ecuaciones exactas. Veremos que la teoría que se ha desarrollado en esta sección tiene algunos resultados laterales en la teoría de las funciones de variable compleja.

A una función $f\colon U \to \mathbb{C}$ definida en algún abierto *U* del plano complejo y tomando valores en $\mathbb{C}$ se le llama función de la variable compleja $z \in U \subset \mathbb{C}$.

Como siempre, se está particularmente interesado en las funciones que poseen *derivada* (en algún punto).

Se define la derivada de la función $f\colon U \to \mathbb{C}$ en el punto $z_o \in U$ como el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_o + h) - (z_o)}{h}$$

en el caso de que este límite exista. A tal límite (llamado la derivada de f en z_o se le denota por $f'(z_o)$.

Decimos entonces que la función f es *diferenciable* en z_o cuando su derivada existe en ese punto.

Tomemos entonces $f\colon U \to \mathbb{C}$ diferenciable en z_o. Entonces

$$f'(z_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_o + h) - (z_o)}{h}$$

expresión que puede reescribirse como

$$f(z_o + h) - f(z_o) = f'(z_o)\, h + r(h)$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Observe que $f'(z_o)\, h$ es una *multiplicación* de números complejos. Llamemos $f'(z_o) = A + i\,B$, $h = h_1 + i\,h_2$, entonces

$$f'(z_o) \cdot h = A\,h_1 - B\,h_2 + (A\,h_2 + B\,h_1)\, i$$

Por otra parte, a la función $f\colon U \to \mathbb{C}$ se le puede contemplar como una función definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tomando valores de $\mathbb{R}^2$ (usando el isomorfismo natural entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ dado por $x + iy \sim (x, y)$), de modo que, siendo f diferenciable, en el sentido de variable compleja en z_o, tenemos que f es diferenciable, como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, en z_o, i.e. existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(z_o + h) - f(z_o) = T\,h + r(h)$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$$

Sabemos que la transformación T (que es la derivada de f en z_o) está representada (en la base canónica) por la matriz:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(z_o) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(z_o) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(z_o) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(z_o) \end{vmatrix}$$

donde $f = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2\colon U \to \mathbb{R}$

Pero entonces tenemos que

$$T\,h = f'\,(z_o)\,h$$

o sea

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\,(z_o)\,h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,(z_o)\,h_2 = A\,h_1 - B\,h_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\,(z_o)\,h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,(z_o)\,h_2 = A\,h_2 + B\,h_1$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\,(z_o) = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,(z_o)\ (= A)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\,(z_o) = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,(z_o)\ (= B)$$

Por lo tanto, hablar de diferenciabilidad de f: $U \to \mathbb{C}$ en z_o es referirnos a que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\,(z_o) = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,(z_o)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\,(z_o) = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,(z_o)$$

A estas ecuaciones se les llama ecuaciones de Cauchy Riemann para la función $f = f_1 + i\,f_2$ en z_0.

A una función f: $U \to \mathbb{C}$ que es diferenciable en U se le llama *holomorfa* (en U).

Por lo tanto, una condición necesaria (y suficiente) para que la función f: $U \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + i\,f_2$ sea holomorfa es que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Definamos ahora la forma diferencial compleja $f(z)\,dz$, donde f: $U \to \mathbb{C}$, como:

$$f(z)\,dz = (f_1 + i\,f_2)\,(dx + i\,dy)$$

$$= (f_1\,dx - f_2\,dy) + i\,(f_1\,dy + f_2\,dx)$$

Sea λ: $[a, b] \to U$, $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ una curva C^1 tomando valores en U (en donde está definida f). Definimos a la integral de $f(z)\,dz$ a lo largo de λ como

$$\int_\lambda f(z)\,dz = \int_\lambda f_1\,dx - f_2\,dy + i\int_\lambda f_1\,dy + f_2\,dx$$

$$= \int_a^b (f_1(\lambda(t))\, x'(t) - f_2(\lambda(t))\, y'(t))\, dt$$

$$+ \, i \int_a^b (f_1(\lambda(t))\, y'(t) + f_2(\lambda(t))\, x'(t))\, dt$$

Es decir, la forma diferencial compleja $f(z)\, dz$ está constituida por un par de formas diferenciales reales ω_1 y ω_2, $\omega_1 = f_1\, dx - f_2\, dy$, $\omega_2 = f_1\, dy + f_2\, dx$, según la fórmula $f(z)\, dz = \omega_1 + i\omega_2$, y lo que hicimos fue definir a la integral de $f(z)\, dz$ a lo largo de λ como

$$\int_\lambda f(z)\, dz = \int_\lambda \omega_1 + i \int_\lambda \omega_2$$

(de la manera más natural posible).

Observe que el hecho de que $\omega_1 = f_1\, dx - f_2\, dy$ y $\omega_2 = f_1\, dy + f_2\, dx$ *sean formas diferenciales cerradas es equivalente al hecho de que f sea holomorfa.*

En efecto, ω_1 y ω_2 son cerradas si (y sólo si)

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

que son las ecuaciones de Cauchy - Riemann que expresan la condición de holomorfía de f.

Consideremos entonces la función holomorfa $f\colon U \to \mathbb{C}$ definida en el abierto *simplemente conexo* $U \subset \mathbb{C}$.

Sea $\lambda\colon [a, b] \to U$ una curva C^1 cerrada tomando valores en U. Entonces

$$\int_\lambda f(z)\, dz = \int_\lambda \omega_1 + i \int_\lambda \omega_2$$

Pero $\int_\lambda \omega_1 = \int_\lambda \omega_2 = 0$ en vista del teorema (5) de esta sección, por lo que

$$\int_\lambda f(z)\, dz = 0$$

Esta no es más que una de las posibles formulaciones del llamado *Teorema de Cauchy*, uno de los grandes resultados que aparecen en la teoría de las funciones de variable compleja.

6. ECUACIONES DE LAGRANGE Y DE CLAIRAUT

A una ecuación del tipo

$$y = x\phi(y') + \psi(y')$$

donde ϕ y ψ son ciertas funciones de y', se le llama *ecuación diferencial de Lagrange.*

Es posible explicitar la solución de esta ecuación haciendo $y' = p$, donde p es un parámetro que depende de x, por medio del cual quedará escrita la solución de la ecuación. En efecto, tenemos que

$$y = x\phi(p) + \psi(p)$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = p = x\phi'(p)\frac{dp}{dx} + \phi(p) + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

o

$$p - \phi(p) = (x\phi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

expresión que puede escribirse como

$$(p - \phi(p))\frac{dx}{dp} - \phi'(p)x = \psi'(p)$$

que es una ecuación lineal para $x = x(p)$, la cual ya hemos visto cómo resolver.

Sea $x = g(p, c)$ la solución general de esta última ecuación (c es la constante arbitraria de integración).

Entonces

$$\begin{cases} x = g(p, c) \\ y = g(p, c)\,\phi(x) + \psi(p) \end{cases}$$

es la expresión (dada en forma paramétrica) de la solución general de la ecuación de Lagrange.

Observe que al resolver la ecuación lineal para $x = x(p)$ debemos de suponer que $p - \phi(p) \neq 0$.

Si existe $\widetilde{C} \in \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{C} - \phi(\widetilde{C}) = 0$, entonces

$$y = \phi(\widetilde{C})x + \psi(\widetilde{C})$$

también es solución de la ecuación de Lagrange.

En efecto, tenemos que

$$y' = \phi(\widetilde{C}) = \widetilde{C}$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación de Lagrange original nos queda

$$y = \phi(\widetilde{C})x + \psi(\widetilde{C})$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO BIBLIOTECA

que es una identidad, con lo que queda probada nuestra afirmación.

En este caso la solución $y = \phi(\tilde{C})x + \psi(\tilde{C})$ es una *solución singular* de la ecuación de Lagrange, pues ella no puede obtenerse de la solución general de la ecuación por medio de la asignación de algún valor de la constante C.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación de Lagrange

$$y = x(1 + y') + (y')^2$$

Solución

Haciendo $y' = p$, nos queda

$$y = x(1 + p) + p^2$$

de donde

$$p = x\frac{dp}{dx} + 1 + p + 2p\frac{dp}{dx}$$

o

$$\frac{dx}{dp} + x = -2p$$

ecuación lineal que tiene por solución general

$$x = e^{-\int dp}\int e^{\int dp}(-2p)dp + Ce^{-\int dp}$$

$$= -e^{-p}\int 2pe^{p}\,dp + Ce^{-p}$$

$$= 2e^{-p}e^{p}(1 - p) + Ce^{-p}$$

Entonces, la solución general de la ecuación está dada por

$$\begin{cases} x = 2(1 - p) + Ce^{-p} \\ y = [2(1 - p) + Ce^{-p}](1 + p) + p^2 \end{cases}$$

En este caso no existen soluciones singulares.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación de Lagrange

$$y = 2\,xy' + \operatorname{sen} y'$$

Solución

Haciendo $y' = p$, nos queda que

$$y = 2\,xp + \operatorname{sen} p$$

de donde

$$p = 2x\,\frac{dp}{dx} + 2p + (\cos p)\,\frac{dp}{dx}$$

o

$$p\,\frac{dx}{dp} + 2x = -\cos p$$

ecuación lineal que tiene por solución general

$$x = e^{-\int \frac{2}{p}dp} \int e^{\int \frac{2}{p}dp} \left(-\frac{\cos p}{p}\right) dp + Ce^{-\int \frac{2}{p}dp}$$

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{\operatorname{sen} p}{p} - \frac{\cos p}{p^2}$$

entonces, la solución general de la ecuación viene dada por

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{\operatorname{sen} p}{p} - \dfrac{\cos p}{p^2} \\[2ex] y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{2\cos p}{p} - \operatorname{sen} p \end{cases}$$

Observe que hemos supuesto que $p \neq 0$.

Entonces, una solución singular de la ecuación es:

$$y = 2x(0) + \operatorname{sen}(0) = 0$$

Un interesante caso particular de una ecuación de Lagrange es cuando ϕ es la función identidad, obteniendo entonces una ecuación del tipo

$$y = xy' + \psi(y')$$

la cual es llamada *ecuación de Clairaut.*

Si hacemos $y' = v$, obtenemos que

$$y = xv + \psi(v)$$

de donde

$$y' = v = xv' + v + \psi'(v)v'$$

o

$$v'(x + \psi'(v)) = 0$$

lo cual se cumple si $v' = 0$ o si $x + \psi'(v) = 0$.

En el caso en que $v' = 0$ obtenemos que $v = m$ (una constante) por lo que

$$y = mx + \psi(m)$$

será la solución general de la ecuación de Clairaut original. Observe que esta solución general geométricamente representa una familia de rectas de pendiente m y ordenada al origen $\psi(m)$ (m es la constante arbitraria).

Consideremos ahora la otra alternativa, o sea cuando

$$x = -\psi'(v)$$

En este caso, llamando $y' = v = t$, tenemos la expresión paramétrica

$$\begin{cases} x = -\psi'(t) \\ y = -t\,\psi'(t) + \psi(t) \end{cases}$$

de una curva en el plano, la cual también es solución de la ecuación diferencial de Clairaut original.

En efecto,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-t\psi''(t) - \psi'(t) + \psi'(t)}{-\psi''(t)} = t$$

por lo que

$$y = tx + \psi(t)$$

es una identidad (en virtud de la expresión paramétrica de la curva).

Además, observe que la línea recta de la solución general que pasa por (x_o, y_o) es *tangente* a la curva

$$\begin{cases} x = -\psi'(t) \\ y = -t\,\psi'(t) + \psi(t) \end{cases}$$

en ese punto.

En efecto, sea $\tilde{t}$ el valor del parámetro t correspondiente al punto (x_o, y_o).

Como ya vimos

$$y'(x_o) = \tilde{t}$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente a esta curva en (x_o, y_o) es

$$y - y_o = \tilde{t}\,(x - x_o)$$

o sea

$$y + \tilde{t}\,\psi'(\tilde{t}) - \psi(\tilde{t}) = \tilde{t}\,(x + \psi'(\tilde{t}))$$

de donde

$$y = \tilde{t}\,x + \psi(\tilde{t})$$

que es la ecuación de la recta de la solución general que pasa por (x_o, y_o).

Es claro entonces que la solución

$$\begin{cases} x = -\psi'(t) \\ y = -t\,\psi'(t) + \psi(t) \end{cases}$$

es una *solución singular* de la ecuación de Clairaut, la cual, según lo visto anteriormente, representa geométricamente la *envolvente* de la familia de rectas de la solución general de la ecuación.

Ejemplo 3

> Resolver la ecuación de Clairaut
>
> $$y = xy' \pm \sqrt{1 + (y')^2}$$

Solución

Sea m una constante arbitraria. Según la discusión presentada anteriormente, la solución general de esta ecuación de Clairaut es

$$y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}$$

Obtengamos ahora la solución singular.

En este caso

$$\psi(t) = \pm \sqrt{1 + t^2}$$

de donde

$$\psi'(t) = \pm \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

por lo que la solución singular está dada paramétricamente por

$$x = \mp \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$y = \mp \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \pm \sqrt{1 + t^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

En este caso es fácil eliminar el parámetro t obteniendo la ecuación de la solución singular como $x^2 + y^2 = 1$.

Geométricamente, esto se ve como

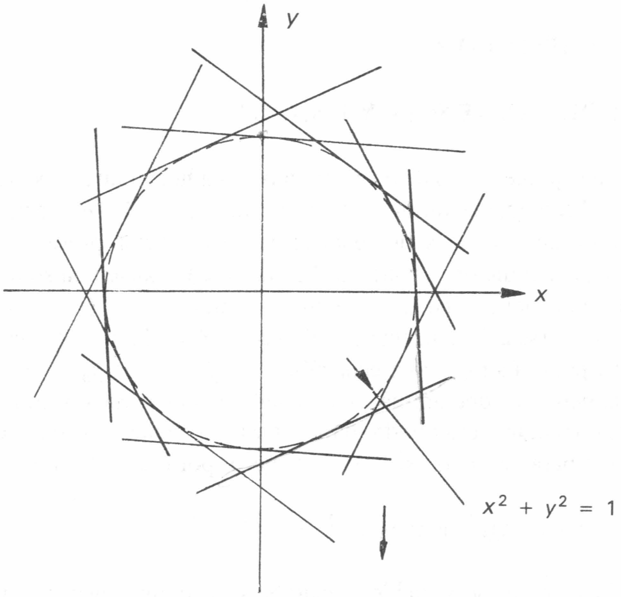


Figura 17. Solución del ejemplo 3.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 2. SECCIÓN 6)

Hallar las soluciones generales y singulares (en caso que existan) de las siguientes ecuaciones:

1. $y = x(1 + y') + (y')^2$

2. $y = xy' + 3(y')^{-2}$

3. $xy' - y = ln\ y'$

4. $y = 2xy' + \operatorname{sen} y'$

5. $x = y(y^{-1/2} - (y')^{-1})$

6. $y = 1.5\ xy' + e^{y'}$

7. $x = y(y')^{-1} + (y')^{-2}$

8. $y = xy' + [1 - (y')^3]^{1/3}$

9. $x(y')^2 - yy' - y' + 1 = 0$

10. $y'\,ln\ y' = 2y - xy'$

11. Demuestre que si una ecuación diferencial de primer orden es al mismo tiempo lineal y de Clairaut, entonces su solución general es un haz de rectas. Ejemplifique.

APÉNDICE AL CAPÍTULO 2

UN TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

En las secciones precedentes de este capítulo se ha hecho una exposición de algunas de las ecuaciones diferenciales de primer orden para las cuales es posible explicitar su solución en términos de funciones elementales. En esta sección presentamos un teorema que nos dice bajo qué condiciones podemos hablar de que existe una solución de la ecuación $y' = f(x,y)$ satisfaciendo una cierta condición inicial $y_o = y(x_o)$. No es un mero capricho teórico aventurarse a discutir una cuestión como ésta. En más de una ocasión hemos comentado que ya para la simplísima ecuación $y' = f(x,y)$ con $y_o = y(x_o)$ no es posible dar una ''fórmula general'' que defina su solución. Lo que hemos hecho en este capítulo es estudiar varias estructuras muy particulares de esta ecuación y discutir lo que podemos hacer en tales casos para explicitar su solución. Pero, por ejemplo, considere la ecuación

$$y' = (\operatorname{sen} x)y^3 + (\cos x)y^2 + \sqrt{x^2 + 1}\ y + x\sqrt{y}$$

Esta ecuación no es ni de variables separables, ni homogénea, ni lineal, ni exacta, etc. Aún más, encarándola como una ecuación no exacta, etc., ¿será que podemos hallar un factor de integración para tal ecuación? Desgraciadamente no. En otras palabras, ¿vamos a depender de poder explicitar la solución de una ecuación del tipo $y' = f(x,y)$ para garantizar que su solución existe?

Afortunadamente la respuesta a esta pregunta es negativa. Y digo ''afortunadamente'' pues en caso contrario sería sumamente limitado el número de ecuaciones diferenciales de primer orden que se podrían estudiar.

En esta sección nos proponemos pues, estudiar bajo qué condiciones el problema de Cauchy $y' = f(x,y)$ $y_o = y(x_o)$ *tiene* (existencia) solución *única* (unicidad).

En realidad, consideraremos aquí una situación más general que la citada anteriormente.

Vamos a considerar un *sistema* de n ecuaciones diferenciales del tipo

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1\,(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n) \\ y_2' &= f_2\,(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n) \\ &\;\;\vdots \\ y_n' &= f_n\,(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n) \end{aligned} \tag{N}$$

Lo hacemos así pues, una vez mostrado el teorema de existencia y unicidad para este sistema, tendremos inmediatamente (para el caso $n = 1$) el teorema correspondiente para *una* ecuación de primer orden (de las consideradas en el capítulo 2) y además podremos con él establecer el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden n que serán estudiadas en el capítulo 4.

Algunos antecedentes de análisis

Primeramente veamos que el sistema (**N**) puede escribirse en forma compacta (vectorialmente) como

$$y' = f(x,\, y) \tag{O}$$

donde ahora $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ es una función definida en algún abierto U de $\mathbb{R}^{n+1}$ y tomando valores en $\mathbb{R}^n$, por lo que

$$f = (f_1,\, \ldots,\, f_n)$$

donde

$$f_1,\, \ldots,\, f_n\colon\, U \to \mathbb{R}$$

Sea $\phi\colon I \to \mathbb{R}^n$ una función definida en algún intervalo I de la recta, continua (esto es, si $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n\colon I \to \mathbb{R}$ son continuas). Podemos definir la integral de la función ϕ sobre un intervalo $J \subset I$ de la siguiente manera

$$\int_J \phi = \left(\int_J \phi_1,\ \int_J \phi_2,\ \ldots,\ \int_J \phi_n \right)$$

Es decir, la integral de la función ϕ sobre el intervalo J es el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son las integrales de las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n\colon I \to \mathbb{R}$ sobre el intervalo J.

Se puede demostrar que

$$\left| \int_J \phi \right| \leq \left| \int_J |\phi| \right| \tag{P}$$

La demostración puede ser consultada en algún libro de análisis, o ver, por ejemplo, A. P. Kartashov y B. L. Rozhdenstvenski, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Fundamentos del Cálculo Variacional,* Ed. Reverté, p. 28. Veamos ahora una desigualdad que usaremos en la demostración del teorema de existencia y unicidad.

Proposición (1)

Sea $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el abierto convexo* U de $\mathbb{R}^n$ y tomando valores en $\mathbb{R}^n$. Sean $g_1, \ldots, g_n\colon U \to \mathbb{R}$ las funciones componentes de g.

Si estas funciones son tales que

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq K \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \\ \forall\, x \in U \end{array}$$

para alguna $K > 0$, entonces para cualesquiera $x, y \in U$ se tiene que

$$| g(x) - g(y) | \leq n^2 K \, | x - y |^{**}$$

Demostración

Sea $\lambda\colon [0,1] \to U$, $\lambda(t) = y + t(x - y)$, donde $x,y \in U$.
Debido a la convexidad de U, tenemos que efectivamente $\lambda([0,1]) \subset U$.

Formemos la composición $g_i \circ \lambda\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, n)$.

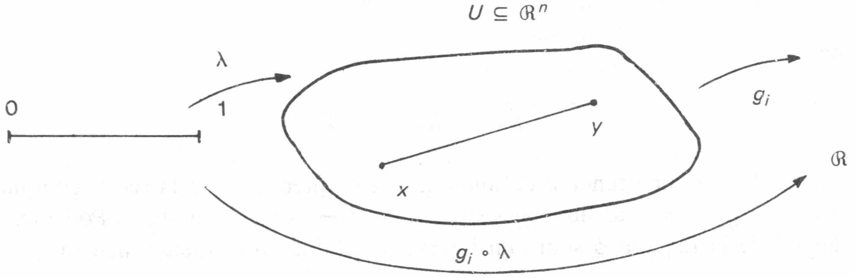


Figura 18. La función $g_i \circ \lambda\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$.

---

* Ver definición de conjunto convexo en la página 118.

** Aquí $|\bullet|$ denota la *norma euclidiana de* $\mathbb{R}^n$, i.e. si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ $|v| = (\Sigma v_i^2)^{1/2}$

Según el teorema del valor medio para la función $g_i \circ \lambda$ tenemos que existe $t_o \in (0, 1)$ tal que

$$(g_i \circ \lambda)\,(1) - (g_i \circ \lambda)\,(0) = (g_i \circ \lambda)'\,(t_o)$$

Pero, según la regla de la cadena

$$(g_i \circ \lambda)'\,(t_o) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\,(\lambda(t_o))\;\lambda_j'(t_o)$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Como

$$\lambda'_j\,(t_o) = x_j - y_j, \text{ donde } x = (x_1, \ldots, x_n),$$

$$y = (y_1, \ldots, y_n)$$

Entonces

$$(g_i \circ \lambda)'\,(t_o) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\,(\lambda(t_o))\,(x_j - y_j)$$

Pero

$$g_i(x) - g_i(y) = (g_i \circ \lambda)(1) - (g_i \circ \lambda)(0)$$

por lo que

$$g_i(x) - g_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, g_i}{\partial\, x_j}\,(\lambda\,(t_o))\,(x_j - y_j)$$

Tomando norma en ambas partes de la ecuación anterior y usando la desigualdad triangular tenemos que

$$|\, g_i(x) - g_i(y)\,| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, g_i}{\partial\, x_j}\,(\lambda\,(t_o))\,(x_i - y_j) \right|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{desigualdad} \\ \text{triangular}}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\lambda(t_o)) \right| \,|\, x_j - y_j\,| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis}}}{\leq} K \sum_{j=1}^{n} |\, x_j - y_j|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{desigualdad} \\ \text{triangular}}}{\leq} K \sum_{j=1}^{n} |\, x - y| = n\,K|x - y\,|$$

Elevando al cuadrado esta desigualdad obtenemos

$$| g_i(x) - g_i(y) |^2 \leq n^2 K^2 | x - y |^2$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} |g_i(x) - g_i(y) |^2 \leq \sum_{i=1}^{n} n^2 K^2 | x - y |^2 = n^3 K^2 |x-y|^2$$

y finalmente

$$| g(x) - g(y) | = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | g_i(x) - g_i(y) |^2} \leq n^{3/2} K | x - y |$$

$$\leq n^2 K | x - y |$$

Q.E.D.

Sigamos viendo algunos resultados de análisis que serán usados en el transcurso de la demostración del teorema que queremos establecer en este apéndice.

Proposición (2)

Sea $C(I, \mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en el intervalo I de la recta y tomando valores en $\mathbb{R}^n$. Sea I el intervalo (compacto) $x_1 \leq x \leq x_2$. Entonces la función $\| \; \|: C(I, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\| \phi \| = \max_{x \in I} | \phi(x) |$$

define una *norma* en* $C(I, \mathbb{R}^n)$, es decir, se cumple que

i) $\| \phi \| \geq 0 \quad \forall \phi \in C(I, \mathbb{R}^n)$, y $\| \phi \| = 0$ si y sólo si $\phi = 0$
ii) $\| C \phi \| = | C | \, \| \phi \| \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad \forall \phi \in C(I, \forall)$
iii) $\| \phi + \psi \| \leq \| \phi \| + \| \psi \| \quad \forall \phi, \psi \in C(I, \mathbb{R}^n)$

Demostración

Usaremos el hecho de que la norma euclidiana es efectivamente una norma.

i) Sea $\phi \in C(I, \mathbb{R}^n)$

Como $| \phi(x) | \geq 0 \Rightarrow \| \phi \| = \max_{x \in I} | \phi(x) | \geq 0$

---

* Esta definición tiene sentido ya que ϕ es una función *continua* definida en el *compacto I.*

Ahora $\|\phi\| = \max\limits_{x \in I} |\phi(x)| = 0 \Leftrightarrow |\phi(x)| = 0 \quad \forall x \in I$

$$\Leftrightarrow \phi(x) = 0 \ \forall\, x \in I, \text{ i.e. } \phi = 0$$

ii) $\|C\,\phi\| = \max\limits_{x \in I} |(C\,\phi)(x)| = \max\limits_{x \in I} |C\,\phi(x)| =$

$$\max_{x \in I} |C|\,|\phi(x)| = |C| \max_{x \in I} |\phi(x)| = |C|\,\|\phi\|$$

iii) $\|\phi + \psi\| = \max\limits_{x \in I} |(\phi + \psi)(x)| =$

$$\max_{x \in I} |\phi(x) + \psi(x)| \leq \max_{x \in I} (|\phi(x)| + |\psi(x)|) \leq$$

$$\max_{x \in I} |\phi(x)| + \max_{x \in I} |\psi(x)| = \|\phi\| + \|\psi\|$$

Q.E.D.

Estaremos interesados ahora en el concepto de ''convergencia'' en el espacio $C(I, \mathbb{R}^n)$. Debemos distinguir dos tipos de convergencia que pueden ocurrir en este espacio: la convergencia simple y la convergencia uniforme.

Definición

Se dice que la sucesión $(\phi_n) \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ *converge simplemente* a la función ϕ si para para cada $x \in I$ se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in N$ tal que

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon \qquad \forall\, n > n_o$$

Es decir, se tendrá convergencia simple de la sucesión (ϕ_n) para la función ϕ si para cada $x \in I$ *fija* se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = \phi(x)$$

Por ejemplo, consideremos el espacio $C(I, \mathbb{R})$ con I el intervalo $[0, 1]$. La sucesión (ϕ_n) dada por $\phi_n(x) = x^n$ converge simplemente para la función $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

En efecto, para cada $x \in [0, 1)$ tenemos $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, mientras que $\lim\limits_{n \to \infty} 1^n = 1$.

Gráficamente esta sucesión se ve como

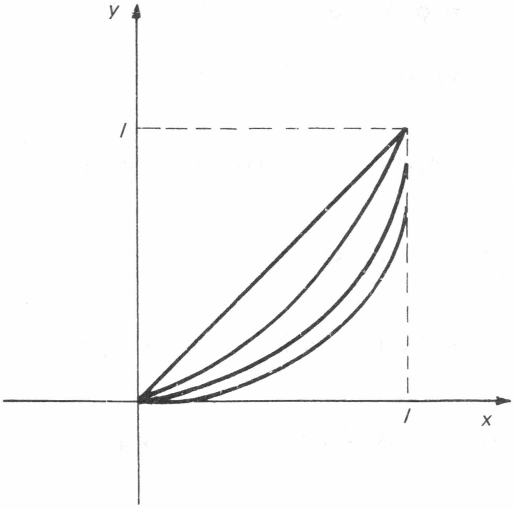


Figura 19. Convergencia puntual de las funciones $\phi_n(x) = x^n$.

Definición

Se dice que la sucesión $(\phi_n) \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ *converge uniformemente* a $\phi \epsilon\, C(I, \mathbb{R}^n)$ si dado $\epsilon > 0\ \exists\ n_o \epsilon\, N$ tal que

$$| \phi_n(x) - \phi(x) | < \epsilon \qquad \forall\, n > n_o \qquad \forall\, x \,\epsilon\, I$$

Así, si $\phi_n \to \phi$ uniformemente, se tiene que $\phi_n \to \phi$ simplemente, pero no al contrario. Es decir, la condición de convergencia uniforme de una sucesión de funciones es más fuerte que la condición de convergencia simple, pudiendo haber sucesiones que converjan simplemente a una función, pero no lo hagan uniformemente (por ejemplo, la sucesión exhibida anteriormente $\phi_n(x) = x^n$ no converge uniformemente a $\phi(x)$, ¿por qué?)

Por ejemplo, en $C(I, \mathbb{R})$, con $I = [a, b]$, la sucesión (ϕ_n) dada por $\phi_n(x) = \dfrac{x}{n}$ converge uniformemente a la función idénticamente nula.

En efecto, sabemos que dado $\epsilon > 0\ \exists\ n_o \epsilon\, N$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{\epsilon}{b}$$

Entonces, $n > n_o \Rightarrow \left| \dfrac{x}{n} \right| < \left| \dfrac{\epsilon}{b} \right| | x | < \epsilon$

quedando así probada la convergencia uniforme de la sucesión.

Gráficamente esta sucesión se ve como

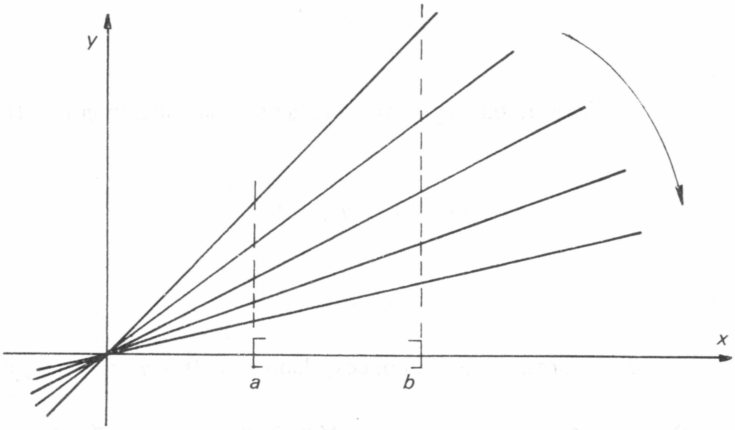


Figura 20. Convergencia uniforme de las funciones $\phi_n(x) = \frac{x}{n}$.

Observe que si $\phi_n \to \phi$ simplemente, ϕ puede no estar en $C(I, \mathcal{R}^n)$, mientras que si $\phi_n \to \phi$ uniformemente, afirmamos que $\phi \epsilon C(I, \mathcal{R}^n)$.

En efecto, sea $\tilde{x} \epsilon I$ arbitraria. Demostraremos que ϕ es continua en $\tilde{x}$.

Como cada elemento de la sucesión (ϕ_n) es una función continua en $\tilde{x}$, tenemos que dado $\epsilon_1 > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que

$$|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |\phi_n(x) - \phi_n(\tilde{x})| < \epsilon_1$$

(n fija pero arbitraria).

Ahora bien,

$$|\phi(x) - \phi(\tilde{x})| = |\phi(x) - \phi_n(x) + \phi_n(x) - \phi_n(\tilde{x}) +$$
$$+ \phi_n(\tilde{x}) - \phi(\tilde{x})| \leq |\phi(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) -$$
$$\phi_n(\tilde{x})| + |\phi_n(\tilde{x}) - \phi(\tilde{x})| \tag{\textbf{Q}}$$

Debido a que $\phi_n \to \phi$ uniformemente, dado $\epsilon_2 > 0 \ \exists \ n_o \epsilon \mathcal{N}$ tal que

$$|\phi(x) - \phi_n(x)| < \epsilon_2 \quad \forall\, n \geq n_o \quad \forall\, x \epsilon I$$

Sea entonces $n \geq n_o$. Tenemos que, en vista de (**Q**)

$$|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(\tilde{x})| < \epsilon_1 + 2\,\epsilon_2$$

Llamando $\epsilon = \epsilon_1 + 2\,\epsilon_2$ obtenemos que, dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que

$$|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(\tilde{x})| < \epsilon$$

i.e. ϕ es continua en $\tilde{x}$. Como $\tilde{x} \epsilon I$ fue arbitrario, entonces $\phi \epsilon C(I, \mathcal{R}^n)$.

Veamos ahora cómo establecer la condición de convergencia uniforme de una sucesión $(\phi_n) \subset C(I, \mathcal{R}^n)$ usando la norma introducida en la proposición (2).

Proposición (3)

La sucesión $(\phi_n) \subset C(I, \mathcal{R}^n)$ converge uniformemente a la función $\phi \in C(I, \mathcal{R}^n)$ si, y solamente si

$$\lim_{n \to \infty} \|\phi_n - \phi\| = 0$$

Demostración

Suponga que $\phi_n \to \phi$ uniformemente. Entonces, dado $\epsilon > 0 \ \exists \ n_o \in N$ tal que

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon \qquad \forall n \geq n_o \qquad \forall x \in I$$

Por lo que

$$\|\phi_n - \phi\| = \max_{x \in I} |\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon \ \forall n \geq n_o$$

esto es

$$\lim_{n \to \infty} \|\phi_n - \phi\| = 0$$

Recíprocamente, si $\lim \|\phi_n - \phi\| = 0$ dado $\epsilon > 0 \ \exists \ n_o \in N$ tal que

$$\|\phi_n - \phi\| = \max_{x \in I} |\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon \ \forall n \geq n_o$$

Pero es claro que

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \max_{x \in I} |\phi_n(x) - \phi(x)| \ \forall x \in I$$

por lo que

$$|\phi_n - \phi(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_o \quad \forall x \in I$$

esto es, $\phi_n \to \phi$ uniformemente

Q.E.D.

Introduzcamos ahora el concepto de sucesión de Cauchy.

Definición

Decimos que la sucesión $(\phi_n) \subset C(I, \mathcal{R}^n)$ es una *sucesión de Cauchy* si dado $\epsilon > 0$ $\exists\ n_o \in N$ tal que

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon \quad \forall\, n,m \geq n_o \quad \forall\, x \in I$$

Establezcamos el siguiente importante resultado:

Proposición (4)

La sucesión $(\phi_n) \subset C(I, \mathcal{R}^n)$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si $\phi_n \to \phi$ uniformemente para alguna $\phi \in C(I, \mathcal{R}^n)$.

Demostración

Supónga que $\phi_n \to \phi$ uniformemente. Entonces dado $\epsilon > 0\ \exists\ n_o \in \mathfrak{N}$, tal que

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n \geq n_o \quad \forall\, x \in I$$

Sea $m \in N$ tal que $m \geq n_o$. Entonces

$$|\phi_m(x) - \phi(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in I$$

Por lo que

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| = |\phi_n(x) - \phi(x) - (\phi_m(x) - \phi(x))| \leq$$

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| + |\phi_m(x) - \phi(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Hemos conseguido probar que dado $\epsilon > 0$ existe un número $n_o \in \mathfrak{N}$ tal que $|\phi_n(x) - \phi_m| < \epsilon$ siempre que n y m sean mayores (o iguales) a n_o y x esté en I.

O sea, (ϕ_n) es una sucesión de Cauchy.

Recíprocamente, si (ϕ_n) es una sucesión de Cauchy para cada $x \in I$, la sucesión $(\phi_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{R}^n$. Como $\mathcal{R}^n$ es un espacio completo (toda sucesión de Cauchy tiene límite) existe, para cada $x \in I$, el límite $\lim\limits_{n \to \infty} \phi_n(x)$.

Definamos $\phi: I \to \mathcal{R}^n$, como

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x)$$

Mostremos que $\phi_n \to \phi$ uniformemente.

Como (ϕ_n) es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0 \ \exists \ n_o \in N$, tal que

$$| \phi_n (x) - \phi_m (x) | < \epsilon \ \forall \ n, m > n_o \ \forall \ x \in I$$

Fijemos n y x, y hagamos $m \to \infty$
Entonces

$$| \phi_n (x) - \phi(x) | < \epsilon \quad \forall \ n > n_o \quad \forall \ x \in I$$

o sea $\phi_n \to \phi$ uniformemente.

Q.E.D.

Veamos una proposición más.

Proposición (5)

Para que la sucesión $(\phi_n) \subset C \ (I, \mathbb{R}^n)$ converja uniformemente, es suficiente que

$$\|\phi_{i+1} - \phi_i\| < a_i$$

donde $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ son los términos de una serie convergente.

Demostración

Sean $n,k \in N$. Entonces

$$\|\phi_{n+k} - \phi_n\| = \|\phi_{n+k} - \phi_{n+k-1} + \phi_{n+k-1} - \phi_{n+k-2} + \ldots +$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n \| \leq$$

$$\|\phi_{n+k} - \phi_{n+k-1}\| + \ldots + \|\phi_{n+1} - \phi_n\| <$$

$$a_{n+k-1} + \ldots + a_n = \sum_{i=n}^{n+k-1} a_i$$

Ahora la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente, esto es, la sucesión $S_N = \sum_{i=1}^{n} a_i$ es convergente. Ésta es una sucesión de números reales positivos. Como esta sucesión es convergente, entonces es una sucesión de Cauchy*.

Esto es, dado $\epsilon > 0 \ \exists \ n_o \in N$ tal que

$$| S_N - S_M | < \epsilon \quad \forall \ N,M \geq n_o$$

---

* En $\mathbb{R}$ una sucesión es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Tomando $N = n+k-1$ y $M = n-1$, tenemos que

$$S_N - S_M = \sum_{i=1}^{n+k-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=n}^{n+k-1} a_i$$

(esto siempre lo podemos hacer, tomando n y/o k suficientemente grandes).

Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathfrak{N}$ tal que

$$\|\phi_{n+k} - \phi_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+k-1} a_i = \left| \sum_{i=n}^{n+k-1} a_i \right| < \epsilon \quad \forall\, n > n_o$$

O sea que (ϕ_n) es una sucesión de Cauchy, por lo que, según la proposición (4), es una sucesión uniformemente convergente.

Q.E.D.

Veamos ahora una proposición respecto de la ecuación diferencial que trabajaremos en el teorema de existencia y unicidad que en breve enunciaremos y demostraremos.

Proposición (6)

$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, $y = \phi(x)$, donde $\phi: I \to \mathbb{R}^n$ (I algún intervalo de la recta), es una solución de la ecuación diferencial (vectorial) (**O**), esto es

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

es una identidad (vectorial), tal que $\phi(x_o) = y_o$ (condición inicial), si y solamente si

$$\phi(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi(\tau))\, d\tau$$

Demostración

En efecto, suponga que ϕ es una solución de la ecuación (**O**). Entonces como

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

tenemos que, integrando de x_o a x

$$\int_{x_o}^{x} \phi'(x)\,dx = \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi(\tau))\, d\tau$$

Pero

$$\int_{x_o}^{x} \phi'(x)\, dx = \left(\int_{x_o}^{x} \phi'(x)dx, \ldots, \int_{x_o}^{x} \phi'(x)dx \right)$$

$$= (\phi_1(x) - \phi_1(x_o), \ldots, \phi_n(x) - \phi_n(x_o))$$

$$= \phi(x) - \phi(x_o)$$

por lo que

$$\phi(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi(\tau))\, d\tau$$

Recíprocamente, suponga válida la relación anterior.

Entonces, derivando respecto de x (y en vista del teorema fundamental de cálculo) obtenemos

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

y además es evidente que $\phi(x_o) = y_o$. **Q.E.D.**

La proposición anterior nos dice que ϕ es solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ satisfaciendo $\phi(x_o) = y_o$ si y solamente si es solución de la ecuación integral

$$\phi(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi(\tau))\, d\tau$$

Otro modo de expresar esta idea es como sigue. Sea

$$\phi^*(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi(\tau))\, d\tau$$

o bien, pensando en términos de operadores, sea el operador $A\colon C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\phi^* = A\,\phi$$

con ϕ^* definido por $\phi^*(x)$ como anteriormente.

Entonces, la función ϕ: $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ será la solución de la ecuación diferencial que estamos considerando si y sólo si

$$\phi = A\phi$$

Con esto tenemos ya las suficientes herramientas e ideas para enunciar y demostrar nuestro teorema de existencia y unicidad.

Teorema de existencia y unicidad

Sea

$$y' = f(x,y)$$

una ecuación diferencial (vectorial) con f: $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función definida en un cierto abierto U de $\mathbb{R}^{n+1}$ (entendamos que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, de modo que $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^{n+1}$). Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ con $f_1, \ldots, f_n$: $U \rightarrow \mathbb{R}$, asumamos que las funciones f_i, junto con sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$: $U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, son *continuas* en U (observe que pedimos continuidad para las derivadas de las funciones f_i respecto de sus últimas n variables, donde se denota $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$).

Entonces, para cada punto $(x_o, y_{1_o}, y_{2_o}, \ldots y_{n_o}) \in U$ *existe* una solución $y = \phi(x)$, donde ϕ: $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (I es algún intervalo de la recta que contiene al punto x_o) tal que

$$y_o = (y_{1_o}, y_{2_o}, \ldots y_{n_o}) = \phi(x_o)$$

Además, si hubiese dos soluciones $y = \phi(x)$ y $y = \psi(x)$, satisfaciendo las condiciones

$$y_o = (y_{1_o}, y_{2_o}, \ldots y_{n_o}) = \phi(x_o) = \psi(x_o)$$

entonces $\phi(x) = \psi(x)$ para toda x en la intersección de los dominios de definición de ϕ y ψ.

Demostración

Como $(x_o, y_o) \in U$, siendo U abierto, existen reales positivos q y a tales que

$$\Pi = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x - x_o| \leq q, |y - y_o| \leq a \} \subset U$$

Ciertamente Π es un compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, las funciones f: $\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$, y $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$: $\Pi \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ (restricciones al conjunto Π de las dadas en el enunciado del teorema) están acotadas (pues por hipótesis son continuas* y su dominio se ha restringido a un compacto). O sea, existen constantes positivas M y K tales que

---

* Según las hipótesis del teorema, las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son continuas, por lo que la función $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es continua.

$$| f(x,y) | \leq M \qquad \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} (x,y) \right| \leq K \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

$$\forall\ (x,y) \in \Pi$$

Sea k un número real $0 < k < 1$.

Sea

$$r \leq \text{mín } (q, \frac{a}{M}, \frac{k}{n^2 K})$$

Consideremos ahora el conjunto Π_r, subconjunto de Π definido como

$$\Pi_r = \{ (x,y) \in \mathcal{R}^{n+1} \,\Big|\, | x - x_o | \leq r, | y - y_o | \leq a \}$$

y sea Ω_r la familia de todas las funciones a valores en $\mathcal{R}^n$, continuas, definidas en el intervalo $| x - x_o | \leq r$, cuyas gráficas se encuentran en Π_r. Es decir

$$\Omega_r = \{ \phi\colon [x_o - r, x_o + r] \to \mathcal{R}^n \mid \phi ([x_o - r, x_o + r]) \subset \Pi_r \}$$

Es claro que $\Omega_r \subset C ([x_o - r, x_o + r], \mathcal{R}^n)$

Observe que $\phi\colon [x_o - r, x_o + r] \to \mathcal{R}^n$ pertenece al conjunto Ω_r si y solo si se cumple que

$$| \phi(x) - y_o | \leq a \quad \forall\, x \in [x_o - r, x_o + r]$$

En efecto, suponga que $\phi \in \Omega_r$. Como

$$\phi ([x_o - r, x_o + r]) \subset \Pi_r \Rightarrow | \phi (x) - y_o | \leq a$$

$$\forall\, x \in [x_o - r, x_o + r]$$

Recíprocamente, si $| \phi (x) - y_o | \leq a \quad \forall\, x \in [x_o - r, x_o - r]$ es evidente, por la propia definición de Π_r, que $\phi \in \Pi_r$. Se considera al operador $A\colon \Pi_r \to C ([x_o - r, x_o + r], \mathcal{R}^n)$ definido de la siguiente manera: si $\phi \in \Omega_r$, $\phi^* = A\, \phi$ es

$$\phi^* (x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi (\tau))\, d\tau$$

Se puede afirmar que en realidad A aplica Ω_r en Ω_r, i.e.

$$A\colon \Omega_r \rightarrow \Omega_r.$$

Para ver que esto es verdad, tenemos que probar que si

$$\phi \in \Omega_r \Rightarrow \phi^* = A\phi \in \Omega_r$$

Observe que

$$| \phi^* (x) - y_o | = \left| \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi (\tau))\, d\tau \right|$$

pero, según lo visto en páginas anteriores

$$\left| \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi (\tau))\, d\tau \right| < \left| \int_{x_o}^{x} |f(\tau, \phi (\tau))|\, d\tau \right| \leq Mr \leq a$$

por lo que $| \phi^*(x) - y_o | \leq a$, o sea $\phi^* \in \Omega_r$.

Por otra parte, si $\psi, \chi \in \Omega_r$, entonces

$$\|A\psi - A\chi\| \leq k \|\psi - \chi\|$$

(donde $0 < k < 1$ es el número escogido anteriormente, cuando se definió r). Aquí $\| \|$ es la norma introducida en la proposición (2).

En efecto

$$| \psi^*(x) - \chi^*(x) | = \left| \int_{x_o}^{x} (f(\tau, \psi (\tau) - f (\tau, \chi(\tau)))\, d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_o}^{x} |f (\tau, \psi (\tau)) -- f(\tau, \chi (\tau))|\, d\tau \right|$$

Según la proposición (1) tenemos

$$| f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau)) | \leq n^2K | \psi(\tau) - \chi(\tau) |$$

Entonces

$$| \psi^*(x) - \chi^*(x) | \leq n^2Kr \max_{\tilde{x} \in [x_o, x]} | \psi(\tilde{x}) - \chi(\tilde{x}) |$$

por lo que

$$\max_{x \in [x_o - r, x_o + r]} | \psi^*(x) - \chi^*(x) | \leq n^2Kr \max_{x \in [x_o - r, x_o + r]} | \psi(x) - \chi(x) |$$

o sea

$$\|A\psi - A\chi\| = \|\psi^* - \chi^*\| \leq n^2Kr \|\psi - \chi\| \leq k \|\psi - \chi\|$$

como queríamos ver.

Resumiendo, tenemos un operador $A: \Omega_r \rightarrow \Omega_r$, tal que

$$\|A\psi - A\chi\| \leq k \|\psi - \chi\| \quad 0 < k < 1$$

Decimos que A es una aplicación *contractiva* pues en realidad $\|\psi - \chi\|$ es la distancia entre ψ y χ, y el operador A *contrae* entonces distancias, como se muestra esquemáticamente en la siguiente figura

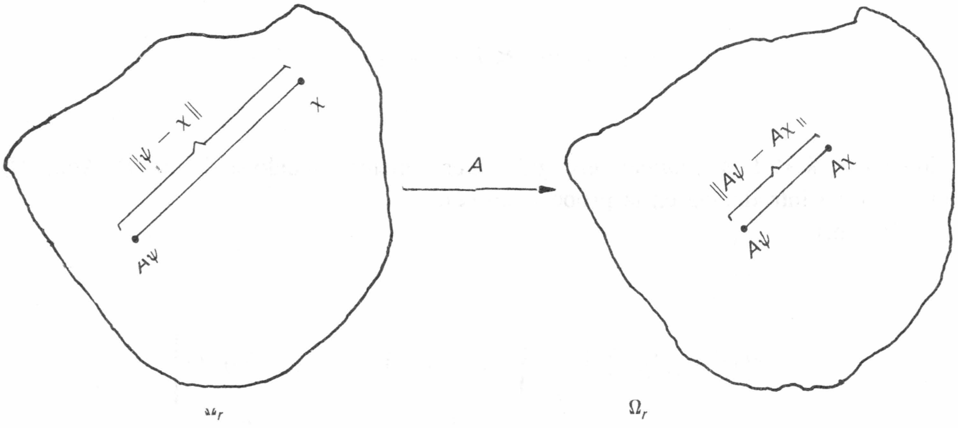


Figura 21. Aplicación contractiva $A: \Omega_r \rightarrow \Omega_r$.

Construyamos entonces ahora la sucesión $(\phi_n) \subset \Omega_r$ definida por

$$\begin{aligned} \phi_o &= y_o \\ \phi_{n+1} &= A\phi_n \qquad\qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

(Según la discusión anterior *todos* los términos de la sucesión se encuentran en Ω_r).

Se puede afirmar que $\phi_n \to \phi$ uniformemente para alguna función ϕ con $\phi \in \Omega_r$.

En efecto

$$\|\phi_{i+1} - \phi_i\| = \|A\phi_i - A\phi_{i-1}\| \leq k\,\|\phi_i - \phi_{i-1}\|$$

$$\leq k^2\,\|\phi_{i-1} - \phi_{i-2}\| \leq \ldots \leq k^i\,\|\phi_1 - \phi_o\|$$

Pero

$$\|\phi_1 - \phi_o\| = \max_{x \in [x_o - r,\, x_o + r]} |\phi_1(x) - y_o| \leq a$$

Por lo que

$$\|\phi_{i+1} - \phi_i\| \leq a\,k^i$$

Ahora, la serie $\sum_i a\,k^i$ es una serie geométrica convergente, pues $0 < k < 1$, por lo que, en virtud de la proposición (5), la sucesión $(\phi_n) \subset \Omega_r$ converge uniformemente.

La función ϕ a la cual tiende la sucesión (ϕ_n) es solución de la ecuación diferencial.

En efecto, como

$$\|A\phi - A\phi_n\| \leq k\,\|\phi - \phi_n\|$$

y $\lim_{n\to\infty} \|\phi - \phi_n\| = 0$ (ver proposición (3)) entonces $\lim_{n\to\infty} \|A\phi - A\,\phi_n\| = 0$ por lo que $A\phi_n \to A\phi$ uniformemente.

Entonces, tomando límite cuando $n \to \infty$ en $\phi_{n+1} = A\,\phi_n$ obtenemos que

$$\phi = A\phi$$

es decir ϕ satisface la ecuación integral

$$\phi(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, \phi(\tau))\, d\tau$$

por lo que, según la proposición (6), ϕ es una solución de la ecuación dada satisfaciendo las condiciones dadas.

Resumiendo, hemos demostrado que *existe* una función ϕ: $[x_o - r, x_o + r] \to \mathcal{R}^n$, $y = \phi(x)$ solución de nuestra ecuación $y' = f(x,y)$ satisfaciendo la condición inicial $y_o = \phi(x_o)$.

Probemos ahora la unicidad.

Suponga que existen dos soluciones ϕ y ψ satisfaciendo $y_o = \phi(x_o) = \psi(x_o)$. Sea J la intersección de los intervalos de definición de ϕ y ψ.

Sea

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \{ x \in J \mid \phi(x) = \psi(x) \} \subset J$$

Probemos que $\widetilde{\mathcal{R}}$ es un abierto en J.

Sea $x_1 \in \widetilde{\mathcal{R}}$. Entonces ϕ y ψ son soluciones

$$\phi: [x_1 - r_1, x_1 + r_1] \to \mathcal{R}^n$$

$$\phi: [x_1 - r_2, x_1 + r_2] \to \mathcal{R}^n$$

donde

$$r_1 \leq \text{mín}\ (q_1, \frac{a_1}{M}, \frac{k}{n^2K})$$

$$r_2 \leq \text{mín}\ (q_2, \frac{a_2}{M}, \frac{k}{n^2K})$$

(con la misma notación usada en la demostración de la parte de existencia).

Tomamos el mismo número k para ambos casos.

Sea $q = \text{mín}\ (q_1, q_2)$, $a = \text{mín}\ (a_1, a_2)$, y sea

$$r \leq \text{mín}\ (q_2, \frac{a}{M}, \frac{k}{n^2K})$$

Ciertamente $r \leq r_1$ y $r \leq r_2$. Se deja verificar al lector que

$$\phi, \psi \in \Omega_r = \{ \phi: [x_1 - r, x_1 + r] \to \mathcal{R}^n \mid \phi([x_1 - r, x_1 + r]) \subset \Pi_r \}$$

donde

$$\Pi_r = \{ (x, y) \in \mathcal{R}^{n+1} \;\Big|\; |x - x_o| \leq r, |y - y_o| \leq a \}$$

Observe además que por ser ϕ, ψ soluciones, se cumple que $\phi = A\phi$ y $\psi = A\psi$. Entonces

$$\|\phi - \psi\| = \|A\phi - A\psi\| \underset{\text{por estar } \phi,\ \psi\ \epsilon\ \Omega_r}{\leq} k\,\|\phi - \chi\|$$

Como $0 < k < 1$, la relación anterior implica $\|\phi - \psi\| = 0$, lo cual a su vez implica que $\phi = \psi$, es decir que ϕ y ψ coinciden en todo el intervalo $[x_1 - r, x_1 + r] \subset J$, por lo que $\widetilde{\mathcal{R}}$ es un abierto en J.

Probemos ahora que $\widetilde{\mathcal{R}}$ es cerrado en J.

Sea $(x_n) \subset \widetilde{\mathcal{R}}$ una sucesión que converge a $\tilde{x}$. Entonces, por estar $x_n \ \epsilon\ \widetilde{\mathcal{R}}$ para todo n, tenemos que

$$\phi(x_n) = \psi\,(x_n)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ y usando la continuidad de ϕ y ψ obtenemos que

$$\phi(\tilde{x}) = \psi\,(\tilde{x})$$

por lo que $\tilde{x}\ \epsilon\ \widetilde{\mathcal{R}}$. O sea, $\widetilde{\mathcal{R}}$ es cerrado en J.

Ciertamente $\widetilde{\mathcal{R}} \neq \phi$, pues $x_o\ \epsilon\ \widetilde{\mathcal{R}}$.

Hemos probado que $\widetilde{\mathcal{R}}$ es un conjunto no vacío el cual es *abierto* y *cerrado* a la vez en el intervalo (que es un conexo) J.

Entonces* $\widetilde{\mathcal{R}} = J$ y queda así probada la parte de unicidad del teorema.

Q.E.D.

Comentarios finales

Volveremos a enunciar el teorema de existencia y unicidad mostrado anteriormente para el caso $n = 1$.

Sea

$$y' = f(x, y)$$

una ecuación diferencial de primer orden. Suponemos que $f\colon U \to \mathcal{R}$ es una función definida en el abierto $U \subset \mathcal{R}^2$ (en donde viven (x, y)) y que esta función junto con $\dfrac{\partial f}{\partial y}\colon U \to \mathcal{R}$ son continuas en U. Entonces:

1. Por cada punto $(x_o, y_o)\ \epsilon\ U$ existe una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación dada satisfaciendo la condición inicial $y_o = \phi(x_o)$.

---

* Sea $U \subset \mathcal{R}^n$ un conjunto conexo. Si $V \subset U$ es tal que $V \neq \phi$ y V es cerrado y abierto a la vez (en U), entonces $V = U$. Demostración: U es la unión del conjunto V (abierto) con el conjunto $U - V$ (àbierto). Como $V \neq \phi$ entonces (por ser U conexo) $U - V = \phi$, o sea $V = U$.

2. Si dos soluciones $y = \phi(x)$ y $y = \psi(x)$ de la ecuación dada coinciden en el punto (x_o, y_o), i.e. si $\phi(x_o) = \psi(x_o) = y_o$, entonces estas dos soluciones son idénticas para todos los valores de x para los cuales están definidas ambas.

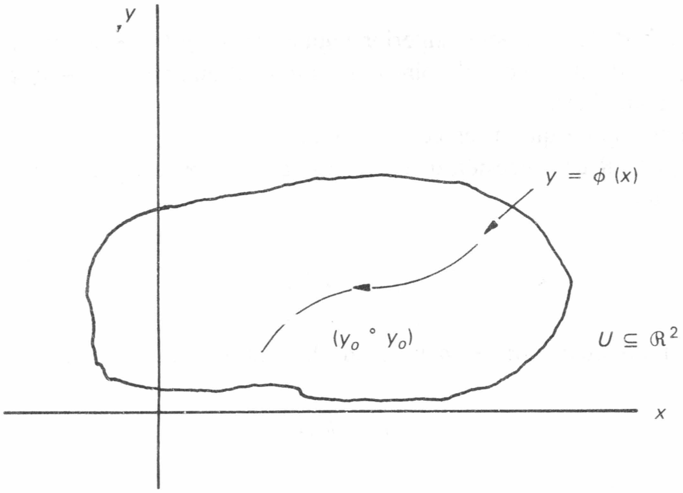


Figura 22. Existencia y unicidad de soluciones para la ecuación $y' = f(x, y)$.

Por ejemplo, la ecuación $y' = y$ tiene una única solución que pasa por (0, 1), pues se satisfacen todas las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Sabemos que $y = e^x$ es esta solución, pero veamos cómo la demostración del teorema nos ha proporcionado un método para construir esta solución.

En este caso $f(x, y) = y$.

Formamos la sucesión de funciones (ϕ_n) definida por

$$\phi_o(x) = y_o = 1$$

$$\phi_{n+1}(x) = y_o + \int_0^x f(\tau, \phi_\nu(\tau))\, d\tau$$

$$= 1 + \int_0^x \phi_n(\tau)\, d\tau$$

Ya demostramos que $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformemente, donde ϕ es *la solución* de la ecuación dada satisfaciendo la condición inicial dada. Entonces, las funciones $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ dan aproximaciones sucesivas a nuestra solución. Tenemos

$$\phi_o(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = 1 + \int_0^x 1\, d\tau = 1 + x$$

$$\phi_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + \tau)\, d\tau = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$\phi_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!})\, d\tau = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\phi_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

Así pues

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

CAPÍTULO 3

Aplicaciones

> La matemática es bonita,
> intelectualmente estimulante
> —incluso útil.
>
> IAN STEWART

1. APLICACIONES A LA MECÁNICA

Veremos en esta sección algunas de las aplicaciones más relevantes de las ecuaciones diferenciales en la mecánica (en la dinámica más concretamente). El objetivo fundamental en todos los problemas que aparecerán aquí será siempre el de *describir el movimiento de cuerpos*. ¿Qué debemos entender por esto? Sabemos que en el fenómeno físico de un cuerpo en movimiento se encuentran involucrados ciertos parámetros que son fundamentales para poder estudiar adecuadamente tal fenómeno, por ejemplo, nos gustaría saber qué *velocidad* (v) lleva el cuerpo a un *tiempo* (t) determinado, cuál ha sido su *desplazamiento* (x) después de cierto tiempo, o bien, después de una cierta distancia recorrida, qué velocidad o qué *aceleración* (a) lleva éste, etc. La descripción del movimiento se logrará entonces con el establecimiento de relaciones entre estos parámetros.

Para lograr tal objetivo se usarán principios básicos muy simples de la mecánica, como lo es la 2a. Ley de Newton que establece que la fuerza (F) que actúa en un cuerpo de masa (m), es (directamente) proporcional a la variación instantánea de la cantidad de movimiento del mismo (que se define como el producto de la masa por la velocidad), es decir:

$$F = k \frac{d}{dt}(m\,v)$$

donde k es la constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades usado. Para los sistemas de unidades ''usuales'' tendremos siempre $k = 1$, quedándonos entonces expresada la segunda Ley de Newton como:

$$F = \frac{d}{dt}(m\,v)$$

Si m no depende de t (cosa que no siempre ocurre —véase los ejemplos mec. 5 y mec. 9), entonces queda:

$$F = m \frac{d}{dt} v = m\ a$$

donde $a = \frac{dv}{dt}$ es la aceleración del cuerpo (que es la variación instantánea de la velocidad, o bien, como la velocidad es a su vez la variación instantánea del desplazamiento, i.e. $v = \frac{dx}{dt}$, en términos de este último tendremos que $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$)

En algunas ocasiones usaremos la expresión de la 2a. Ley de Newton como

$$F = m\ v \frac{dv}{dx}$$

la cual se obtiene de la establecida anteriormente observando que, por la regla de la cadena

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

Una idea central que usaremos para plantear la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de un cuerpo (de cuya solución podremos obtener la descripción del movimiento de la que hablábamos anteriormente) es la siguiente: supongamos que el fenómeno de movimiento del cuerpo que estamos estudiando lo comenzamos a observar a los t_o seg, momento en el cual se encontraba a x_o m del punto referencial que tengamos y llevaba a ese instante una velocidad de v_o m/seg*. Después de un cierto tiempo t, pensemos que "fotografiamos" al cuerpo en movimiento (tal fotografía la tomamos justo al *instante t*).

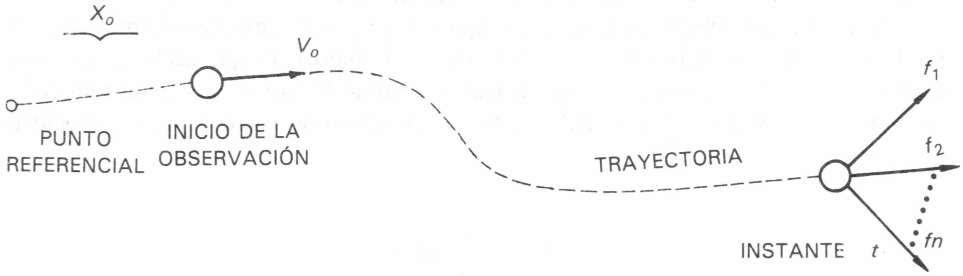


Figura 1. Movimiento de un cuerpo.

En tal fotografía aparece el cuerpo sometido a la acción de las fuerzas $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Entonces, según la 2a. Ley de Newton, tendremos que la fuerza *neta* que actúa sobre el cuerpo (de masa m) en ese instante es:

(*) En términos de las funciones $v(t)$ y $x(t)$ decimos que $v(t_0) = v_0$ y $x(t_0) = x_0$ son las "condiciones iniciales" del problema.

$$\frac{d}{dt}(m\,v) = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

siendo ésta entonces la ecuación diferencial que describe el fenómeno.

Resulta muy conveniente observar que tanto en el lado derecho como en el izquierdo de la última ecuación aparecen magnitudes *vectoriales* (fuerzas).

Por lo tanto resultará de primera importancia fijar un sistema referencial que nos diga a partir de dónde estamos midiendo estas magnitudes (*i.e.* fijar el origen) y establecer una *dirección de positividad* de las mismas, a la cual estarán también sujetas todas las otras magnitudes vectoriales que aparecen en la descripción del movimiento (desplazamiento, velocidad, aceleración).

Veamos funcionar estas ideas en algunos ejemplos.

MEC. 1 (Descripción del movimiento uniformemente acelerado).

Nos proponemos describir el movimiento de un cuerpo de masa m el cual se mueve con una aceleración constante a, siendo v_0 su velocidad inicial (al tiempo $t_0 = 0$). El desplazamiento inicial del cuerpo es $x_0 = 0$.

Solución

A un tiempo t, la única fuerza que actúa en el cuerpo es $m\,a$, de modo que

$$m\,\frac{dv}{\mathrm{dt}} = m\,a$$

o

$$\frac{dv}{dt} = a$$

(Tomamos la dirección de positividad la canónica del eje x) de donde

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt$$

o sea

$$v - v_0 = a\,t$$

o

$$\boxed{v = v_0 + a\,t}$$

También, como $v = \frac{dx}{dt}$ tenemos

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a\,t$$

de donde

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_0 + a\ t\ )\ dt$$

o

$$\boxed{x = v_0\ t + \tfrac{1}{2}\ a\ t^2}$$

Finalmente podemos usar la regla de la cadena para escribir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\ \frac{dv}{dx}$$

de modo que la ecuación diferencial del movimiento quedaría como

$$v\ \frac{dv}{dx} = a$$

de donde

$$\int_{v_0}^{v} v\ dv = \int_0^t a\ dx$$

o

$$\tfrac{1}{2}\ (v^2 - v_O^2) = a\ \ x$$

$$\boxed{v^2 = v_O^2 + 2\ a\ \ x}$$

MEC. 2

Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_O. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, encuentre la altura máxima alcanzada por el cuerpo, el tiempo total de vuelo y la velocidad con la que llega nuevamente al punto de partida. Verifique que el tiempo que toma el cuerpo en alcanzar su punto de mayor altura es el mismo que toma para regresar de ese punto al punto de partida.

Solución

A un tiempo t el cuerpo está sometido solamente a la acción de la fuerza de gravedad (*i.e.* la única fuerza que actúa es su peso). Hemos considerado la dirección de positividad de nuestras magnitudes (desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza) de abajo hacia arriba.

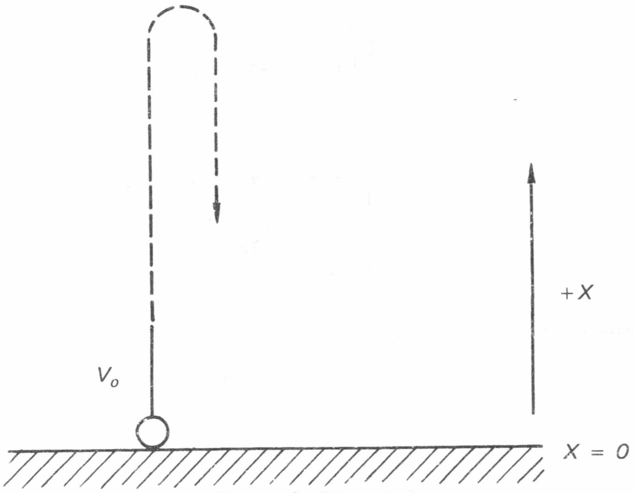


Figura 2. Ejemplo 2.

Un diagrama de cuerpo libre a un tiempo *t* sería

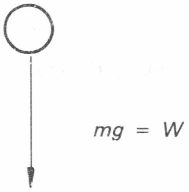


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre para el ejemplo 2.

entonces

$$m\frac{dv}{dt} = -m\ g$$

(el signo es debido a que el vector $m \cdot g$ va en dirección contraria a la dirección de positividad que establecimos para nuestras magnitudes).
De modo que

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

o

$$v\frac{dv}{dx} = -g$$

$$v\ dv = -g\ dx$$

Como en $x_{\text{máx}}$ tenemos que $v = 0$, entonces

$$\int_{v_0}^{0} v dv = -g\int_{0}^{x_{\text{máx}}} dx$$

de donde

$$-\tfrac{1}{2}v_O^2 = -g\ x_{\text{máx}}$$

o

$$\boxed{x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Por otra parte, como

$$dv = -g\ dt$$

tenemos que

$$\int_{v_o}^{v} dv = -g\int_0^t dt$$

de donde

$$v = v_0 - g\ t$$

Cuando $v = 0$ obtenemos el tiempo de ascenso t_A

$$t_A = \frac{v_0}{g}$$

Para calcular el tiempo de descenso t_D podemos proceder como sigue. Sabemos que de regreso el cuerpo recorre una distancia de $x_{\text{máx}} = \dfrac{v_o^2}{2g}$, habiendo comenzado su movimiento con una velocidad nula. Entonces, como

$$dv = -g\ dt$$

tenemos

$$\int_0^v dv = -g\int_0^t dt$$

$$v = -g\ t$$

de donde

$$\int_{x_{\text{máx}}}^{0} dx = -g\int_0^{t_D} t\ dt$$

$$-x_{\text{máx}} = -g\,\frac{t_D^2}{2}$$

$$\frac{v_o^2}{2g} = g\,\frac{t_D^2}{2}$$

de donde

$$t_D = \frac{v_o}{g} = t_A$$

(el signo menos lo despreciamos, pues siempre consideramos el tiempo como una cantidad positiva).

Tenemos entonces nuestros resultados gráficamente como sigue

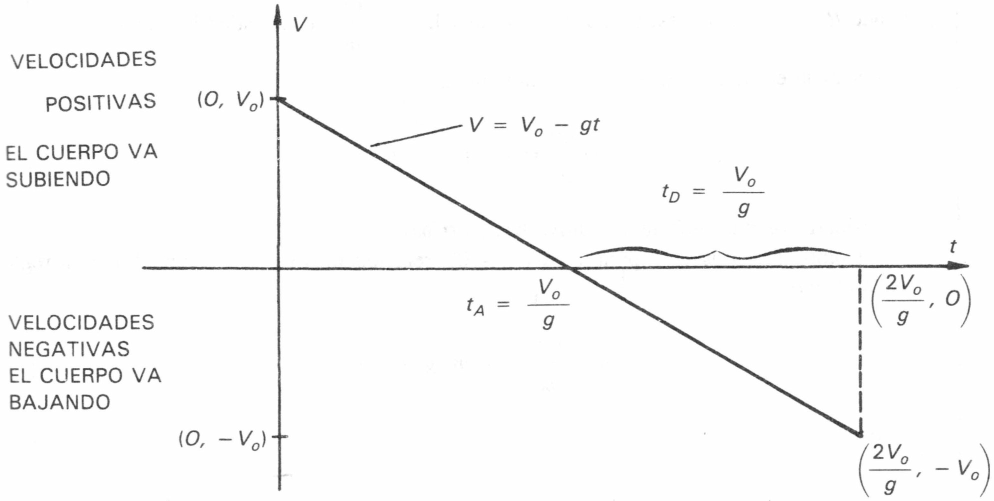


Figura 4. Interpretación geométrica de la solución del ejemplo 2.

De modo que el tiempo total de vuelo es

$$t = \frac{2v_o}{g}$$

De la gráfica anterior es claro que la velocidad con la que el cuerpo llega de nuevo al punto de partida es $-v_o$.

MEC. 3

Un cuerpo de masa m es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_o. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea del cuerpo, siendo la constante proporcionalidad k. Encuentre la altura máxima alcanzada, el tiempo que lleva en alcanzar tal altura y el tiempo de descenso. Compare con el ejercicio anterior.

Solución

El fenómeno es exactamente el mismo que el estudiado en el ejemplo anterior, sólo que ahora vamos a tomar en cuenta la resistencia que ofrece el aire (medio) al movimiento del cuerpo.

Durante el movimiento de ascenso, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son

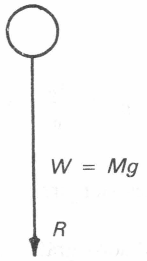


Figura 5. Diagrama de cuerpo libre para el movimiento de ascenso del cuerpo en el ejemplo 3.

donde $R = k\ v$ es la resistencia del aire, siendo $v = \dfrac{dx}{dt}$ su velocidad instantánea.

Entonces la ecuación diferencial del movimiento es

$$m \frac{dv}{dt} = - m\ g - k\ v$$

(Consideramos nuevamente x positiva hacia arriba).

Como buscamos $x_{\text{máx}}$ (para la cual $v = 0$), relacionamos v con x por medio de la regla de la cadena

$$m\ v \frac{dv}{dx} = - m\ g - k\ v$$

de donde

$$\int_{v_0}^{0} \frac{m\ v\ dv}{m\ g + k\ v} = - \int_{0}^{x_{\text{máx}}} dx$$

entonces

$$x_{\text{máx}} = \int_{0}^{v_0} \frac{m\ v\ dv}{m\ g + k\ v}$$

Tenemos que

$$\int_{0}^{v_0} \frac{m\ v\ dv}{m\ g + k\ v} = \frac{m}{k} \int_{0}^{v_0} \frac{(m\ g + k\ v - m\ g)\ dv}{m\ g + k\ v} =$$

$$= \frac{m}{k} \int_{0}^{v_0} dv - \frac{m^2 g}{k^2} \int_{0}^{v_0} \frac{k\ dv}{m\ g + k\ v} =$$

$$= \frac{m}{k}\ v_0 - \frac{m^2 g}{k^2}\ ln \left(\frac{m\ g + k\ v_0}{m\ g} \right)$$

o sea

$$\boxed{x_{\text{máx}} = \frac{m\ v_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\ ln\left(1 + \frac{k\ v_0}{m\ g}\right)}$$

Calculamos el tiempo (t_A) que toma el cuerpo en alcanzar $x_{\text{máx}}$. De

$$m\frac{dv}{dt} = -\ m\ g - k\ v$$

tenemos que

$$\int_{v_0}^{0} \frac{m\ dv}{m\ g + k\ v} = -\int_{0}^{t_A} dt$$

de donde

$$t_A = \int_{0}^{v_0} \frac{m\ dv}{m\ g + k\ v} = \frac{m}{R}\ ln\left(1 + \frac{k\ v_0}{mg}\right)$$

$$\boxed{t_A = \frac{m}{k}\ ln\left(1 + \frac{k\ v_0}{mg}\right)}$$

Pasamos a considerar ahora el movimiento de descenso.

Para evitar problemas con los signos de las fuerzas involucradas, cambiemos nuestro sistema referencial tomando ahora $t = 0$ y $x = 0$ en el punto máximo de la trayectoria y tomando la dirección de positividad de nuestras magnitudes de arriba hacia abajo

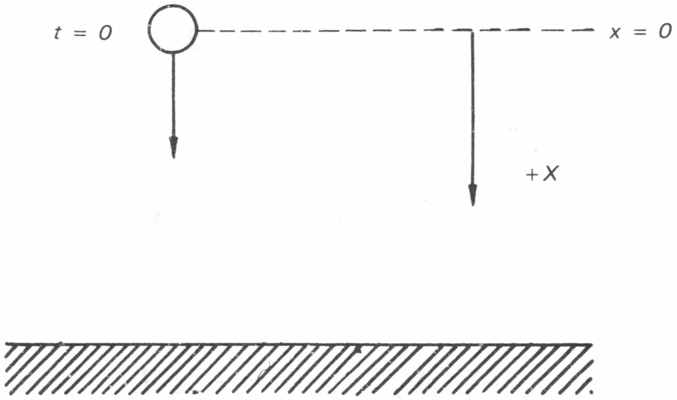


Figura 6. Nuevo sistema referencial para el movimiento de descenso del cuerpo en el ejemplo 3.

Durante el descenso hay que observar que las fuerzas que actúan (la resistencia del aire y el peso) están ahora como sigue

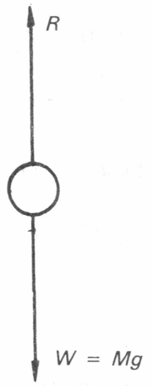


Figura 7. Diagrama de cuerpo libre para el movimiento de descenso del cuerpo en el ejemplo 3

de modo que la ecuación diferencial del movimiento es

$$m \frac{dv}{dt} = m\,g - k\,v$$

entonces

$$\int_0^v \frac{m\,dv}{m\,g - k\,v} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{k\,v}{m\,g} \right) = t$$

de donde

$$v = \frac{m\,g}{k} \left(1 - e^{-\frac{k\,t}{m}} \right)$$

Haciendo $v = \frac{dx}{dt}$ e integrando

$$\int_0^x dx = \frac{m\,g}{k} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{k\,t}{m}} \right) dt$$

$$x = \frac{m\,g}{k} \left[t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k\,t}{m}} - \frac{m}{k} \right]$$

Cuando $x = x_{\text{máx}}$ tenemos t = tiempo de descenso ($=t_D$). Entonces

$$\frac{m\,g}{k}\,t_D + \frac{m^2\,g}{k^2}\,e^{-\frac{k\,t_D}{m}} = x_{\text{máx}} + \frac{m^2\,g}{k^2}$$

Para conocer t_D habrá que resolver numéricamente esta ecuación. De cualquier modo, es evidente que $t_A \neq t_D$ en general. Por ejemplo, si $m = 1$ kg, $v_o = 10$ m/seg, g = 9.8 m/seg^2 y con algunos valores de k, obtenemos los siguientes datos

k(kg/seg)	$x_{\text{máx}}$ (m)	t_A (seg)	t_D (seg)	v_F (m/seg)(*)
1	3.107664	0.703299	0.917653	5.8853
0.5	3.84	0.82449	0.95566	7.4455
0.1	4.77952	0.97164	1.0042	9.36317
0.01	5.0676	1.01523	1.0189	9.9345

(*) Velocidad con que el cuerpo regresa al punto de partida.

Se calcula de la fórmula obtenida anteriormente

$$v = \frac{m\,g}{k}\left(1 - e^{-\frac{k\,t}{m}}\right) \quad \text{con } t = t_D$$

Observe que $\dfrac{t_A}{t_D} \to 1$ y $\dfrac{v_o}{v_F} \to 1$ cuando $k \to 0$.

MEC. 4

Un paracaidista junto con su paracaídas pesan W newtons. Cuando el paracaídas se abrió, el paracaidista venía cayendo a una velocidad de v_o m/seg. Si la fuerza de resistencia que ofrece el aire a la caída es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y si la resistencia del aire es de F newtons cuando la velocidad es de V m/seg, encuentre la relación que existe entre la velocidad y el tiempo y entre la velocidad y la distancia recorrida.

Solución

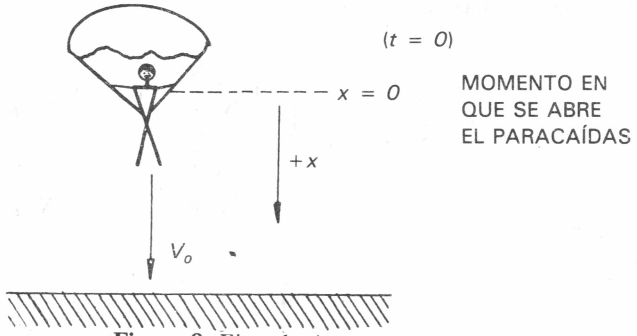


Figura 8. Ejemplo 4.

A un tiempo t tenemos

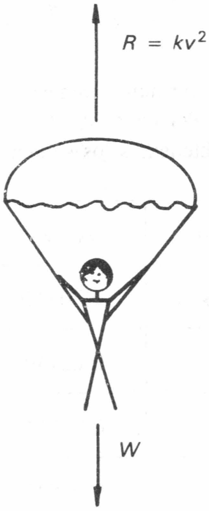


Figura 9. Diagrama de cuerpo libre para el ejemplo 4.

Como $R = F$ cuando $v = V$, tenemos que $k = \dfrac{F}{V^2}$ de modo que $R = \dfrac{F}{V^2} v^2$.

Entonces la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = W - \frac{F}{V^2} v^2$$

de donde

$$\int_{v_o}^{v} \frac{\frac{w}{g}\, dv}{W - \frac{F}{V^2} v^2} = \int_{0}^{t} dt$$

Resolviendo la integral nos queda

$$t = \frac{V}{2g}\sqrt{\frac{W}{F}}\, ln \left[\frac{V\sqrt{\frac{W}{F}} + v}{V\sqrt{\frac{W}{F}} - v} \cdot \frac{V\sqrt{\frac{W}{F}} - v_o}{V\sqrt{\frac{W}{F}} + v_o} \right]$$

Llamemos

$$P = V\sqrt{\frac{W}{F}} \qquad \alpha = \frac{2g}{V}\sqrt{\frac{F}{W}}$$

entonces

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{P + v}{P - v} \cdot \frac{P - v_o}{P + v_o} \right]$$

Despejando v nos queda

$$\boxed{v = P \frac{(P + v_o)\, e^{\alpha t} - (P - v_o)}{(P + v_o)\, e^{\alpha t} + (P - v_o)}}$$

Por otra parte, de la ecuación diferencial del movimiento planteada inicialmente obtenemos

$$\frac{W}{g} v \frac{dv}{dx} = W - \frac{F}{V^2} v^2$$

de donde

$$\int_{v_o}^{v} \frac{\frac{W}{g} v \; dv}{W - \frac{F}{V^2} v^2} = \int_0^x dx$$

de donde

$$- \frac{W\, V^2}{2g\, F} \ln \frac{W - \frac{F}{V^2} v^2}{W - \frac{F}{V^2} v_o^2} = x$$

o

$$-\tfrac{1}{2} \left(\frac{W\, V^2}{g\ \ F} \right) \ln \frac{V^2 \frac{W}{F} - v^2}{V^2 \frac{W}{F} - v_o^2} = x$$

Llamando

$$\beta = \frac{gF}{WV^2}$$

nos queda

$$-\tfrac{1}{2} \frac{1}{\beta} \ln \frac{P^2 - v^2}{P^2 - v_o^2} = x$$

Despejando v

$$\boxed{v = \sqrt{P^2 - (P^2 - v_o^2)\, e^{-2\beta x}}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{x\to\infty} v = P$$

de modo que el aspecto de la gráfica de v como función de t o de x es

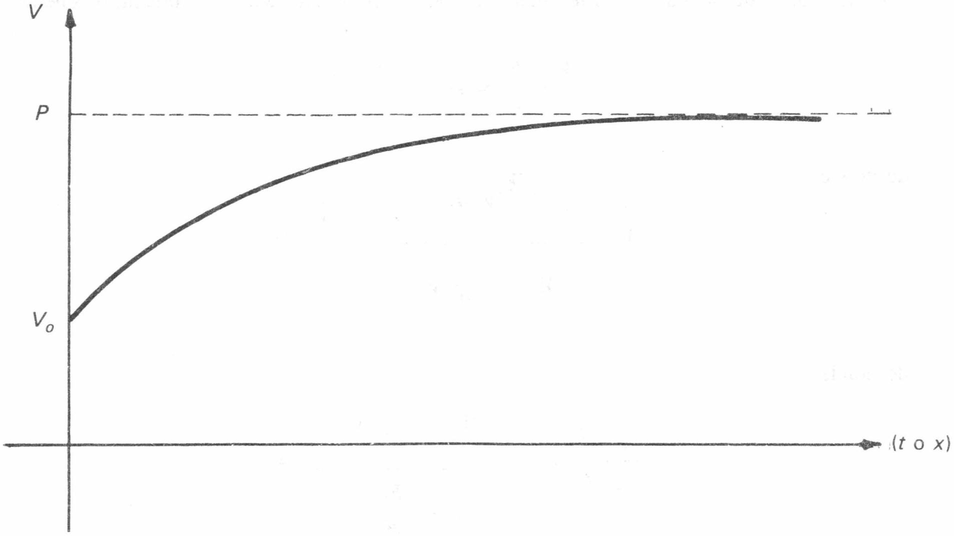


Figura 10. Interpretación geométrica de la solución del ejemplo 4.

Compare con lo que se obtiene si no se toma en cuenta la resistencia del aire

$$v = v_o + g\ t$$

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2\, g\ x}$$

En ambos casos

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{x\to\infty} v = \infty$$

MEC. 5

Una gota esférica de agua cuya masa inicial es igual a M_o gr se evapora uniformemente a la velocidad m_o gr/seg, pues está cayendo libremente en el aire. La fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad de movimiento de la gota y a su radio, siendo k la constante de proporcionalidad. Hallar la dependencia entre la velocidad del movimiento de la gota y el tiempo.

Solución

Observe que en este caso m (la masa de la gota) depende de t. Sabemos que

$$\frac{dm}{dt} = -m_e$$

de modo que

$$\int_{M_o}^{m} dm = -m_e \int_0^t dt$$

$$m = M_o - m_e t$$

expresión que nos da la masa de la gota a un tiempo t.

Haciendo un diagrama de cuerpo libre tenemos

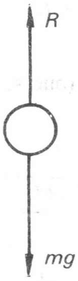


Figura 11. Diagrama de cuerpo libre para el ejemplo 5.

en donde $R = k\,v\,r$, k es la constante de proporcionalidad, v la velocidad instantánea de la gota y r el radio (instantáneo) de la gota.

Como la gota es de agua (densidad = 1 gr/cm^3) tenemos que m gr ocupan un volumen de m cm^3, y como la forma de la gota es esférica tenemos que $m = 4/3\ \pi\ r^3$, de donde

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi}}$$

Entonces la resistencia del aire queda

$$R = k\,v\sqrt[3]{\frac{3\,(M_o - M_e\,t)}{4\,\pi}}$$

y la ecuación diferencial del movimiento de la gota es

$$\frac{d}{dt}\left[(M_o - m_e\,t)\,v\right] = (M_o - m_e\,t)\,g - k\,v\sqrt[3]{\frac{3\,(M_o - m_e\,t)}{4\,\pi}}$$

de donde

$$(M_o - m_e\,t)\,\frac{dv}{dt} - m_e\,v = (M_o - m_e\,t)\,g - k\,v\,\sqrt[3]{\frac{3\,(M_o - M_e\,t)}{4\,\pi}}$$

Podemos suponer que $m = M_o - m_e\,t \neq 0$ para toda t durante el movimiento de la gota, entonces la ecuación diferencial puede quedar como

$$\frac{dv}{dt} + \left[\frac{k\,\sqrt[3]{\dfrac{3\,(M_o - m_e\,t)}{4\,\pi}} - m_e}{M_o - M_e\,t}\right] v = g$$

que es una ecuación de la forma

$$\frac{dv}{dt} + Q\,(t)\,v = R\,(t)$$

(lineal primer orden no homogénea) de la cual sabemos que su solución general está dada por

$$v = e^{-\int Q(t)\,dt} \int R\,(t)\,e^{\int Q\,(t)\,dt}\,dt + c\,e^{-\int Q\,(t)\,dt}$$

donde c es la constante de integración (que se calcula con las condiciones iniciales). Tenemos

$$\int Q\,(t)\,dt = \int \frac{k\,\sqrt[3]{\dfrac{3\,(M_o - m_e\,t)}{4\,\pi}} - m_e}{M_o - m_e\,t}\,dt$$

$$= \frac{k\,\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4\,\pi}} \int (M_o - m_e\,t)^{-2/3}\,dt + \int \frac{-m_e\,dt}{M_o - m_e t}$$

$$= -\,\frac{k\,\sqrt[3]{3}\;\;3}{\sqrt[3]{4\,\pi}\,m_e}\,(M_o - m_e\,t)^{-1/3} + ln\,(M_o - m_e\,t)$$

Llamemos $L = \dfrac{k\,3^{4/3}}{\sqrt[3]{4\,\pi}\,m_e}$

Entonces

$$\int Q\,(t)\,dt = -\,L\,(M_o - m_e\,t)^{1/3} + ln\,(M_o - m_e\,t)$$

$$e^{\int Q\,(t)\,dt} = (M_o - m_e\,t)\,e^{-L\,(M_o - m_e t)^{1/3}}$$

La otra integral por calcular es

$$\int R\,(t)\;e^{\int Q(t)\,dt}\;dt = \int g\,(M_o - m_e\,t)\;e^{-L\,(M_o - m_e\,t)^{1/3}}\;dt$$

Haciendo

$$M_o - m_e\,t = Z^3$$

$$t = \frac{1}{m_e}\,(M_o - Z^3)$$

$$dt = \frac{-3Z^2}{m_e}\,dz$$

tenemos

$$\int R\,(t)\;e^{\int Q(t)\,dt}dt = g \int Z^3\,e^{-L\,Z}\left(-\,\frac{3\,Z^2}{m_e}\right)dZ$$

$$= -\,\frac{3\,g}{m_e}\int Z^5\;e^{-L\,Z}\;dZ$$

Procediendo por el método de los coeficientes indeterminados sabemos que

$$\int Z^5\;e^{--L\,Z}\;dZ = (AZ^5 + BZ^4 + CZ^3 + DZ^2 + EZ + F)\;e^{-L\,Z}$$

Derivando la expresión anterior, simplificando por $e^{-L\,Z}$ y agrupando en potencias decrecientes de Z del lado derecho nos queda

$$Z^5 = -L\,AZ^5 + (-\,L\,B + 5\,A)\,Z^4 + (-\,L\,C + 4\,B)\,Z^3$$

$$+\,(-\,L\,D + 3\,C)\,Z^2 + (-\,L\,E + 2\,D)\,Z + -\,L\,F + E$$

de donde

$$\begin{aligned} -\,L\,A &= 1 \\ -\,L\,B + 5\,A &= 0 \\ -\,L\,C + 4\,B &= 0 \\ -\,L\,D + 3\,C &= 0 \\ -\,L\,E + 2\,D &= 0 \\ -\,L\,F + \,E &= 0 \end{aligned}$$

obteniéndose entonces los valores

$$A = \frac{1}{L},\ B = -\frac{5}{L^2},\ C = -\frac{20}{L^3},\ D = -\frac{60}{L^4},\ E = -\frac{120}{L^5},\ F = -\frac{120}{L^6}\ .$$

de modo que

$$\int R\ (t)\ e^{\int Q\ (t)\ dt}\ dt = -\frac{3\ g}{m_e}\left[-\frac{1}{L}Z^5 - \frac{5}{L^2}Z^4\right.$$

$$\left. -\frac{20}{L^3}Z^3 - \frac{60}{L^4} - \frac{120}{L^5}Z - \frac{120}{L^6}\right]$$

$$= \frac{3\ g\ L^{-6}}{m_e}\ [L^5\ Z^5 + 5\ L4\ Z^4 + 20\ L^3\ Z^3 + 60\ L^2\ Z^2$$

$$+ 120\ L\ Z + 120]$$

Ahora

$$e^{-\int Q\ (t)\ dt} = \frac{e^{L(M_o - m_e)^{1/3}}}{M_o - m_e\ t}$$

de modo que la solución general de la ecuación es

$$v = \frac{e^{L\ (M_o - m_e\ t)^{1/3}}}{M_o - m_e\ t}\ \frac{3\ g\ L^{-6}}{m_e}\ [L5\ Z^5 + 5\ L^4\ Z^4 + 20\ L^3\ Z^3$$

$$60\ L^2\ Z^2 + 120\ L\ Z + 120] + c\ \frac{e^{L\ (M_o - m_e\ t)^{1/3}}}{M_o - m_e\ t}$$

Sabemos que si $t = 0$, entonces $v = 0$, $Z = \sqrt[3]{M_o} = P$, teniéndose entonces que

$$0 = \frac{e^{LP}}{M_o}\ \frac{3\ g\ L^{-6}}{m_e}\ [L^5\ P^5 + 5\ L^4\ P^4 + 20\ L^3P^3 + 60\ L^2P^2 + 120\ L\ P + 120]$$

$$+ c\ \frac{e^{LP}}{M_o}$$

de donde

$$c = -\frac{3\ g\ L^{-6}}{m_e}\ [L^5\ P^5 + 5\ L^4\ P^4 + 20\ L^3\ P^3 + 60\ L^2\ P^2 + 120\ L\ P + 120]$$

Entonces la expresión que buscábamos, que nos da la relación entre la velocidad de la gota y el tiempo es

$$\boxed{\begin{aligned} v = \frac{3\,g\,L^{-6}}{m_e}\,\frac{e^{LZ}}{Z^3}\,[L^5\,(Z^5 - P^5) + 5\,L^4\,(Z^4 - P^4) + \\ + 20\,L^3\,(Z^3 - P^3) + 60\,L^2\,(Z^2 - P^2) + 120\,L\,(Z - P)] \end{aligned}}$$

donde

$$L = \frac{k\,3^{4/3}}{\sqrt[3]{4\pi}\,m_e} \qquad P = \sqrt[3]{M_o}\ , \qquad Z = \sqrt[3]{M_o - m_e\,t}$$

MEC. 6

Una partícula de masa m se mueve en dirección de la parte positiva del eje x bajo la influencia de una fuerza dada por $F(x)$.

Si v es la velocidad instantánea, muestre que

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + V(x) = E$$

donde E es una constante y

$$V(x) = \int_x^a F(u)\,du$$

con a tal que $V(a) = 0$

Solución:

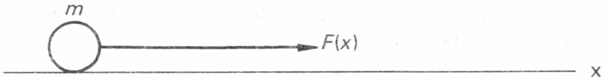


Figura 12. Ejemplo 6.

Tenemos entonces que

$$m\,\frac{dv}{dt} = F(x)$$

o

$$mv\,\frac{dv}{dx} = F(x)$$

de donde

$$m\, v\, dv = F(x)\, dx$$

Integrando indefinidamente obtenemos

$$\int m\, v\, dv = \int F(x)\, dx + E$$

donde E es la constante de integración.

Entonces

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 = \int F(x)\, dx + E$$

Sea

$$V(x) = \int_a^x F(u)\, du$$

donde a es tal que $V(a) = 0$. Es claro que

$$\int F(x)\, dx = \int_a^x F(u)\, du$$

Entonces

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 + \int_x^a F(u)\, du = E$$

que era la relación que queríamos establecer.

A este resultado se le conoce como la *ley de conservación de la energía*, siendo $\tfrac{1}{2}\, m\, v^2$la *energía cinética* de la partícula,

$V(x) = \int_x^a F(u)\, du$ la *energía potencial* y E (que es constante) es la *energía total.*

Esta ley establece, como puede verse de la relación encontrada, que la energía total de una partícula (suma de la energía cinética y potencial) se mantiene constante a lo largo de cualquier proceso (suponiendo que no hay disipación de energía por otros medios).

MEC. 7

Se tiene una mesa con su parte lateral inclinada un ángulo α con respecto de la horizontal tal como se muestra en la siguiente figura. En ella está colocada una cadena de longitud L, la cual en $t = 0$ tiene un pedazo de longitud a pendiendo en la parte inclinada. Suponiendo que no existe fricción, encontrar el tiempo que tarda la cadena en deslizarse por completo por la parte inclinada de la mesa.

Solución

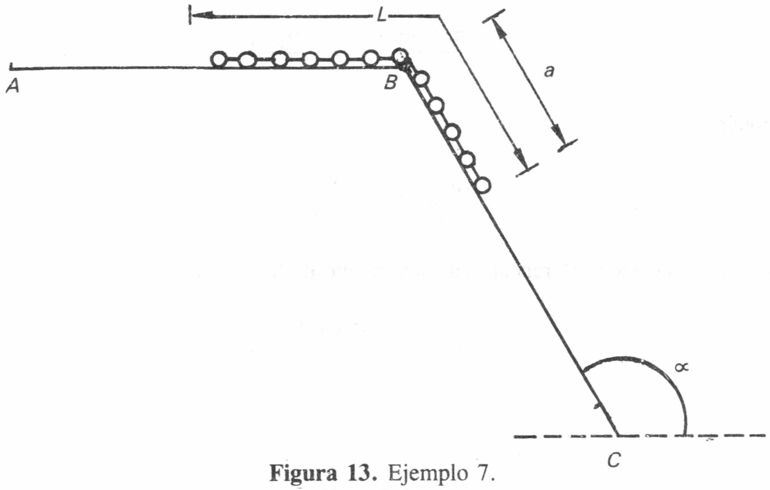


Figura 13. Ejemplo 7.

La única fuerza que actúa para efectuar el deslizamiento de la cadena por $B\ C$ es la componente del peso de la parte que está deslizándose por el lado $B\ C$, precisamente en esa dirección. Sea x la longitud de la cadena en $B\ C$ a un tiempo t.

Entonces

$$m\frac{dv}{dt} = W_{x,B\ C} = \text{componente del peso de la parte de longitud } x \text{ en la dirección } B\ C$$

donde m es la masa total de la cadena.

Para obtener $W_{x,\ B\ C}$ procedemos como sigue

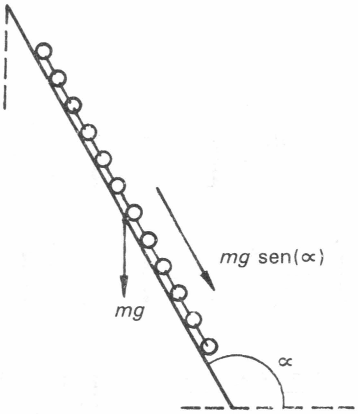


Figura 14. Diagrama de cuerpo libre para el ejemplo 7.

Si la cadena estuviera toda en el lado $B\,C$ tendríamos que la componente del peso de la misma en la dirección $B\,C$ sería

$$m\,g\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = m\,g \operatorname{sen}\alpha$$

Entonces debe tenerse que

$$\frac{m\,g \operatorname{sen}\alpha}{L} = \frac{W_{x,B\,C}}{x}$$

de donde

$$W_{x,B\,C} = \frac{m\,g \operatorname{sen}\alpha}{L}\,x$$

Entonces la ecuación diferencial del movimiento de la cadena es

$$m\,\frac{dv}{dt} = \frac{m\,g \operatorname{sen}\alpha}{L}\,x$$

o

$$v\,dv = \frac{g \operatorname{sen}\alpha}{L}\,x\,dx$$

de donde

$$\int_0^v v\,dv = \frac{g \operatorname{sen}\alpha}{L}\int_a^x x\,dx$$

o

$$\tfrac{1}{2}m\,v^2 = \frac{g \operatorname{sen}\alpha}{L}\,\tfrac{1}{2}\,(x^2 - a^2)$$

de donde

$$v = \frac{dx}{dt} = \left[\frac{g \operatorname{sen}\alpha}{L}\right]^{1/2}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \left[\frac{g \operatorname{sen}\alpha}{L}\right]^{1/2}\int_0^t dt$$

$$ln\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \left[\frac{g \operatorname{sen}\alpha}{L}\right]^{1/2} t$$

Buscamos t cuando $x = L$, por lo que el tiempo que queríamos calcular es

$$\boxed{t = \left[\frac{L}{g \operatorname{sen} \alpha}\right]^{1/2} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - a^2}}{a}}$$

Observe que cuando $\alpha \to \pi$, entonces $t \to \infty$.

MEC. 8

Se tienen objetos cayendo a partir del reposo por cuerdas de un círculo vertical. Todas las cuerdas terminan en el punto más bajo del círculo. Se supone que no hay fricción. En $t = 0$ se sueltan todos los cuerpos colocados inicialmente en el círculo. Demostrar que llegan todos al mismo tiempo al punto más bajo de su trayectoria.

Solución

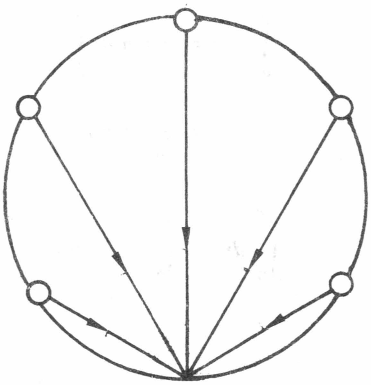


Figura 15. Ejemplo 8.

Sea r el radio del círculo, c su centro, M su punto más bajo, y sea P un punto cualquiera de él. Si colocamos al círculo de modo que M sea el origen de coordenadas, entonces tendríamos una situación como la siguiente

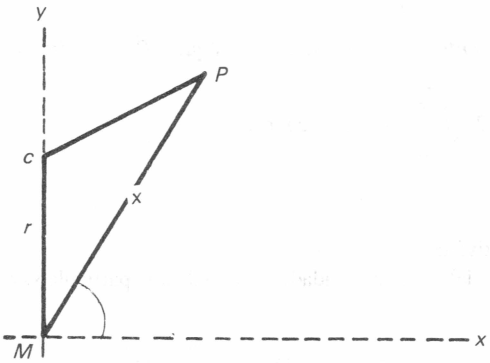


Figura 16. Sistema coordenado para la solución del ejemplo 8.

Del triángulo $C\,P\,M$ obtenemos que

$$x = 2\,r\,\operatorname{sen}\,\theta$$

Entonces las coordenadas de P son

$$P\,(2\,r\,\operatorname{sen}^2\,\theta,\ 2\,r\,\operatorname{sen}\,\theta\,\cos\,\theta)$$

La ecuación diferencial del movimiento de la masa m que desciende por $P\,M$ es

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\,g\,\operatorname{sen}\,\theta$$

$$= \text{Componente en la dirección } P\,M \text{ del peso del cuerpo}$$

entonces

$$\int_0^V dv = g\,\operatorname{sen}\,\theta \int_0^t dt$$

$$v = g\,\operatorname{sen}\,\theta\,t$$

$$\int_0^{2r\operatorname{sen}\theta} dx = \int_0^t g\,\operatorname{sen}\,\theta\,t\,dt$$

de donde

$$2\,r\,\operatorname{sen}\,\theta = \tfrac{1}{2}\,g\,\operatorname{sen}\theta\,t^2$$

o

$$t = 2\,\sqrt{\frac{r}{g}}$$

lo cual es *independiente de* θ, esto es, para cualquier P en el círculo, el cuerpo que desciende de P a M le lleva $2\sqrt{\frac{r}{g}}$ seg en llegar a M.

MEC. 9

(Un problema relativístico).

Según la teoría especial de la relatividad, la masa de una partícula varía con su velocidad según la fórmula

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

de donde m_o es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. Si una partícula comienza del reposo a $t = 0$ y se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza constante F, determinar las funciones de distancia y velocidad con el tiempo.

Solución

La ecuación diferencial del movimiento de la partícula es entonces

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,v\right] = F$$

Calculando la derivada

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_o v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] = m_o\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

$$= m_o\,\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\,\dfrac{dv}{dt} + v\,\dfrac{1}{2\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\dfrac{2\,v}{c^2}\,\dfrac{dv}{dt}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$$

$$= m_o\,\frac{(1-v^2/c^2)\,\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v^2}{c^2}\,\dfrac{dv}{dt}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_o}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,\frac{dv}{dt}$$

de modo que la ecuación diferencial del movimiento queda

$$\frac{m_o}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,\frac{dv}{dt} = F$$

de donde

$$m_o\int_0^v \frac{dv}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \int_0^t F\,dt$$

Resolvamos la integral del lado izquierdo haciendo $v = c$ sen t

$$\int_0^v \frac{dv}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \int_0^{\operatorname{arcsen}(v/c)} \frac{c\cos t\,dt}{\cos^3 t} = c\int_0^{\operatorname{arcsen}(v/c)} \sec^2 t\,dt$$

$$= c\tan t\,\Big|_0^{\operatorname{arcsen}\frac{v}{c}} = c\,\frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

Entonces

$$\frac{c\, m_o\, v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = F\ t$$

de donde

$$\boxed{v = \frac{c\, F\, t}{\sqrt{F^2\, t^2 + m_0^2\, c^2}}}$$

Observe que

$$\lim_{t \to \infty} v = c$$

por lo que el comportamiento de la velocidad respecto del tiempo en el modelo relativístico del movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza constante F es el del tipo representado por la siguiente gráfica

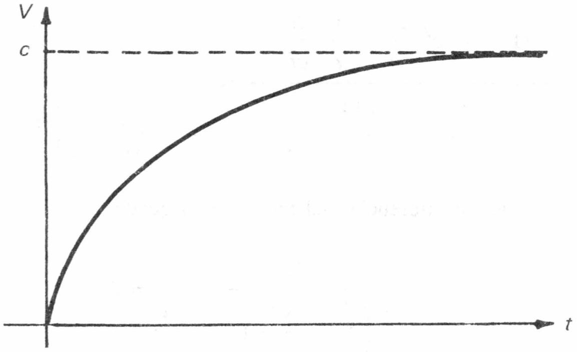


Figura 17. Comportamiento geométrico de la velocidad de un cuerpo sujeto a una fuerza constante F en el modelo relativístico.

mientras que, según el modelo Newtoniano, se tiene que

$$v = \frac{F}{m_o}\, t$$

de modo que

$$\lim_{t \to \infty} v = \infty$$

siendo c (la velocidad de la luz) alcanzada a los $\dfrac{m_o\, c}{F}$ seg.

Gráficamente el modelo Newtoniano se ve como

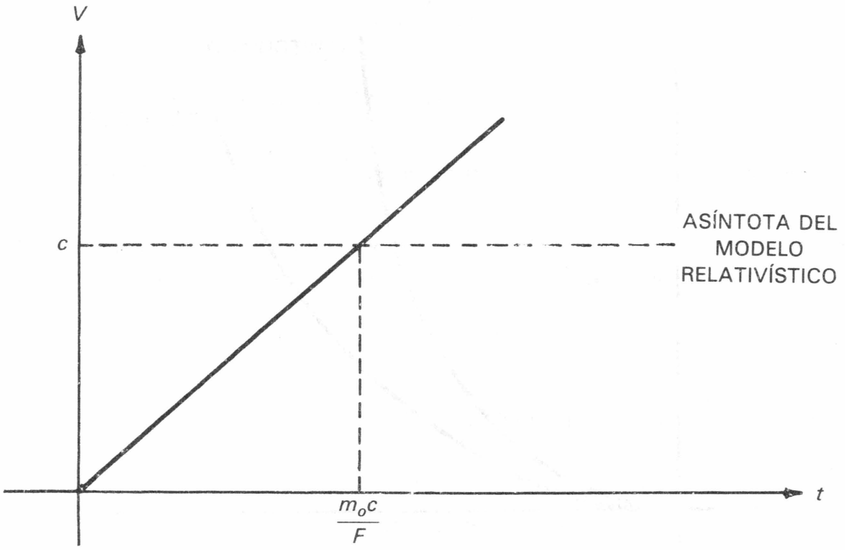


Figura 18. Comportamiento geométrico de la velocidad de un cuerpo sujeto a una fuerza constante F en el modelo newtoniano.

Encontremos ahora la relación entre el desplazamiento de la partícula y el tiempo.

De la relación de la velocidad, encontrada anteriormente, obtenemos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v\,F\,t}{\sqrt{F^2\,t^2 + m_o^2\,c^2}}$$

de donde

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{c\,F\,t\,dt}{\sqrt{F^2\,t^2 + m_o^2\,c^2}}$$

o

$$\boxed{x = \frac{c}{F}\sqrt{F^2\,t^2 + m_o^2\,c^2} - \frac{m_o\,c^2}{F}}$$

Observe nuevamente que en las mismas condiciones del fenómeno, el modelo Newtoniano establecería que

$$x = \frac{F}{2\,m_o}\,t^2$$

Comparando gráficamente estos dos modelos tendremos

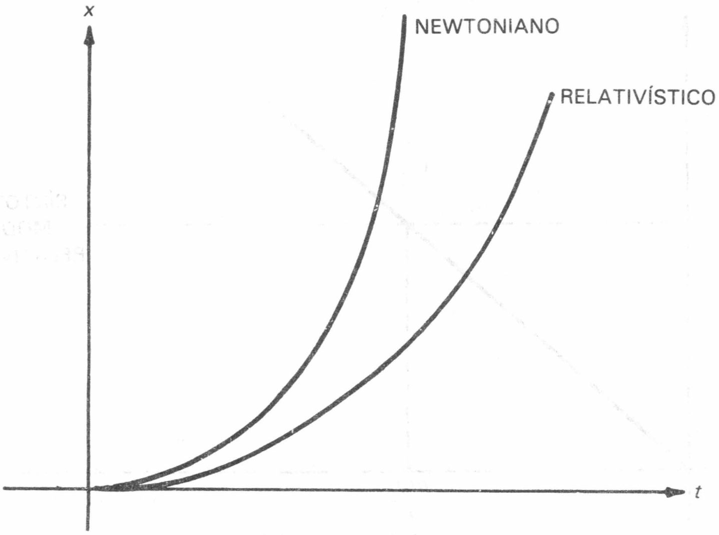


Figura 19. Comparación del comportamiento geométrico de la distancia recorrida por un cuerpo sujeto a una fuerza constante F en los modelos newtoniano y relativístico.

(Es fácil ver que estas dos gráficas se encuentran sólo en el origen, y además tanto una como otra son funciones siempre crecientes y sus gráficas son siempre cóncavas hacia arriba).

MEC. 10 (Velocidad de Escape).

Se trata de calcular la velocidad (inicial) que tendría que imprimírsele a un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba para que éste "escape" de la Tierra (i.e. para que no regrese a la Tierra).

Solución

Para resolver este problema tendremos que hacer uso de la *ley de gravitación universal* de Newton, que establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 respectivamente, los cuales se encuentran separados una distancia x, es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, i.e.

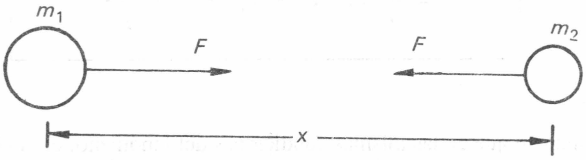


Figura 20. Ley de gravitación universal.

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO BIBLIOTECA

o

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{x^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal

$G = 6.67 \times 10^{-11} \dfrac{N - m^2}{Kg^2}$ y x se mide a partir de los centros de masa de los cuerpos.

Entonces, para un cuerpo de masa m que está ‘‘cerca’’ de la Tierra (entendamos por ‘‘cerca’’ a una distancia considerablemente menor que el radio de la Tierra), tenemos que

$$F = \frac{G\, M_t\, m}{(R_t + x)^2}$$

donde M_t es la masa de la Tierra, R_t su radio, x la altura a la que se encuentra el cuerpo respecto de la superficie terrestre.
Como

$$R_t + x \approx R_t \qquad (\text{pues } x << R_t)$$

tenemos que

$$F \approx \frac{G\, M_t}{R_t^2}\, m$$

La expresión $\dfrac{G\, M_t}{R_t^2}$ es constante y es obviamente la aceleración de la gravedad g que hemos venido manejando en todos los ejemplos anteriores, en los cuales los cuerpos se movían siempre ‘‘cerca de la Tierra’’. Sin embargo, en este problema el cuerpo que lanzaremos se irá ‘‘lejos’’ de la Tierra, pues queremos que ya no regrese a la misma. Es por eso que usaremos, en lugar de la fuerza de atracción hacia la Tierra como $m\, g$, la ley de gravitación universal planteada anteriormente.

Con base en estas consideraciones la ecuación diferencial del movimiento del cuerpo será

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{G\, M_t\, m}{(R_t + x)^2}$$

El signo menos es porque tomaremos la dirección de positividad para el desplazamiento x del cuerpo (el cual es medido a partir de la superficie terrestre) precisamente en la dirección del movimiento del mismo

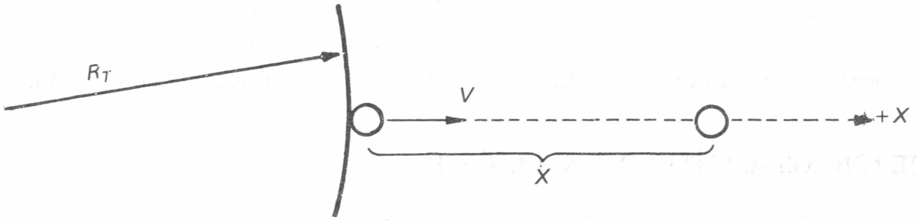


Figura 21. Movimiento del cuerpo del ejemplo 10.

Entonces, usando la regla de la cadena nos queda

$$v\,\frac{dv}{dx} = -\,\frac{G\,M_t}{(R_t + x)^2}$$

de donde

$$\int_{v_o}^{v} v\,dv = -\int_{0}^{x} \frac{G\,M_t}{(R_t + x)^2}\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}\,(v^2 - v_o^2) = \frac{G\,M_t}{(R_t + x)} - \frac{G\,M_t}{R_t}$$

Podemos usar que $\frac{G\,M_t}{R_t^2} = g$ para reescribir esta última expresión como

$$\tfrac{1}{2}\,(v^2 - v_o^2) = \frac{g\,R_t^2}{(R_t + x)} - g\,R_t$$

Queremos que $x \to \infty$ y que $v \to 0$ (i.e. queremos que el cuerpo sea lanzado de tal manera que "se detenga en el infinito").

Entonces

$$-\tfrac{1}{2}\,v_o^2 = -\,g\,R_t$$

puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g\,R_t^2}{(R_t + x)} = 0$$

de donde

$$\boxed{v_o = \sqrt{2\,g\,R_t}}$$

siendo ésta entonces la "velocidad de escape", que aproximadamente es de 40246 Km/hr.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 3. SECCIÓN 1)

1. El movimiento de un punto de masa m es rectilíneo. La ley del movimiento del punto es $x = a(v)^{1/2} - b$, donde x es la distancia recorrida y v es la velocidad instantánea del pun-

to (a y b son constantes). Demuestre que después de

$$\frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

segundos de haber comenzado el movimiento, el punto ha duplicado su velocidad.

2. Un punto de masa m comienza a moverse sobre el eje x, habiendo comenzado su movimiento a partir del reposo en el punto $x_o = a$, bajo la acción de la fuerza de atracción hacia el origen proporcional a la distancia del punto al origen, dada por $F_x = c_1 mx$. Existe también una fuerza de repulsión proporcional al cubo de la distancia dada por $Q_x = c_2 mx^3$. Demuestre que para que el punto alcance el origen de coordenadas y ahí se detenga se debe tener la relación $2c_1 = c_2 a^2$.
3. Un objeto de masa m se mueve en trayectoria recta debido a la fuerza $F(t) = A_1 e^{-A_2 t}$, donde A_1 y A_2 son constantes y t es el tiempo. El movimiento está sujeto a una fuerza de fricción numéricamente igual al duplo de la velocidad instantánea del objeto. Si $v = 0$ a $t = 0$, encuentre una fórmula para v en cualquier tiempo t.
4. Un punto de masa m inicia su movimiento rectilíneo por el eje x sin velocidad inicial. A$t = 0$ se tenía que $x_o = b$. La fuerza ejercida por el punto es $F = -ax^{-2}$ (a es una constante positiva). Demostrar que después de

$$t_1 = \frac{b^{3/2}}{2^{3/2}}(m/a)^{1/2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

segundos de haber comenzado el movimiento, el cuerpo se encuentra en la posición $x = 0.5b$ y que en ese instante lleva una velocidad de $(2a/mb)^{1/2}$.

5. Un cuerpo de masa igual a 3 gr se mueve en trayectoria rectilínea bajo la acción de una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad del movimiento de dicho cuerpo y directamente proporcional al tiempo, evaluado a partir del comienzo del movimiento ($t = 0$). En el momento $t = 20$ seg la velocidad era igual a 1.3 m/seg y la fuerza 8×10^{-5} N. ¿Cuál será la velocidad en el instante $t = 40$ seg?
6. La fuerza de resistencia de un cuerpo de 1 Kg de masa que se desplaza en un medio heterogéneo varía de acuerdo a la ley

$$R = -\frac{2v^2}{3 + x} \quad \text{(newtons)}$$

donde x es la distancia recorrida (m) y v es la velocidad instantánea del cuerpo (m/seg). Sea $v_o = 5$ m/seg. Determine la función $x = x(t)$.

7. Un objeto de masa m se deja caer desde un globo dirigible ($v_o = 0$). Si la fuerza de resistencia del aire es directamente proporcional a la velocidad del objeto, demuestre que la distancia que recorre en t seg viene dada por la fórmula

$$x = \frac{g}{c}t + \frac{g}{c^2}e^{-ct} - \frac{g}{c^2}$$

donde: $c = k/m$, k es la constante de proporcionalidad de la resistencia del aire, m es la masa del objeto y g es la aceleración debida a la gravedad.

8. Un cuerpo de masa m cae hacia la Tierra sin velocidad inicial. La resistencia que ofrece el aire al movimiento del cuerpo es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea del mismo. Demuestre que la ley del movimiento del cuerpo es

$$x = \frac{m}{k} \ln \cosh \left[\frac{gk}{m}\right]^{1/2} t$$

donde x es la distancia recorrida por el cuerpo, t es el tiempo transcurrido desde que comenzó el movimiento y k es la constante de proporcionalidad que aparece en la expresión de la fuerza resistiva.

9. En el movimiento de descenso de los cuerpos en paracaídas, la fuerza de resistencia del aire es proporcional del cuadrado de la velocidad del movimiento de los mismos. Demuestre que la velocidad límite de descenso está dada por

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

donde m es la masa del cuerpo, k es la constante de proporcionalidad de la resistencia del aire, y g es la aceleración de la gravedad.

10. En el movimiento de un objeto en cierto medio (por ejemplo aire bajo condiciones de presión específicas) el medio ejerce una fuerza resistiva al movimiento del cuerpo de magnitud $R = k\,v^{3/2}$, donde k es una constante de proporcionalidad y v es la velocidad instantánea. Si el cuerpo pesa W newtons, halle una fórmula que relacione la distancia recorrida y el tiempo transcurrido en el movimiento de dicho cuerpo, considerando que a $t = 0$ se tenía $x = x_o$.

11. Un barco que tiene una masa de 100 ton lleva una velocidad de 20 Km/hr en línea recta cuando su motor se apaga. ¿Qué tiempo le llevará en detenerse, y en qué distancia lo hará, si la resistencia del agua es de $0.7\ v$ (v en Km/hr)?

12. Un paracaidista salta hacia la Tierra partiendo del reposo, de una altura de 5000 m. El peso del paracaidista junto con el del paracaídas es de 120 newtons. Antes de que el paracaídas se abra, la resistencia del aire es de $0.5v$, donde v es la velocidad instantánea. El paracaídas se abre 5 seg después de comenzar la caída, y la resistencia del aire es entonces $0.5v^2$. Encuentre la velocidad del paracaidista antes de que el paracaídas se abra, después de abierto (como funciones del tiempo) y la velocidad a la que el paracaidista llega a la Tierra.

13. Una partícula se mueve en línea recta hacia un punto fijo ''O'' sobre la línea, con una velocidad instantánea que es proporcional a la n-ésima potencia de su distancia a ''O''. *a*) Demuestre que si n es mayor o igual que 1, la partícula nunca alcanza al punto ''O''; *b*) Discuta los casos en los que n es menor que 1.

14. Determinar la ley del movimiento $x = x\,(t)$ de una bola pesada a lo largo de un canal recto imaginario que pasa por el centro de la Tierra, si se sabe que la fuerza de atracción en el interior de la Tierra es proporcional a la distancia entre el cuerpo y el centro de la misma y está dirigida hacia dicho centro. La bola ha comenzado su movimiento en la superficie terrestre sin velocidad inicial. Calcule también la velocidad de la bola cuando ésta pasa por el centro de la Tierra y el tiempo que le lleva alcanzar dicho centro (el radio de la Tierra es aproximadamente de 6370 Km).

15. Cuando un objeto es lanzado hacia arriba, éste pasa por un punto a una cierta altura x al tiempo t_1 cuando va subiendo, y a un tiempo t_2 cuando va bajando. *a*) Suponiendo despreciable la resistencia del aire, muestre que $x = 0.5\ gt_1\,t_2$; *b*) ¿Cómo puede usarse este hecho para encontrar la altura de un árbol sin medirlo?

16. Muestre que el objeto del ejercicio anterior fue lanzado con una velocidad inicial de $v_o = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)$.

17. La fuerza de rozamiento que retarda el movimiento giratorio de un disco en un medio líquido, es proporcional a la velocidad angular de la rotación. *a*) El disco comenzó su movimiento giratorio con la velocidad angular de 3 vueltas cada segundo y al cabo de un minuto gira con una velocidad angular de 2 vueltas por segundo, ¿cuál sería su velocidad angular al cabo de 3 minutos de haber comenzado la rotación?; *b*) El disco comenzó a girar teniendo una velocidad angular de 5 vueltas por segundo y al cabo de 2 minutos gira con la velocidad angular de 3 vueltas por segundo, ¿al cabo de cuánto tiempo después de comenzar la rotación la velocidad del disco será de una vuelta por segundo?

18. La figura muestra un cuerpo de peso "W" que se desliza sin fricción sobre un plano que está inclinado un ángulo α respecto de la horizontal

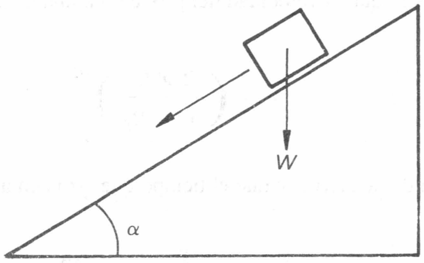


Figura 22. Problema 18.

Asumiendo que sobre el cuerpo no actúan más fuerzas que aquélla debida a la gravedad, encuentre la distancia recorrida por el cuerpo si al tiempo $t = 0$ tenemos que $x = x_o$ y $v = v_o$. Si la longitud del plano inclinado es L, ¿qué tiempo le llevará recorrerlo completo?

19. Para el problema anterior suponga que existe una fuerza de rozamiento actuando sobre el cuerpo de magnitud $R = k\, v^{2/3}$ (k es una constante). Determine la funciones $x = x(t)$ y $v = v(t)$.

20. Una bala penetra una tabla cuyo grosor es de h m con una velocidad de v_o m/seg. Al atravesarla, sale por el otro lado con una velocidad de v_1 m/seg. Considerando la fuerza de resistencia que ofrece la tabla al paso de la bala, proporcional al cuadrado de la velocidad de ésta, demostrar que la tabla atraviesa la tabla en

$$\frac{h(v_o - v_1)}{v_1 v_o \ln(v_o/v_1)} \qquad \text{(segundos)}$$

21. Una esfera de volumen $4\,\pi/3$ y de masa 400 gr y un cilindro de volumen π y de masa 300 gr se sueltan simultáneamente, partiendo del reposo, en la superficie de un río. La fuerza de resistencia que ofrece el agua a la caída de la esfera y del cilindro es de λv_e y λv_c, respectivamente, donde v_e y v_c son las velocidades de la esfera y del cilindro, y λ es una constante positiva. Determine cuál de los objetos llega primero al fondo del río.

22. Una gota de agua de masa inicial M_o gr se evapora con la velocidad de m_e gr/seg, efectuándose su caída libre en el aire. La fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad instantánea de la gota, siendo k la constante de proporcionalidad. Hallar la dependencia entre la velocidad del movimiento de la gota y el tiempo transcurrido desde que comenzó a caer, teniendo en cuenta que en $t = 0$, $v = 0$. Considerar que $k \neq 2\, m_e$.

23. Resolver el mismo problema anterior, pero con respecto a una gota en forma esférica, considerando la fuerza de resistencia del aire proporcional al producto de la velocidad de la gota y el área de la superficie de la misma. La densidad del líquido es ρ.

24. Una bola de nieve se derrite reduciendo su tamaño de un radio inicial de 40 cm a un radio de 25 cm en un tiempo igual a 1 hr. Suponiendo que la bola se derrite a una velocidad directamente proporcional al área de la superficie en cada instante, determine el radio de la bola de nieve como una función del tiempo. ¿Cuándo será el radio de la bola igual a 20 cm?, ¿cuál será el radio de la bola a los 45 min de haber comenzado a derretirse?
25. Suponiendo que una gota de líquido se evapora con una velocidad proporcional a la superficie instantánea de la gota, hallar el radio de la gota en función del tiempo. ¿Cuál será esa función suponiendo que la evaporación de la gota es proporcional a la raíz cúbica de la superficie instantánea de la misma?
26. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_o igual a la velocidad de escape (vea el ejemplo 10). Despreciando la influencia de la luna y de otros planetas, muestre que la velocidad del proyectil a una distancia x del punto de partida es de

$$v = \left(\frac{2\,g\,R_T^2}{x + R_T}\right)^{1/2}$$

donde R_T es el radio de la Tierra, y que el tiempo que tarda en alcanzar esta velocidad es de

$$t = \frac{2}{3\,R_T\,(2g)^{1/2}}\left[(x + R_T)^{3/2} - R_T^{3/2}\right]$$

27. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_o menor que la velocidad de escape. Si sólo tomamos en cuenta la influencia que ejerce la Tierra sobre el objeto, muestre que la máxima altura alcanzada por el mismo es de

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_o^2\,R_T}{2\,g\,R_T - v_o^2}$$

y que el tiempo que tarda en alcanzar tal altura es de

$$t = \frac{2\,g\,R_T^2}{(2\,g\,R_T - v_o^2)^{3/2}}\left[\operatorname{arcsen}\frac{v_o}{(2\,g\,R_T)^2} + \frac{v_o(2\,g\,R_T - v_o^2)^{1/2}}{2\,g\,R_T}\right]$$

2. APLICACIONES A LA QUÍMICA

Consideraremos en esta sección 3 tipos de problemas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a la química:

a) Problemas de mezclado
b) Problemas de disoluciones
c) Problemas de cinética química

2.1 Problemas de mezclado

El problema típico que consideraremos en esta parte se encuentra en el siguiente ejemplo.

Quím. 1

Se tiene un tanque con V_0 lts de agua en la cual se encuentran disueltos x_o kg de alguna cierta sustancia S (por ejemplo sal). A $t = 0$ comienza a fluir hacia adentro del tanque una solución que lleva a kg de S por litro de solución a una velocidad de b litros por cada minuto. Considere que existe agitación ideal en el tanque (i.e. a medida que va llegando la solución al tanque, ésta se incorpora *inmediatamente* a la que ya había anteriormente en el mismo*). La mezcla es entonces desalojada del tanque a una velocidad de c litros cada minuto. Se trata de saber cuál es la cantidad de S en el tanque a un tiempo t.

Solución:

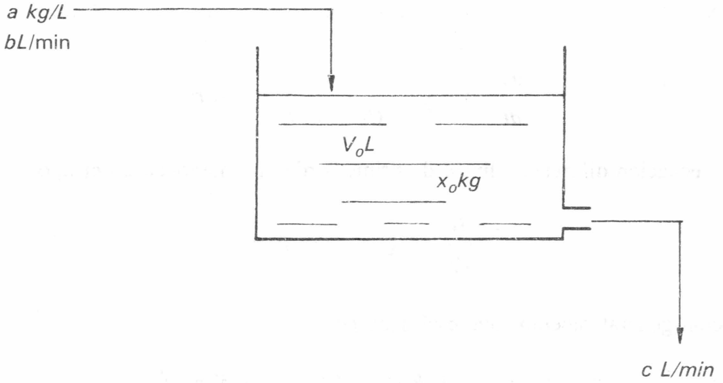


Figura 23. Problemas Quím. 1.

Sea x la cantidad de S en el tanque a un tiempo t. Lo que buscamos entonces es $x\ (t)$.

Haciendo un balance de S en el tanque (a un tiempo t), obtenemos que

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Variación en la}\\ \text{cantidad de } S\\ \text{en el tanque}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad de } S \text{ que}\\ \text{llega al tanque}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad de } S\\ \text{que sale del tanque}\end{array}\right\}$$

(todo tomado en la unidad de tiempo).

Como

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad de } S \text{ que}\\ \text{llega al tanque (en la}\\ \text{unidad de tiempo)}\end{array}\right\} = \left(a\,\frac{\text{kg}}{L}\right)\left(b\,\frac{L}{\text{min}}\right) = ab\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad de } S \text{ que}\\ \text{sale del tanque (en la}\\ \text{unidad de tiempo)}\end{array}\right\} = \left(\frac{x\ \text{kg}}{V L}\right)\left(c\,\frac{L}{\text{min}}\right) = \frac{c}{V}\,x\ \text{kg/min}$$

---

* Siempre supondremos agitación ideal en problemas de mezclado.

donde V es el volumen de solución en el tanque a un tiempo t, i.e.

$$V = V_o + \left(b \frac{L}{\text{min}} \right) \left(t \text{ min} \right) - \left(c \frac{L}{\text{min}} \right) \left(t \text{ min} \right)$$

$$= V_o + (b - c)\, t\, L$$

Entonces la ecuación diferencial a manejar en este problema es

$$\frac{dx}{dt} = a\, b - \frac{c}{V_o + (b - c)\, t}\, x$$

o

$$\frac{dx}{dt} + \frac{c}{V_o + (b - c)\, t}\, x = a\, b$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea del tipo

$$\frac{dx}{dt} + Q(t)\, x = R(t)$$

cuya solución general sabemos que está dada por

$$x = e^{-\int Q(t)\, dt} \int R(t)\, e^{\int Q(t)\, dt}\, dt + K\, e^{-\, Q(t)\, dt}$$

donde K es la constante de integración que calcularemos con las condiciones iniciales del problema ($x(0) = x_o$).

Entonces

$$\int Q(t)\, dt = \int \frac{c}{V_o + (b - c)\, t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{c}{b - c}\, ln\, (V_o + (b - c)\, t) & \text{si } b \neq c \\ \dfrac{c}{V_o}\, t & \text{si } b = c \end{cases}$$

Estudiemos el caso $b \neq c$ (i.e. la velocidad de flujo de la solución que llega al tanque es diferente de la velocidad de flujo con que la solución mezclada abandona el tanque).

Entonces

$$e^{\int Q(t)\, dt} = e^{\frac{c}{b - c}\, ln\, (V_o + (b - c) t)}$$

$$= [V_o + (b - c)\, t]^{\frac{c}{b - c}}$$

Calculemos la integral

$$\int R(t)\, e^{\int Q(t)\, dt} = \int a\, b\, [V_o + (b - c)\, t]^{\frac{c}{b - c}}\, dt$$

$$= \frac{a\,b}{b - c} \; \frac{[V_o + (b - c)\,t]^{\frac{c}{b - c} + 1}}{\frac{c}{b - c} + 1}$$

$$= a\,[V_o + (b - c\,t]^{\frac{c}{b - c} + 1}$$

Como

$$e^{-\int Q\,(t)\,dt} = [V_o + (b - c)\,t]^{\frac{c}{c - b}}$$

tenemos que la solución general de la ecuación diferencial de nuestro problema es

$$x\,(t) = a\,[V_o + (b - c)\,t] + K\,[V_o + (b - c)\,t]^{\frac{c}{c - b}}.$$

Como $x\,(0) = x_o$, tenemos

$$x_o = a\,V_o + K\,(V_o)^{\frac{c}{c - b}}$$

de donde

$$K = (x_o - a\,V_o)\,(V_o)^{\frac{c}{b - c}}$$

entonces la solución a nuestro problema (i.e. la expresión que nos da la cantidad de sal en el tanque a un tiempo t) viene dada por

$$\boxed{x(t) = a\,[V_o + (b - c)\,t] + (x_o - a\,V_o)\,(V_o)^{\frac{c}{b - c}}\,[V_o + (b - c)\,t]^{\frac{c}{c - b}}}$$

Quím. 2

Un tanque cuya capacidad es de 1 000 l contiene inicialmente 250 l de una solución acuosa en la cual se encuentran disueltos 10 kg de sal. Una solución de sal, conteniendo 0.3 kg de sal por litro de solución, entra al tanque a una velocidad de 15 l/min y la mezcla, bien agitada, abandona el tanque a una velocidad de 5 l/min. Encuentre la cantidad de sal que hay en el tanque justo en el momento antes de que éste comience a derramarse. Haga una gráfica de la cantidad de sal en el tanque contra el tiempo.

Solución

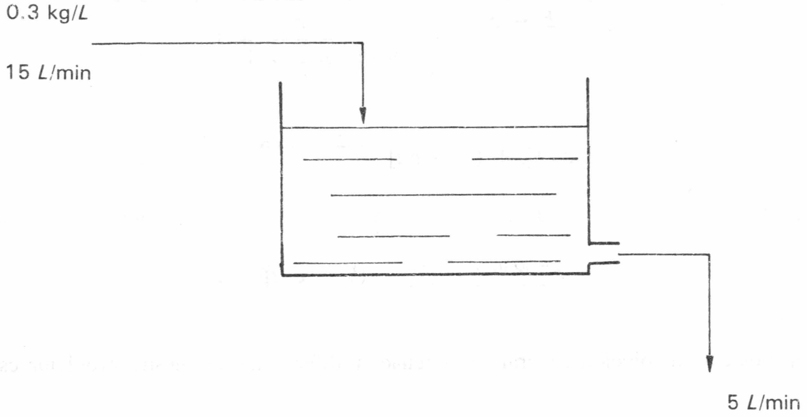


Figura 24. Problema Quím. 2.

Si x es la cantidad de sal (kg) en el tanque a un tiempo t, tenemos que, haciendo un balance de sal en el tanque

$$\frac{dx}{dt} = \left(0.3\ \frac{\text{kg}}{L}\right)\left(15\ \frac{L}{\text{min}}\right) - \left(\frac{x}{V}\ \frac{\text{kg}}{L}\right)\left(5\ \frac{L}{\text{min}}\right)$$

donde V es el volumen de solución en el tanque a un tiempo t, i.e.

$$V = 250 + 15\,t - 5\,t = 250 + 10\,t\ (L)$$

Entonces, la ecuación diferencial de nuestro problema es:

$$\frac{dx}{dt} = 4.5 - \frac{5}{250 + 10\,t}\,x$$

o

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{50 + 2\,t}\,x = 4.5$$

Calculamos las integrales.

$$\int \frac{1}{50 + 2\,t}\,dt = \tfrac{1}{2}\,ln\,(50 + 2\,t)$$

$$\int 4.5\,e^{\frac{1}{2}\,ln\,(50+2\,t)}\,dt = 4.5\int \sqrt{50 + 2\,t}\,dt =$$

$$\frac{4.5}{2}\,\frac{2}{3}\,(50 + 2\,t)^{3/2} = 1.5\,(50 + 2t)^{3/2}$$

La solución general de la ecuación está dada por

$$x = e^{-\int \frac{1}{50 + 2t} dt} \int 4.5 \, e^{-\int \frac{1}{50 + 2t} dt} dt +$$

$$K e^{-\int \frac{1}{50 + 2t} dt}$$

y como

$$e^{-\int \frac{1}{50 + 2t} dt} = \frac{1}{\sqrt{50 + 2t}}$$

tenemos que

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{50 + 2t}} 1.5 (50 + 2t)^{3/2} +$$

$$\frac{K}{\sqrt{50 + 2t}} = 1.5 (50 + 2t) + \frac{K}{\sqrt{50 + 2t}}$$

Como $x(0) = 10$

$$10 = 1.5 (50) + \frac{K}{\sqrt{50}}$$

de donde $K = -65\sqrt{50}$

Entonces

$$x(t) = 1.5 (50 + 2t) - \frac{65\sqrt{50}}{\sqrt{50 + 2t}}$$

Queremos saber x para cuando t sea tal que $V = 1\,000\, L$ (capacidad total del tanque).

Como

$$V = 250 + 10t$$

tenemos que de

$$1\,000 = 250 + 10t$$

se obtiene

$$t = 75 \text{ min}$$

entonces

$$x = 1.50 (50 + (2)(75)) - \frac{65\sqrt{50}}{\sqrt{50 + (2)(75)}} = 267.5 \text{ kg}$$

i.e. justo antes de comenzar a derramarse la solución en el tanque, éste tenía 267.5 kg de sal.

La gráfica de la cantidad de sal en el tanque contra el tiempo es como sigue

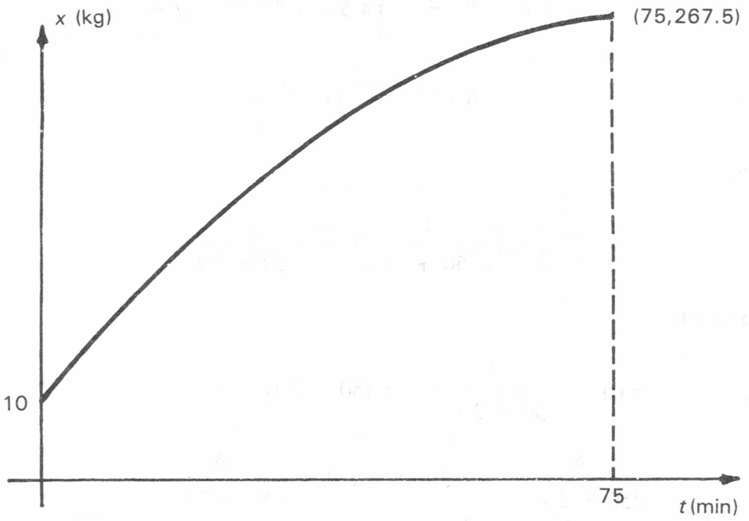


Figura 25. Solución del problema Quím. 2.

Quím. 3

Un tanque de volumen 100 l contiene una solución salina que lleva disueltos 10 kg de sal. Al tanque está entrando agua a una velocidad de 3 l/min produciéndose una mezcla que, a su vez, después de ser perfectamente agitada, se trasvasa, con la misma velocidad, a otro tanque de la misma capacidad, el cual estaba inicialmente lleno de agua pura. De este segundo tanque sale el exceso de líquido. ¿Qué cantidad de sal contiene el segundo tanque después de una hora?, ¿cuál es la cantidad máxima de sal en el segundo tanque?, ¿cuándo se logra esta cantidad máxima?

Solución

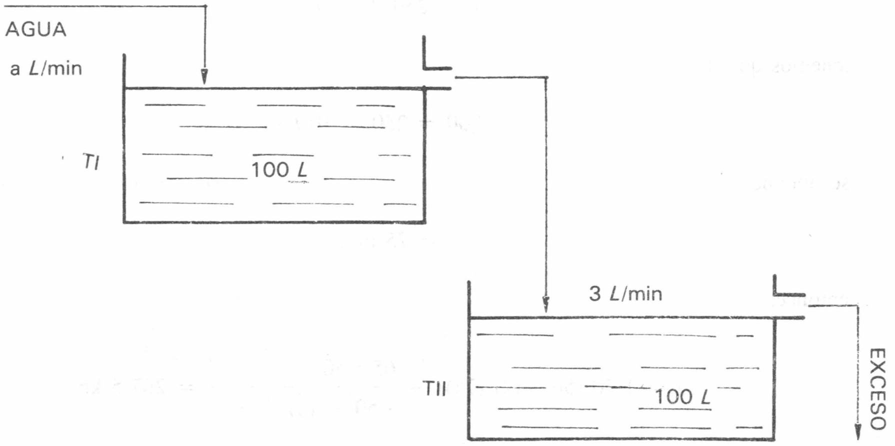


Figura 26. Problema Quím. 3.

Llamemos *T* I y *T* II al primer y al segundo tanques respectivamente.
Sea x la cantidad de sal (kg) en *T* I a un tiempo t, y la cantidad de sal (kg) en *T* II a un tiempo t.

Entonces, para *T* I tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{100}3$$

puesto que la entrada de sal a *T* I es nula (está entrando agua pura).

Similarmente, para *T* II tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{x}{100}3}_{\text{entradas}} - \underbrace{\frac{y}{100}3}_{\text{salidas}}$$

De la ecuación diferencial para *T* I obtenemos que

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3}{100}dt$$

como $x\,(0) = 10$, tenemos que

$$\int_{10}^{x}\frac{dx}{x} = -\frac{3}{100}\int_{0}^{t}dt$$

$$ln\frac{x}{10} = -\frac{3}{100}t$$

de donde

$$x = 10\,e^{-\frac{3}{100}t}$$

De la ecuación diferencial para *T* II, tenemos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{10\,e^{-\frac{3}{100}t}}{100}3 - \frac{y}{100}3$$

o

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{100}y = \frac{3}{10}e^{-\frac{3}{100}t}$$

que es una ecuación lineal de primer orden no homogénea, cuya solución general es

$$y = e^{\int\frac{3}{100}dt}\int\frac{3}{10}e^{-\frac{3}{100}t}e^{\int\frac{3}{100}dt}dt + K\,e^{-\int\frac{3}{100}dt}$$

donde K se calcula de la condición inicial para *T* II que es $y\,(0) = 0$.

Entonces

$$y = e^{\frac{3}{100}t} \frac{3}{10} t + K e^{-\frac{3}{100}t}$$

imponiendo la condición inicial $y\ (0) = 0$, tenemos que

$$0 = K$$

por lo que

$$y = \frac{3}{10} te^{-\frac{3}{100}t}$$

Si $t = 60$ min obtenemos que, después de 1 hr T II tiene

$$y + \frac{3}{10} (60)\ e^{-\frac{3}{100}(60)} = 2.97538 \text{ kg de sal}$$

Para hallar la cantidad máxima de sal en T II, consideramos que en T II la cantidad de sal al tiempo t viene dada por

$$y = \frac{3}{10} t\ e^{-\frac{3}{100}t}$$

de donde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{10} e^{-\frac{3}{100}t} \left(1 - \frac{3}{100} t\right)$$

Usando la condición de extremo $\frac{dy}{dt} = 0$ obtenenos que

$$t = \frac{3}{100} \text{ (min)}$$

(de la expresión para $\frac{dy}{dt}$ es claro que se trata de un máximo), por lo que es precisamente a este tiempo que se tiene la cantidad máxima de sal en T II, que es entonces:

$$y_{\text{máx}} = \frac{3}{10} \frac{100}{3} e^{-\frac{3}{100} \frac{100}{3}} = \frac{10}{e} \text{ kg}$$

2.2 Problemas de disoluciones

El planteamiento general de problemas relacionados con disoluciones es el siguiente: se tiene un compuesto químico C (soluto) que va a ser disuelto en cierto solvente (por ejemplo agua). A $t = 0$ se coloca cierta cantidad de C en determinada cantidad del solvente, comenzando así el proceso de *disolución* de C en el solvente (proceso por medio del cual C se incorpora a la solución).

Se trata de ver qué cantidad de C queda sin disolverse después de un tiempo t. Experimentalmente se ha llegado a la siguiente "ley de disolución": la velocidad a la que C se incorpora a la solución, varía directamente con el producto de: (i) la cantidad instantánea de C que queda aún sin disolverse; (ii) la diferencia entre la concentración instantánea de la solución al tiempo t, y la máxima concentración posible a las condiciones dadas de presión y temperatura (a esta concentración se le llama *concentración de la solución saturada*, la cual representa la máxima cantidad de C que puede disolverse por unidad de volumen de solvente).

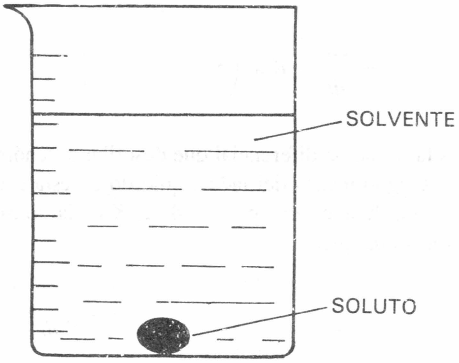


Figura 27. Proceso de disolución.

En problemas de disoluciones nos podemos interesar ya sea por la cantidad de C que se ha disuelto (llamémosle y) o bien, por la cantidad de C que queda sin disolver después de un cierto tiempo t (llamémosle x). Si son a gr iniciales los que colocamos de C en b litros de solvente, es claro entonces que

$$x + y = a$$

Resolveremos ahora algunos ejemplos.

Quím. 4

Cuando a gr de un cierto compuesto químico C se colocan en b l de agua, A gr de C quedan sin disolverse después de un tiempo de T min. Si la solución saturada contiene S gr de C por litro de solución (éste es un dato que se obtiene experimentalmente, y es constante para condiciones dadas de presión y temperatura) muestre que la cantidad (en gramos) de C que queda sin disolver después de un tiempo t es de

$$\frac{a\,R\,(S\,b - a)}{S\,B - a\,R} \text{ donde } R = \left[\frac{S\,b\,A}{a\,(S\,b - a + A)}\right]^{t/T}$$

Muestre que si $S \to \infty$, la cantidad de C no disuelto se aproxima a: $a\,[A/a]^{t/T}$.

Solución

Sea x la cantidad de C que queda sin disolverse después de t min.

Ciertamente x es una función *decreciente* de t. Como inicialmente teníamos a gr de C, después de t min tendremos $(a - x)$ gr de C incorporados a la solución, por lo que la concentración de la solución a un tiempo t será de

$$\frac{a - x}{b} \frac{\text{gr}}{\text{l}}$$

Como $S \frac{\text{gr}}{\text{l}}$ es la concentración de la solución saturada, tenemos que, según la ley de disolución

$$- \frac{dx}{dt} = K\, x \left(S - \frac{a - x}{b} \right)$$

siendo ésta entonces la ecuación diferencial que describe el fenómeno de disolución que estamos considerando. El signo menos del lado izquierdo de esta ecuación se debe a que, como ya observamos, x es una función decreciente de t. K es la constante de proporcionalidad.

Separando variables nos queda

$$\frac{dx}{x\left(S - \frac{a - x}{b} \right)} = - K\, dt$$

o

$$\frac{b\, dx}{x\, (S\, b - a + x)} = - K\, dt$$

Sabemos que en $t = 0$, $x = a$, de modo que, integrando

$$\int_a^x \frac{b\, dx}{x\, (S\, b - a + x)} = - K \int_0^t dt$$

Resolvamos la integral del lado izquierdo usando fracciones parciales. Sabemos que

$$\frac{b}{x\, (S\, b - a + x)} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{S\, b - a + x}$$

$$b = C_1\, (S\, b - a + x) + C_2\, x$$

Si $x = 0$ obtenemos $C_1 = \frac{b}{S\, b - a}$, y si $x = a - S\, b$ obtenemos que $C_2 = \frac{b}{a + S\, b} = - C_1$, de modo que

$$\frac{b}{x\,(S\,b - a + x)} = \frac{b}{S\,b - a}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{S\,b - a + x}\right]$$

Entonces

$$\int_a^x \frac{b\,dx}{x\,(S\,b - a + x)} = \frac{b}{S\,b - a}\left[\int_a^x \frac{dx}{x} - \int_a^x \frac{dx}{S\,b - a + x}\right]$$

$$= \frac{b}{(S\,b - a)}\left[ln\,\frac{x}{a} - ln\,\frac{S\,b - a + x}{S\,b}\right]$$

$$= \frac{b}{S\,b - a}\,ln\,\frac{S\,b\,x}{a\,(S\,b - a + x)}$$

Entonces

$$\frac{b}{S\,b - a}\,ln\,\frac{S\,b\,x}{a\,(S\,b - a + x)} = -\,K\,t \qquad \text{(A)}$$

Usamos ahora el dato de que después de *T* min quedan *A* gr de *C* sin disolver, para calcular *K*, i.e. $t = T$, $x = A$, de modo que

$$\frac{b}{S\,b - a}\,ln\,\frac{S\,b\,A}{a\,(S\,b - a + A)} = -\,K\,T$$

de donde

$$K = -\frac{b}{S\,b - a}\,\frac{1}{T}\,ln\,\frac{S\,b\,A}{a\,(S\,b - a + A)}$$

Entonces, sustituyendo el valor de *K* en (**A**) obtenemos

$$\frac{b}{S\,b - a}\,ln\,\frac{S\,b\,x}{a\,(S\,b - a + x)} = \frac{b}{S\,b - a}\,\frac{t}{T}\,ln\,\frac{S\,b\,A}{a\,(S\,b - a + A)}$$

de donde

$$\frac{S\,b\,x}{a\,(S\,b - a + x)} = \left[\frac{S\,b\,A}{a\,(S\,b - a + A)}\right]^{t/T}$$

Llamemos

$$R = \left[\frac{S\,b\,A}{a\,(S\,b - a + A)}\right]^{t/T}$$

Entonces

$$\frac{S\,b\,x}{a\,(S\,b - a + x)} = R$$

de donde, despejando x obtenemos

$$x = \frac{a\,R\,(S\,b - a)}{(S\,b - a\,R)}$$

que era lo que se quería probar.

Ahora, cuando $S \to \infty$ tenemos

$$\lim_{S \to \infty} R = \lim_{S \to \infty} \left[\frac{S\,b\,A}{a\,(S\,b - a + A)} \right]^{t/T} = \left[\frac{A}{a} \right]^{t/T}$$

de modo que

$$\lim_{S \to \infty} x = \lim_{S \to \infty} \frac{a\,R\left(b - \dfrac{a}{S}\right)}{b - R\dfrac{a}{S}} = a \lim_{S \to \infty} R = a \left[\frac{A}{a} \right]^{t/T}$$

Interpretemos este último resultado. Vemos pues que en el caso de que la concentración de la solución saturada sea muy grande, la variación de la cantidad de C que queda sin disolverse con el tiempo, tiende a comportarse como $a \left[\dfrac{A}{a} \right]^{t/T}$. Este hecho lo podemos ver haciendo el siguiente planteamiento.

En la ecuación diferencial propuesta para el problema aparece el término $S - \dfrac{a - x}{b}$, que es la diferencia entre la concentración de la solución saturada y la concentración instantánea de la solución al tiempo t.

Dado que S es muy grande $S - \dfrac{a - x}{b} \approx S$; de modo que siendo x la cantidad de C que quede sin disolverse a un tiempo t, el comportamiento de x con t tenderá a ser descrito por

$$-\frac{dx}{dt} = K\,x\,S$$

de donde efectivamente se obtiene que

$$x = a \left[\frac{A}{a} \right]^{t/T}$$

Quím. 5

Cierta cantidad de una sustancia indisoluble contiene entre sus poros 10 kg de sal. Actuando con 90 l de agua se observó que durante 1 hora se disolvió la mitad de la sal contenida. ¿Cuánta sal se disolvería en el mismo tiempo si se duplicase la cantidad de agua? (la concentración de la solución saturada es de 1/3 kg/l).

Solución

Sea y la cantidad (kg) de sal que se ha incorporado a la solución al tiempo t (hr).

Entonces, según la ley de disolución, obtenemos la siguiente ecuación diferencial que nos permitirá calcular K (la constante de proporcionalidad)

$$\frac{dy}{dt} = K(10 - y)\left(\frac{1}{3} - \frac{y}{90}\right)$$

Separando variables

$$\frac{dy}{(10 - y)(30 - y)} = \frac{1}{90} K\,dt$$

Como a $t = 0$ tenemos $y = 0$ entonces

$$\int_0^y \frac{dy}{(10 - y)(30 - y)} = \frac{1}{90} K \int_0^t dt$$

Separando en fracciones parciales el integrando del lado izquierdo de esta ecuación, tenemos

$$\frac{1}{(10 - y)(30 - y)} = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{10 - y} - \frac{1}{30 - y}\right]$$

por lo que

$$\int_0^y \frac{dy}{(10 - y)(30 - y)} = \frac{1}{20}\int_0^y \frac{dy}{10 - y} - \frac{1}{20}\int_0^y \frac{dy}{30 - y}$$

$$= \frac{1}{20}\, ln\left(\frac{30 - y}{30}\right) - \frac{1}{20}\, ln\left(\frac{10 - y}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{20}\, ln\,\frac{30 - y}{3(10 - y)}$$

Entonces, la solución de la ecuación queda como

$$\frac{1}{20}\, ln\,\frac{30 - y}{3(10 - y)} = \frac{1}{90} K\,t$$

Sabemos que si $t = 1$ hr, entonces $y = 5$ kg, por lo que

$$\frac{1}{20}\, ln\, \frac{30 - 5}{3\,(10 - 5)} = \frac{1}{90}\, K\,(1)$$

de donde

$$K = \frac{9}{2}\, ln\, \frac{5}{3}$$

Una vez conocido el valor de *K* podemos plantear la ecuación diferencial que nos conducirá a la solución del problema

$$\frac{dy}{dt} = K\,(10 - y)\left(\frac{1}{3} - \frac{y}{180}\right)$$

De aquí queremos saber el valor de y para $t = 1$ hr.

Separando variables

$$\frac{dy}{(10 - y)\,(60 - y)} = \frac{1}{180}\, K\, t$$

Como a $t = 0$ tenemos $y = 0$, entonces

$$\int_0^y \frac{dy}{(10 - y)\,(60 - y)} = \frac{1}{180}\, K \int_0^t dt$$

Separando en fracciones parciales

$$\frac{1}{(10 - y)\,(60 - y)} = \frac{1}{50}\left(\frac{1}{10 - y} - \frac{1}{60 - y}\right)$$

entonces

$$\int_0^y \frac{dy}{(10 - y)\,(60 - y)} = \frac{1}{50}\int_0^y \frac{dy}{10 - y} - \frac{1}{50}\int_0^y \frac{dy}{60 - y} =$$

$$= \frac{1}{50}\, ln\left(\frac{60 - y}{60}\right) - \frac{1}{50}\, ln\left(\frac{10 - y}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{50}\, ln\, \frac{60 - y}{6\,(10 - y)}$$

Entonces

$$\frac{1}{50}\, ln \,\frac{60 - y}{6\,(10 - y)} = \frac{1}{180}\, K\, t$$

despejando y, obtenemos

$$y = \frac{60e^{\frac{5}{18}Kt} - 60}{6e^{\frac{5}{18}Kt} - 1}$$

Usando el valor de K calculado y $t = 1$ hr, obtenemos

$$y = \frac{60\left(\frac{5}{3}\right)^{5/4} - 60}{6\left(\frac{5}{3}\right)^{5/4} - 1} = 5.17477 \text{ kg}$$

que es la cantidad de sal que se disolvería si en lugar de 90 l de agua se usara el doble.

2.3 Problemas de cinética química

La cinética química se encarga del estudio de las ''velocidades de reacción'' de las reacciones químicas. Si consideramos una reacción general, donde los reactantes A y B se combinan para producir C, lo cual se escribe

$$A + B \longrightarrow C$$

la velocidad de esta reacción la podemos medir por medio de la velocidad a la que A (o B) desaparece, o bien, por medio de la velocidad a la que C aparece. En esta reacción puede ocurrir que para producir ***c*** moles de C tengan que combinarse ***a*** moles de A y ***b*** moles de B. En tal caso la reacción (balanceada) se escribe como

$$a\,A + b\,B \longrightarrow c\,C$$

La llamada ''ley de acción de masas'' nos permitirá establecer relaciones entre la velocidad de la reacción y las concentraciones de los reactantes. Esta ley establece que, manteniendo la temperatura constante, la velocidad (instantánea) de una reacción es proporcional al producto de las concentraciones molares (instantáneas) de las sustancias reaccionantes.

Entendemos por ''concentración molar'' de una sustancia X, a la cantidad de moles que hay de X en la unidad de volumen. Denotaremos este tipo de concentración por $[X]$ (moles/litro).

Entonces, para la reacción que venimos considerando, la ley de acción de masas establece que

$$\text{Velocidad de la reacción } \alpha\ [A]^{\alpha}\ [B]^{\beta}$$

Si llamamos x a los moles (por litro) de producto C que se han formado después de un tiempo t, tendremos que $\frac{dx}{dt}$ medirá precisamente la velocidad de variación (en este caso, la velocidad de aumento) de x con respecto al tiempo. Esto es precisamente lo que debemos de entender por ''velocidad (instantánea) de la reacción''. Entonces, la ley de acción de masas podrá formularse matemáticamente como

$$\frac{dx}{dt} = k\,[A]^{\alpha}\,[B]^{\beta}$$

Los valores de α y β se obtienen experimentalmente. A la cantidad $(\alpha + \beta)$ se le llama *orden* (total) de la reacción. Normalmente (como en todos los ejemplos que consideraremos aquí), el orden de una reacción coincide con su *molecularidad* (cantidad de moles reaccionantes). Así, en nuestro caso tendríamos que $\alpha = a$ y $\beta = b$, quedándonos entonces que

$$\frac{dx}{dt} = k\,[A]^{a}\,[B]^{b}$$

A la constante de proporcionalidad k se le llama ''constante de velocidad de la reacción'' y es parámetro característico de cada reacción (a condiciones dadas de presión y temperatura).

A esta última ecuación se le llama *ecuación cinética* de la reacción correspondiente.

Veamos cómo relacionar $[A]$ y $[B]$ con x. Sabemos que para producir c moles (por litro) de C necesitamos que reaccionen a moles (por litro) de A con b moles (por litro) de B, de modo que para producir x moles (por litro) de C necesitaremos que reaccionen $\frac{a}{b}x$ moles (por litro) de A con $\frac{b}{c}x$ moles (por litro) de B.

Si inicialmente habíamos colocado en el recipiente donde se efectúa la reacción A_0 moles (por litro) de A con B_0 moles (por litro) de B, tendremos entonces que en el instante t, los valores de $[A]$ y $[B]$ están dados por

$$[A] = A_0 - \frac{a}{c}x$$

$$[B] = B_0 - \frac{b}{c}x$$

de modo que la expresión matemática de la ley de acción de masas se escribe como

$$\frac{dx}{dt} = k\,(A_0 - \frac{a}{c}x)^{a}\,(B_0 - \frac{b}{c}x)^{b}$$

Si nos preguntamos entonces por la concentración molar de C después de un cierto tiempo t, nuestra tarea será resolver esta ecuación diferencial.

Veamos algunos ejemplos.

Quím. 6

Se colocan 260 gr de acetato de etilo ($CH_3COOC_2H_5$) junto con 175 gr de hidróxido de sodio (NaOH) en una solución acuosa, para producir acetato de sodio (CH_3COONa) y alcohol etílico (C_2H_5OH), de acuerdo a la ecuación

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH$$

Después de 10 minutos se han formado 60 gr de acetato de sodio. Use la ley de acción de masas para calcular:

a) La constante de velocidad de esta reacción.
b) La concentración molar y los gramos de acetato de sodio y de alcohol etílico en la solución reaccionante después de media hora.

Solución

Tomaremos como base de cálculo 1 litro de solución reaccionante.

Debido a que los datos de las cantidades de substancias reaccionantes y productos están dados en gramos, haremos la conversión correspondiente a moles, sabiendo que el número de moles de una sustancia X (n_X) se relaciona con su peso en gramos (w_X) y su peso molecular (P.M._X), como

$$n_X = \frac{w_X}{\text{P.M.}_X}$$

Calculemos los pesos moleculares de las sustancias involucradas en el problema usando los pesos atómicos

$\text{P.A.}_C = 12$, $\text{P.A.}_H = 1$, $\text{P.A.}_O = 16$, $\text{P.A.}_{Na} = 23$.
$\text{P.M.}_{CH_3COOC_2H_5} = 4\,(12) + 8\,(1) + 2\,(16) = 88$ gr/mol.
$\text{P.M.}_{NaOH} = 23 + 16 + 1 = 40$ gr/mol.
$\text{P.M.}_{CH_3COONa} = 2\,(12) + 3\,(1) + 2\,(16) + 23 = 28$ gr/mol.
$\text{P.M.}_{C_2H_5OH} = 2\,(12) + 6\,(1) + 16 = 46$ gr/mol.

De tal modo que en la solución reaccionante se colocaron

$$\frac{260}{88} = 2.9545 \text{ moles de acetato de etilo}$$

y

$$\frac{175}{40} = 4.375 \text{ moles de hidróxido de sodio.}$$

Sea x los moles de acetato de sodio formados a los t min. Entonces, como la reacción es tal que 1 mol de acetato de etilo reacciona con 1 mol de hidróxido de sodio para formar 1 mol de acetato de sodio y 1 mol de alcohol etílico, tenemos que después de t min.

$$[CH_3COOH_2H_5] = 2.9545 - x$$

$$[NaOH] = 4.375 - x$$

de modo que la ley de acción de masas queda expresada como

$$\frac{dx}{dt} = k\,(2.9545 - x)\,(4.375 - x)$$

Integremos esta ecuación.

Separando variables

$$\frac{dx}{(2.9545 - x)\,(4.375 - x)} = kt$$

Como a $t = 0$, $x = 0$, integrando nos queda

$$\int_0^x \frac{dx}{(2.9545 - x)\,(4.375 - x)} = k \int_0^t dx$$

Usando fracciones parciales para resolver la integral del lado izquierdo tenemos

$$\frac{1}{(2.9545 - x)\,(4.375 - x)} = 0.704 \left[\frac{1}{(2.9545 - x)} - \ldots \right.$$

$$\ldots \qquad \left. - \frac{1}{(4.375 - x)} \right]$$

de modo que

$$\int_0^x \frac{dx}{(2.9545 - x)\,(4.375 - x)} = 0.704 \int_0^x \frac{dx}{2.9545 - x} -$$

$$- 0.740 \int_0^x \frac{dx}{4.375 - x}$$

$$= 0.704\, ln \frac{4.375 - x}{4.375} - 0.704\, ln \frac{2.9545 - x}{2.9545}$$

$$= 0.704\, ln\, (0.6753) \frac{4.375 - x}{2.9545 - x}$$

Regresando a la ecuación nos queda

$$0.704\, ln\, (0.6753) \frac{4.375 - x}{2.9545 - x} = k\, t \qquad \ldots (\mathbf{B})$$

Sabemos que a los $t = 10$ min se han formado

$$x = \frac{60}{82} = 0.7317 \text{ moles de acetato de sodio}$$

de modo que

$$0.704\ ln\ (0.6753)\ \frac{4.375\ -\ 0.7317}{2.9545\ -\ 0.7317} = k\ (10)$$

de donde

$$k = 7.1473 \times 10^{-3} \frac{\text{litros}}{\text{mol min}}$$

Una vez que hemos calculado k podemos resolver el inciso b.
Se nos pregunta por el valor de x para $t = 30$ min.

De la expresión (**B**) obtenemos que

$$x = \frac{4.375\ (e^{1.4205\,k\,t} - 1)}{1.481\ e^{1.4205\,k\,t} - 1}$$

Usando el valor calculado de k y $t = 30$ min obtenemos

$$x = 1.5449 \text{ moles}$$

por lo que la concentración molar de acetato de sodio y alcohol etílico en la solución reaccionante, después de $\frac{1}{2}$ hr de haber comenzado la reacción, es de 1.5449 moles/litro.

En ese momento hay

$w_{CH_3COONa} = (1.5449)\ (82) = 126.68$ gr de acetato de sodio y
$w_{C_2H_5OH} = (1.5449)\ (46) = 71.065$ gr de alcohol etílico en la solución reaccionante.

Quím. 7

Cierta sustancia A, cuya cantidad inicial era de N_0 moles, va transformándose en otra B, siendo inmediato el comienzo de una segunda reacción por medio de la cual esta última sustancia B, producida de la primera reacción, se transforma en una tercera sustancia C. ($A \longrightarrow B \longrightarrow C$). Ambas transformaciones se efectúan como reacciones de primer orden. Las constantes de velocidad de reacción son k_1 min^{-1} y k_2 min^{-1} respectivamente para la primera y segunda reacción (suponga $k_2 \neq k_1$). ¿Qué cantidad de producto final se obtiene después de t min de haber comenzado el proceso?

Solución

Tenemos la siguiente situación (que en general se conoce como "reacción consecutiva")

$$A \xrightarrow{\quad k_1 \quad} B \xrightarrow{\quad k_2 \quad} C$$

Nuevamente tomamos de base 1 litro de solución reaccionante. Llamemos x al número de moles de B formados a un tiempo t. De ambas reacciones (balanceadas) vemos que tanto la primera como la segunda reacción son "uno a uno" (i.e. un mol de A produce un mol de B, así como un mol de B produce un mol de C). Tenemos que la concentración molar instantánea de A es

$$[A] = N_0 - x$$

siendo entonces la ecuación cinética para la primera reacción como sigue

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (N_0 - x)$$

Si llamamos y a la cantidad (moles) de C formada a un tiempo t, tenemos que la concentración molar instantánea de B es

$$[B] = x - y$$

de modo que la ecuación cinética para la segunda reacción es

$$\frac{dy}{dt} = k_2 (x - y)$$

Resolviendo para x tenemos

$$\frac{dx}{N_0 - x} = k_1 \, dt$$

Como $x(0) = 0$, integrando nos queda

$$\int_0^x \frac{dx}{N_0 - x} = k_1 \int_0^t dt$$

o

$$- \ln \frac{N_0 - x}{N_0} = k_1 t$$

Ahora, según la ecuación cinética de la segunda reacción tenemos

$$\frac{dy}{dt} = k_2 (N_0 - N_0 e^{-k_1 t} - y)$$

o

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_2 N_0 (1 - e^{-k_1 t})$$

ecuación (lineal primer orden no homogénea) que tiene por solución general

$$y = e^{\int k_2 dt} \int k_2 N_0 (1 - e^{-k_1 t}) \, e^{\int k_2 dt} \, dt + e^{-\int k_2 dt}$$

$$y = e^{-k_2 t}\left(N_0 e^{k_2 t} - \frac{N_0 k_2}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} \right) + c e^{-k_2 t}$$

$$= N_0 - \frac{N_0 k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + c e^{-k_1 t}$$

Como $y(0) = 0$, tenemos

$$0 = N_0 - \frac{N_0 k_2}{k_2 - k_1} + c$$

de donde

$$c = \frac{N_0 k_1}{k_2 - k_1}$$

Entonces la solución de nuestro problema está dada por la expresión

$$\boxed{y = N_0 - \frac{N_0}{k_2 - k_1}\left(k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t} \right)}$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 3. SECCIÓN 2)

1. Resuelva el ejemplo Quím. 1 suponiendo que la velocidad de entrada de la solución al tanque es igual a la velocidad con la que la mezcla abandona el mismo, i.e. suponiendo que $b = c$ (sugerencia: en este caso se obtiene una ecuación con variables separables).
2. Considere el ejemplo Quím. 1. Suponga que $b > c$ y que la capacidad del tanque es infinita. Demuestre que hasta los

$$\frac{1}{b - c}\left\{ \left[\frac{a(b - c)}{c(x_0 - a V_0)} \right]^{\frac{c - b}{b}} (V_0)^{\frac{c}{b}} - V_0 \right\}$$

   minutos, la cantidad de sal en el tanque va aumentando y a partir de ese momento comienza a disminuir.
3. Considere el ejemplo Quím. 2. Muestre que $x(t)$ es una función creciente en el intervalo de tiempo $[0,75]$, y que su gráfica es siempre cóncava hacia abajo en tal intervalo. Es decir, muestre que, en efecto, la gráfica de $x(t)$ es tal como fue exhibida en el ejemplo.
4. Considere el ejemplo Quím. 3. Haga las gráficas correspondientes a $x(t)$ y $y(t)$ para $t \geq 0$.
5. En un cierto proceso químico se ha especificado el manejo de agua con, a lo máximo, 3 gr de cierto contaminante por cada 100 litros de agua. El agua recibida por la planta contiene 3.5 gr del contaminante (llamémosle *C*) por cada 100 litros de agua, por lo que no es posible usarla directamente en el proceso, siendo entonces necesario someterla a un tratamiento previo por medio del cual es eliminado *C* hasta tenerlo en la especificación de 3 gr por cada 100 litros. Se ha reportado un desperfecto en la sección donde se hace el tratamiento de purificación al agua recibida por la planta. El proceso, para no detener-

se, necesita un flujo mínimo de 50 l/min de agua. Se dispone de un tanque en el que se encuentran almacenados 10 000 litros de agua que lleva disueltos 20 gr de contaminante. Se ha decidido tomar de la línea de agua recibida por la planta una línea de flujo al tanque de 50 l/min mezclar bien con el agua que tenía el tanque y de ahí sacar el flujo de 50 l/min que necesita el proceso para no detenerse. Suponiendo que se efectúa una agitación ideal en el tanque, diga de cuánto tiempo, como máximo, se dispone para hacer la reparación del equipo de tratamiento del agua.

6. Se tiene un tanque con 1 000 l de una solución acuosa que lleva disueltos 30 gr de un cierto colorante. A $t = 0$ comienza a fluir dentro del tanque agua pura, la cual se mezcla perfectamente con la solución en el tanque y esta mezcla abandona el mismo a la misma velocidad con que entra al tanque, que es de 10 l/min. ¿Al cabo de cuánto tiempo la concentración en el tanque es del 15 % de la concentración original? ¿Después de cuanto tiempo se tendrá una concentración de 0.0025 gr/l en el tanque?
7. Un tanque tiene 40 l de agua pura. Una solución salina con 100 gr de sal por litro entra al tanque a la razón de 1.6 l/min y sale del tanque a la razón de 2.3 l/min. *a*) Encuentre la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo t. *b*) Halle la cantidad de agua en el tanque cuando la concentración sea máxima. *c*) Determine la cantidad máxima de sal en el tanque a cualquier tiempo. *d*) Encuentre la concentración de sal en el tanque cuando éste tenga 25 l de solución.
8. En cierto tanque hay 150 l de una solución acuosa que contiene 40 Kg de sal. En dicho tanque entra agua a la razón de 5 l/min y la mezcla sale del tanque a la razón de 3 l/min. El contenido del tanque se agita de manera que la mezcla se mantiene homogénea. ¿Cuál será la cantidad de sal que habrá en el tanque al transcurrir 2 horas?
9. Los tanques I y II contienen inicialmente V l de agua. Al instante $t = 0$ comienza a fluir al tanque I una solución que contiene a gr/l de un compuesto químico C a una velocidad de flujo de b l/min. La mezcla pasa del tanque I al tanque II y abandona este último a la misma velocidad de b l/min. Suponiendo que se efectúa la agitación ideal en ambos tanques, demuestre que la cantidad de C en el tanque II después de t min es de

$$a\,V(1 - e^{-b\,t/V}) - a\,b\,t\,e^{-b\,t/V}\ \text{gr}$$

10. Se tiene dos tanques I y II. A $t = 0$ el tanque I tenía disueltos x_0 gr de un cierto compuesto químico C en V_1 l de agua, mientras que en el tanque II se tenían y_0 gr de C disueltos en V_2 l de agua. Comienza entonces a fluir al tanque I una solución conteniendo a gr de C por litro de solución a una velocidad de flujo de b l/min. La mezcla bien agitada pasa entonces al tanque II a la misma velocidad y después de mezclarse bien con la solución en este tanque lo abandona con el mismo flujo de b l/min. Suponga que $V_1 \neq V_2$. Demuestre que la cantidad de C en el tanque II al tiempo t es

$$aV_2 - \frac{V_2(aV_1 - x_0)}{V_1 - V_2}\, e^{-\frac{b}{V_1}t} + \left(y_0 - \frac{V_2(x_0 - aV_2)}{V_1 - V_2}\right) e^{-\frac{b}{V_2}t}$$

11. Suponiendo que las personas respiran 20 veces por minuto y que exhalan de cada vez 1639 cm^3 de aire que contiene 4 % de CO_2, encuéntrese el porcentaje de CO_2 en el aire de un aula una hora después de entrar 30 alumnos, suponiendo que el aire fuera puro al principio y que los ventiladores admiten 28.3 m^3 de aire fresco por minuto. Supóngase que el volumen del aula es de 283 m^3 y que el aire nuevo que entra contiene 0.04 % de CO_2.
12. El salón de una fábrica, cuyas dimensiones son $42 \times 15 \times 4.5$ m^3, recibe de los ventiladores 283 m^3 de aire nuevo por minuto, que contiene 0.04 % de CO_2. A las 7:30 A.M., media hora después de haber entrado los operarios, el contenido de CO_2 subió a 0.12 %. ¿Qué porcentaje puede preverse que habrá al medio día?

13. El aire que ocupa un recipiente de capacidad V l contiene inicialmente a % de oxígeno. El recipiente, que tiene dos tubos, recibe a través de uno de ellos oxígeno puro, mientras que por el otro sale el aire bien mezclado a la misma velocidad. Demostrar que la cantidad (litros) de oxígeno en el recipiente, después de que han pasado B l de oxígeno por él, viene dada por la fórmula

$$V - \left(V - \frac{a}{100}\right) e^{-B/V} \qquad (1)$$

14. Considere el siguiente problema: se tiene inicialmente un recipiente con V_0 l de agua en el que se encuentran A Kg de sal sin disolver. Suponga que a $t = 0$ comienza a fluir agua dentro del recipiente a una velocidad constante de a l/min. Se desea saber la cantidad de sal que queda sin disolverse al tiempo t. Demuestre que para contestar a esta pregunta habría que resolver una ecuación de Riccati.
15. Considérense 3 tanques de capacidad 1000 l cada uno. Inicialmente el tanque I contenía 750 de una solución salina en la que se encontraban disueltos 15 Kg de sal; el tanque II se encontraba vacío y en el tanque III se tenían 500 l de agua con un bloque de 50 Kg de sal sin disolver. Comienza entonces a fluir al tanque I una solución salina conteniendo 100 gr de sal por litro de solución a una velocidad de 10 l/min. La mezcla, bien agitada, abandona este tanque a la misma velocidad y pasa entonces al tanque II que comienza a llenarse (no hay salidas del tanque II). Después de que el tanque II llega a su capacidad máxima, el exceso comienza a fluir al tanque III. Se quiere saber cuánta sal se encuentra disuelta en el tanque III justo en el momento en que el tanque II comienza a derramarse.
16. El problema consiste en quitar la sal mezclada con un material inerte disolviéndola en un aceite. El material contiene 8 gr de sal y se usan 120 gr de aceite, que si se saturan disolverían 9 gr de sal. Suponiendo que al cabo de 40 min se disuelve la tercera parte de la sal que contiene el material, ¿qué cantidad de sal se habrá quitado al cabo de 6 horas?, ¿qué tiempo será necesario para quitar la mitad de la sal contenida en el material?. La densidad del aceite es de 2 gr/ml.
17. Una masa de material inerte que contiene 3.4 Kg de sal es agitada en 51.3 l de agua. En 6 min se han disuelto 870 gr de sal. ¿En cuánto tiempo se habrá disuelto el 80 % de la sal si una solución saturada contiene 360 gr de sal por litro de solución?
18. Una masa de material insoluble contiene 14.6 Kg de sal. Se agita con 80 l de agua durante 2 horas, al cabo de las cuales se encuentra que se ha disuelto la mitad de la sal. ¿Qué cantidad de sal se hubiera disuelto en el mismo tiempo si se hubiera usado la mitad de la cantidad de agua?
19. Considere la reacción de primer orden $A \rightarrow B$. Sea A_0 la cantidad de moles (por litro) de A presentes a $t = 0$ y x la cantidad de A que ha reaccionado al tiempo t. Demuestre que

$$x = A_0(1 - e^{-kt})$$

donde k es la constante de la velocidad de la reacción. ¿Qué unidades tiene k?, ¿qué pasa si $t \rightarrow \infty$? Interprete sus resultados.

20. Un líquido A se descompone de acuerdo con una cinética de primer orden, efectuándose la conversión del 50 % de A en 5 minutos. Calcúlese el tiempo necesario para que se tenga una conversión del 75 %
21. La reacción de descomposición del hexafeniletano disuelto en cloroformo es

$$(C_6H_5)_3 - C - C(C_6H_5)_3 \longrightarrow 2(C_6H_5)_3C$$

Se ha colocado un mol de hexafeniletano en un litro de solución reaccionante y se han observado los siguientes datos

t (min)	cantidad (moles de hexafeniletano presentes)
0.15	0.970
0.43	0.912
0.75	0.854
2.70	0.559
3.20	0.500
3.78	0.442
5.67	0.294

Calcule el valor de la constante de velocidad de reacción.

22. En cierto proceso químico una sustancia se transforma en otra con una velocidad proporcional a la cantidad (moles) de la sustancia que queda sin transformar. Si al cabo de 2 horas esa cantidad es de 0.76 moles y al cabo de 3 horas es de 0.48 moles, ¿qué cantidad habrá al cabo de 4 horas?, ¿qué cantidad había al principio?, ¿cuántos moles de sustancia habrá después de media hora de haber comenzado la reacción?
23. Cierta sustancia C se forma a partir de la reacción entre las sustancias A y B. Un mol de A se une con un mol de B para producir un mol de C. La velocidad de formación de C es directamente proporcional a las cantidades presentes (en moles) de A y B. Si las cantidades iniciales de estas sustancias eran de a y b moles respectivamente, ¿cuál es la cantidad de C que se obtiene al tiempo t? Considere los dos casos $a = b$ y $a \neq b$.
24. La reacción de saponificación del acetato de isopropilo mediante sosa cáustica es una reacción de segundo orden cuya ecuación es

$$CH_3COOCH(CH_3)_2 + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + (CH_3)_2CHOH$$

Se han colocado ($a\ t = 0$) 0.02270 moles de acetato de isopropilo con 0.03140 moles de sosa cáustica en un litro de solución reaccionante y se han observado los siguientes datos

t (min)	moles de acetato de isopropilo presentes	moles de sosa presentes
3	0.01664	0.02534
4	0.01432	0.02302
8	0.01092	0.01962
16	0.00681	0.01551
20	0.00424	0.01294

a) Calcule la constante de velocidad de reacción.

b) ¿Qué cantidad de acetato de sodio CH_3COONa se tendrá en la solución reaccionante al cabo de media hora?

25. Para la reacción del ácido sulfúrico con sulfato de dietilo en solución acuosa

$$H_2SO_4 + (C_2H_5)_2SO_4 \longrightarrow 2\ C_2H_5\ SO_4H$$

se vio que, poniendo 5.5 mol/l de H_2SO_4 con la misma cantidad de $(C_2H_5)_2SO_4$se formaba, después de 41 min, 1.18 mol/l de $C_2H_5SO_4H$, y después de 267 min 4.86 mol/l del mismo producto. Calcule la constante de velocidad de reacción.

26. Se llama *reacción reversible* (de primer orden) a una reacción del tipo

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B$$

donde el reactante A produce B, pero a su vez B produce A (las constantes de velocidad de reacción k_1 y k_2 respectivamente). Sea x la cantidad de sustancia A que ha reaccionado al tiempo t (se toma como base un litro de solución reaccionante).

a) Demuestre que la ecuación diferencial de este fenómeno es

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (A_0 - x) - k_2(B_0 - x)$$

donde A_0 y B_0 son las cantidades iniciales (en moles) de A y B respectivamente en la mezcla de la solución reaccionante. (Sugerencia: tome en cuenta el llamado *Principio de Independencia* de las reacciones directa e inversa, el cual establece que si en un sistema transcurren simultáneamente varias reacciones, entonces cada reacción será independiente de las restantes y su velocidad será directamente proporcional a las concentraciones —molares— de las sustancias reaccionantes).

b) Sea

$$L = \frac{k_1A_0 - k_2B_0}{k_1 + k_2}$$

Demuestre que la ecuación cinética puede escribirse como

$$\frac{dx}{dt} = (k_1 + k_2)(L - x)$$

c) Demuestre que x viene dado por la fórmula

$$x = L\,(1 - e^{-(k_1 + k_2)t})$$

d) ¿Qué ocurre cuando $t \to \infty$? Dé un significado físico a L. (Sugerencia: ¿qué ocurre cuando $\frac{dx}{dt} = 0$?).

27. La reacción de primer orden $A \longrightarrow B$ se llama *autocatalítica* si la presencia del producto B cataliza la misma reacción. Sea x la cantidad de A (en moles) que han

reaccionado al tiempo t. Suponga que a $t = 0$ se tenían en la mezcla de reacción A_0 moles de A y B_0 moles de B. Demuestre entonces que la ecuación cinética es

$$\frac{dx}{dt} = k(A_0 - x)(B_0 + x)$$

donde k es la constante de velocidad de reacción. Calcule la cantidad de moles de B presentes en la mezcla de reacción después de un tiempo t.

3. APLICACIONES A LA DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LAS CURVAS EN EL PLANO

Estaremos interesados por descubrir cuál es la curva (o cuál es la familia de curvas) que posee cierta propiedad dada. Nos ocuparemos con problemas en los cuales esta propiedad tenga que ver con la tangente a la curva, pues es claro que, por ejemplo, para saber que la circunferencia es la curva que tiene la propiedad de que todos sus puntos equidistan de un punto fijo, no es necesario saber ecuaciones diferenciales. Veremos entonces que al intentar contestar la pregunta acerca de cuál curva tiene tal o cual propiedad (del tipo de las citadas anteriormente), aparecerán ecuaciones diferenciales cuya solución nos dará la respuesta que buscamos. Veamos algunos ejemplos.

DGC. 1

Hallar la curva para la cual la longitud de la normal sea constante e igual a a.

Solución

Recordemos que dada la curva C y un punto P sobre ella, la longitud de la normal de C en P es la longitud del segmento $\overline{PR}$.

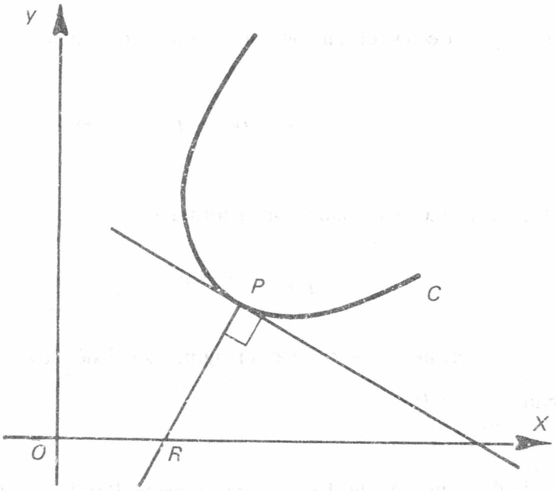


Figura 28. Ejemplo DGC. 1.

Si P (X,Y) es cualquier punto de C, es fácil ver que

$$|\overline{PR}| = |Y|\sqrt{1 + (Y')^2}$$

de modo que buscamos la curva tal que

$$|Y|\sqrt{1 + (Y')^2} = a$$

o

$$Y' = \frac{\pm\sqrt{a^2 - Y^2}}{Y}$$

que es la ecuación diferencial de nuestro problema.

Separando variables e integrando

$$\int \frac{Y\,dY}{\pm\sqrt{a^2 - Y^2}} = \int dX + C$$

de donde

$$\pm\sqrt{a^2 - Y^2} = X + C$$

o

$$\boxed{Y^2 + (X + C)^2 = a^2}$$

que son todas las circunferencias con centro en el eje X y radio a.

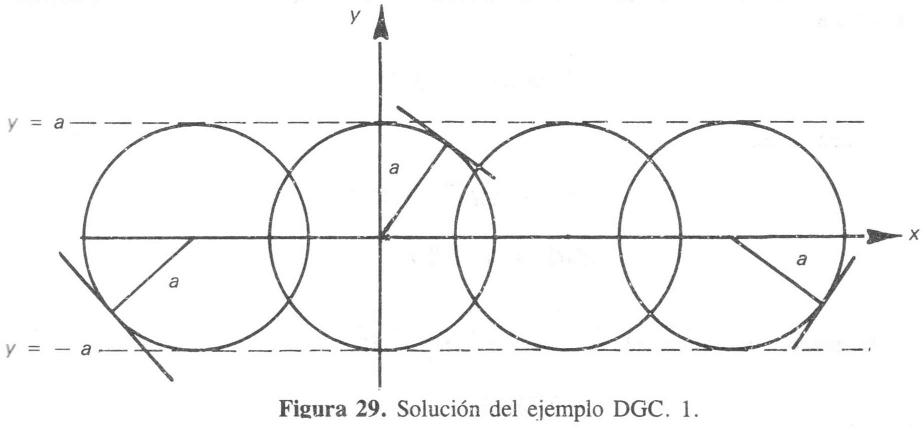


Figura 29. Solución del ejemplo DGC. 1.

DGC. 2

Encontrar la curva para la cual cualquier tangente se corta con el eje de ordenadas en el punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

Solución

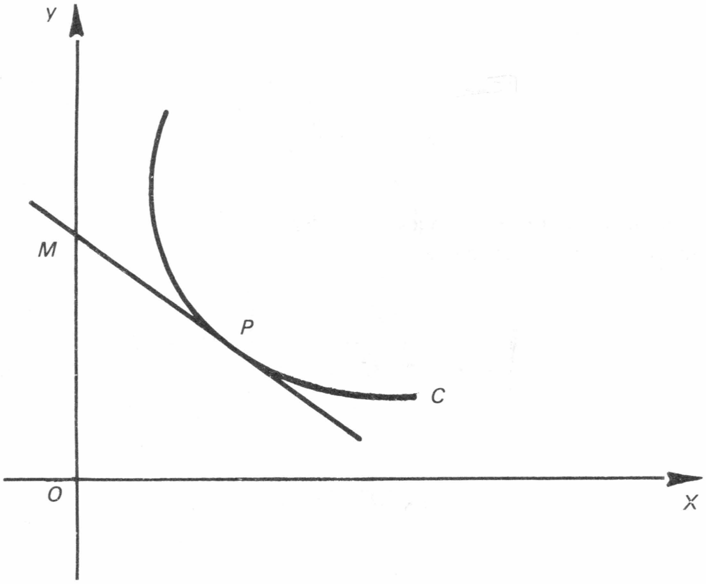


Figura 30. Ejemplo DGC. 2.

Sea $P(X, Y)$ un punto cualquiera de la curva C. La ecuación de la recta tangente a C por P es

$$y - Y = Y'(x - X)$$

donde Y' está evaluada en X.

Sea M la intersección de esta recta tangente con el eje de ordenadas. Las coordenadas de M son

$$M(O, Y - XY')$$

Tenemos que

$$|\overline{PM}| = \sqrt{X^2 + (XY')^2}$$

$$|\overline{MO}| = |Y - XY'|$$

De modo que, imponiendo la condición $|\overline{PM}| = |\overline{MO}|$, tenemos

$$\sqrt{X^2 + (XY')^2} = |Y - XY'|$$

o

$$X^2 + (X\,Y')^2 = (Y - X\,Y')^2$$

Despejando Y' obtenemos

$$Y' = \frac{Y^2 - X^2}{2\,X\,Y} = \frac{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{Y}{X}\right)}$$

que es la ecuación diferencial de nuestro problema.

Se trata de una ecuación homogénea, que sabemos se resuelve introduciendo la nueva variable dependiente U, tal que $Y = U\,X$.

Tenemos que

$$Y' = U + X\,U'$$

Sustituyendo

$$U + X\,U' = \frac{U^2 - 1}{2\,U}$$

de donde

$$X\,U' = -\frac{U^2 + 1}{2\,U}$$

Separando variables

$$\frac{2\,U\,dU}{U^2 + 1} = -\frac{dX}{X}$$

Integrando

$$\int \frac{2U\,dU}{U^2 + 1} = -\int \frac{dX}{X} + C_1$$

de donde

$$ln\,(U^2 + 1) = -\,ln\,X + C_1$$

o

$$(U^2 + 1)\,X = C$$

Regresando a la variable Y nos queda

$$\boxed{Y^2 + X^2 = C\,X}$$

que es la ecuación de una familia de circunferencias con centro en el punto $(\frac{C}{2}, 0)$ y radio $\frac{C}{2}$.

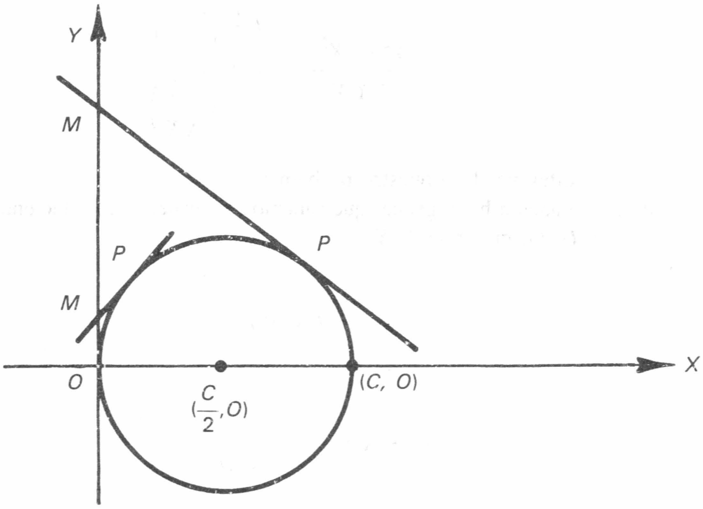


Figura 31. Solución del ejemplo DGC. 2.

DGC. 3

Hallar la curva para la cual la distancia que media entre el origen de coordenadas y la tangente en cualquier punto sea la misma a la que media entre el origen de coordenadas y la normal en el mismo punto.

Solución

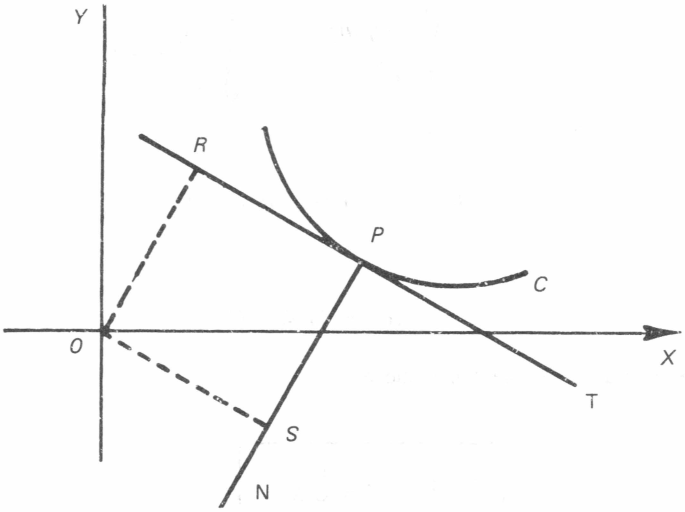


Figura 32. Ejemplo DGC. 3.

Sea P (X, Y) cualquier punto de la curva C. La ecuación de la recta tangente a C por P es, como sabemos

$$y - Y = Y'(x - X)$$

y de la normal es

$$y - Y = -\frac{1}{Y'}(x - X)$$

Llamemos T a la recta tangente a C en P y N a la normal.

Queremos que

$$d_{OT} = d_{ON} \qquad \text{(distancia entre un punto y una recta)}$$

i.e. de la figura anterior, queremos que

$$|\overline{OR}| = |\overline{OS}|$$

Recordemos que la distancia entre el punto (x_0, y_0) y la recta $A\,x + B\,y + C = 0$ está dada por

$$d = \frac{|Ax_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Escribamos las ecuaciones de T y de N en la forma $A\,x + B\,y + C = 0$.

La ecuación de T queda

$$Y'\,x - y + Y'\,X = 0$$

y la de N queda

$$x + Y'y - Y'\,X - X = 0$$

de modo que

$$|\overline{OR}| = \frac{|Y - Y'\,X|}{\sqrt{(Y')^2 + 1}}$$

y

$$|\overline{OS}| = \frac{|Y'\,Y + X|}{\sqrt{(Y')^2 + 1}}$$

Imponiendo la condición $|\overline{OR}| = |\overline{OS}|$ nos queda

$$|Y - Y'\,X| = |Y'\,Y + X|$$

de donde

$$Y - Y'\,X = \pm\,(Y'\,Y + X)$$

Despejando Y' tenemos

$$Y' = \frac{Y \mp X}{\pm Y + X}$$

que es una ecuación homogénea. Introduciendo la nueva variable dependiente U tal que $Y = U\,X$ nos queda

$$U + X\,U' = \frac{U \mp 1}{\pm U + 1}$$

de donde

$$X\,U' = \frac{U \mp 1}{\pm U + 1} - U$$

$$= -\frac{U^2 + 1}{U \pm 1}$$

Separando variables

$$\frac{(U \pm 1)\,dU}{U^2 + 1} = -\frac{dX}{X}$$

Integrando

$$\int \frac{(U \pm 1)\,dU}{U^2 + 1} = -\int \frac{dX}{X} + C$$

$$\frac{1}{2} ln\,(U^2 + 1) \pm \arctan U = -\,ln\,X + C$$

Regresando a las variables X Y queda

$$ln\,\sqrt{X^2 + Y^2} \pm \arctan \frac{Y}{X} = C$$

de donde

$$(K = e^C) \qquad \boxed{\sqrt{X^2 + Y^2} = K\,e^{\pm \arctan Y/X}}$$

que es la ecuación de la familia de curvas que buscamos.

Resulta más fácil visualizar esta familia pasando a las coordenadas polares. Haciendo $X = r\cos\theta$, $Y = r\,\mathrm{sen}\theta$, tenemos que se trata de la familia

$$r = K\,e^{\pm\theta}$$

que es una familia de espirales logarítmicas.

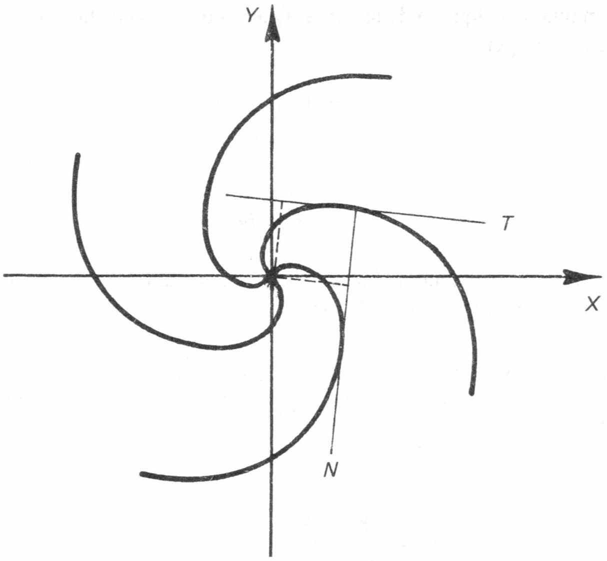


Figura 33

DGC. 4

Hallar la curva que tenga la propiedad de que el segmento de la tangente en cualquier punto, comprendido entre el eje x y la recta $y = a\,x + b$, se divide por el punto de contacto en dos partes iguales.

Solución

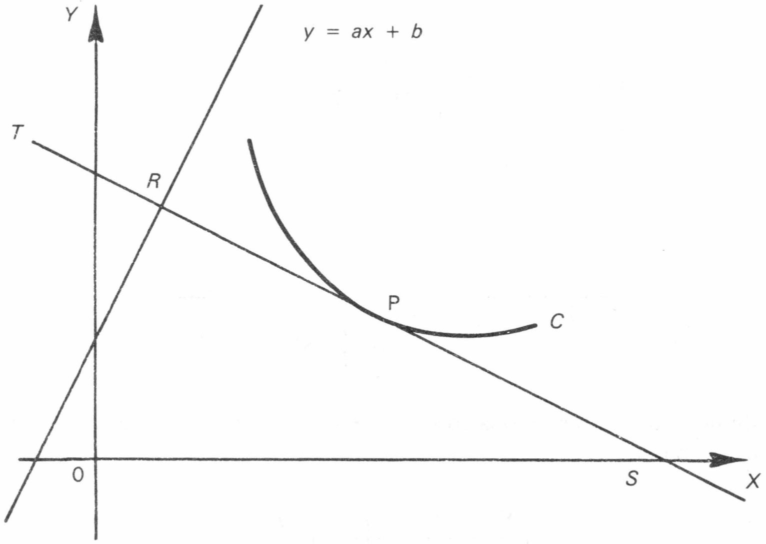


Figura 34

Sea $P\ (X,\ Y)$ un punto cualquiera de la curva. Queremos que la distancia entre P y R, punto de intersección entre la recta

$$y - Y = Y'\ (x - X)$$

y

$$y = a\,x + b$$

sea la misma que entre P y S, punto de intersección de la recta tangente a C en P con el eje x.

Es fácil ver que las coordenadas de R son

$$R\left(\frac{Y - Y'X - b}{a - Y'},\ \frac{a\,Y - a\,Y'X - b\,Y'}{a - Y'}\right)$$

y las de S son

$$S\left(X - \frac{Y}{Y'},\ 0\right)$$

De modo que

$$|\overline{PR}| = \sqrt{\left(\frac{Y - Y'X - b}{a - Y'} - X\right)^2 + \left(\frac{a\,Y - a\,Y'\,X - b\,Y'}{a - Y'} - Y\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{Y - a\,X - b}{a - Y'}\right)^2 + \left(\frac{Y - a\,X - b}{a - Y'}\right)^2 (Y')^2}$$

$$= \left|\frac{Y - a\,X - b}{a - Y'}\right| \sqrt{1 + (Y')^2}$$

y

$$|\overline{PS}| = \sqrt{\left(\frac{Y}{Y'}\right)^2 + Y^2} = \left|\frac{Y}{Y'}\right| \cdot \sqrt{1 + (Y')^2}$$

De modo que imponiendo la condición $|\overline{PR}| = |\overline{PS}|$ y tomando en cuenta que $1 + (Y')^2 \neq 0$, nos queda

$$\left|\frac{Y - a\,X - b}{a - Y'}\right| = \left|\frac{Y}{Y'}\right|$$

o

$$\frac{Y - a\,X - b}{a - Y'} = \pm\, \frac{Y}{Y'}$$

Observe que estamos suponiendo que $Y' \neq a, Y' \neq 0$, i.e. nuestras soluciones no pueden ser rectas paralelas a la recta dada $y = a\,x + b$ ni rectas paralelas al eje x. Geométricamente es evidente por qué se desechan estas soluciones.

Estudiemos entonces primeramente el caso

$$\frac{Y - a\,X - b}{a - Y'} = \frac{Y}{Y'}$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$Y' = \frac{a\,X}{2\,Y - a\,X - b}$$

que es una ecuación que se reduce a homogénea, haciendo la traslación del origen de coordenadas al punto $(-\frac{b}{a}, 0)$, i.e. introduciendo la nueva variable independiente t tal que $t = X + \frac{b}{b}$, y como $Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dt}$ nos queda la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\frac{dY}{dt} = \frac{a\,Y}{2\,Y - a\,t}$$

la cual es homogénea. Haciendo $Y = t\,U$, obtenemos $Y' = t\,U' + U$; sustituyendo nos queda

$$t\,U' + U = \frac{a\,U}{2U - a}$$

o

$$t\,U' = -\,2\,\frac{U^2 - a\,U}{2\,U - a}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{(2U - a)\,dU}{U^2 - a\,U} = -2 \int \frac{dt}{t} + C$$

de donde

$$ln\left|U^2 - a\,U\right| = -\,2\,ln\left|t\right| + C$$

Regresando a las variables X, Y

$$ln \left| Y^2 - a\,Y X + \frac{b}{a} \right| = C$$

de donde la familia de curvas con la propiedad requerida es

$$\boxed{Y^2 - a\,Y X - b\,Y = K}$$

Para visualizar este resultado concretemos la recta $y = a\,x + b$, haciendo $a = 1$, $b = 0$. Nos queda entonces que cualquier curva de la familia $Y^2 - X\,Y = K$ $(K > 0)$ es tal que el segmento de la tangente en cualquier punto comprendido entre el eje X y la recta $y = x$ se divide por el punto de contacto por dos partes iguales.

La familia $Y^2 - X\,Y = K$ es una familia de hipérbolas tales que, si giramos los ejes un ángulo de $\pi/8$, obtenemos la expresión canónica de ellas (en el sistema girado X', Y') como sigue (los calculos correspondientes se dejan de ejercicio al lector)

$$1.207\ Y'^2 - 0.207\ X'^2 = K$$

que son hipérbolas cuyos vértices están sobre el eje Y' y tienen por asíntotas la recta $y = x$ (que en el sistema X', Y' es la recta $Y' = 0.4142\ X'$) y el eje X (que es la recta $Y' = -0.4142\ X'$) tal como se muestra en la siguiente figura

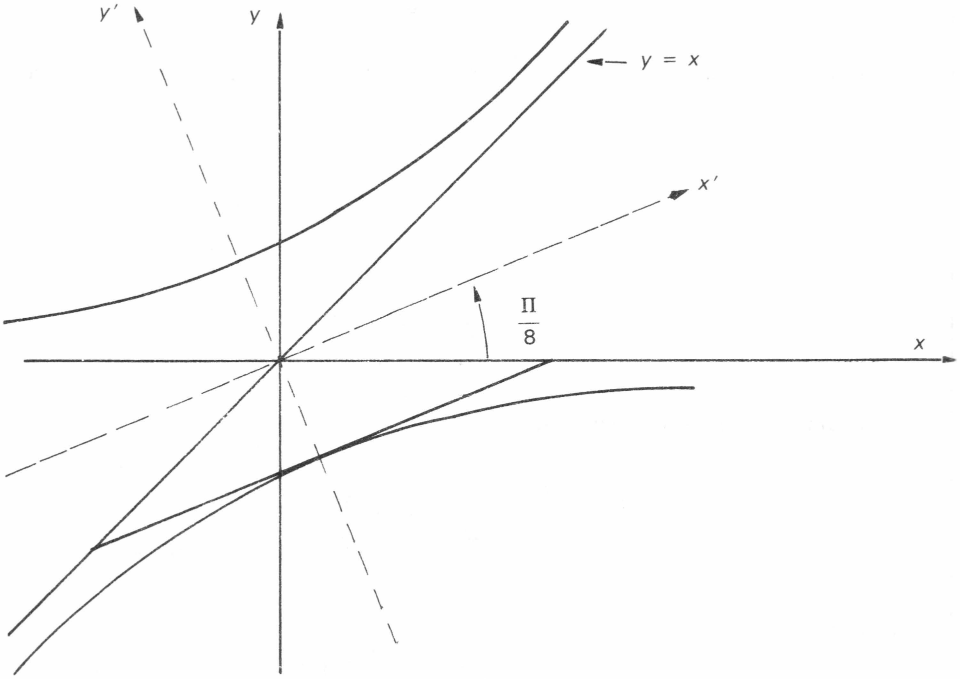


Figura 35. Solución del ejemplo DGC. A.

Consideremos ahora el caso

$$\frac{Y - a X - b}{a - Y'} = - \frac{Y}{Y'}$$

Podemos reescribir esta ecuación como

$$Y' = \frac{a Y}{a X + b}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dY}{Y} = \int \frac{a\, dX}{a X + b} + C$$

de donde

$$ln|Y| = ln|a X + b| + C$$

Llamando $K = e^C$ obtenemos

$$Y = K (a X + b)$$

Veamos el tipo de ''soluciones'' que hemos obtenido. Ésta es una familia de rectas que pasan por el punto $(- \frac{b}{a}, 0)$ y tienen pendiente Ka.

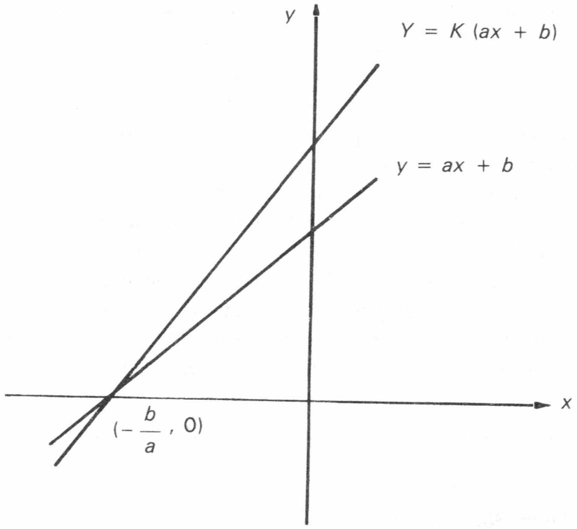


Figura 36

Es muy conveniente hacer algunas observaciones respecto a esta ''solución''.

Observemos que ciertamente la propiedad de la que habla el ejemplo (el segmento de la tangente en cualquier punto, comprendido entre el eje X y la recta $Y = a X + b$, se divide por el punto de contacto en dos partes iguales) no es satisfecha por esta familia de rectas $Y = K\,(a\,X + b)$.

En efecto, si $P\,(X, Y)$ es un punto cualquiera de $Y = K\,(a\,X + b)$, la tangente a esta recta por P es, como sabemos, ella misma. Además, esta recta corta a $Y = a\,X + b$ *justamente en el eje x,* de modo que "el segmento de la tangente a la curva comprendido entre el eje x y la recta $y = a\,x + b$"... ¡no existe! (se reduce al punto $(-\frac{b}{a}, 0)$), por lo que P no puede dividir en dos partes iguales este "segmento".

Sin embargo, nosotros hicimos una "traducción" de esta propiedad requerida por la curva C, atendiendo a la figura que se muestra al comienzo de la solución de este ejemplo, diciendo que, siendo R la intersección de la tangente a la curva C en cualquier punto P de la misma (punto de contacto) con la recta $y = a\,x + b$, y S la intersección de esta tangente con el eje x, debería entonces cumplirse que la *distancia entre P y R y la distancia entre P y S debería ser la misma,* lo cual escribimos como $|\overline{PR}| = |\overline{PS}|$.

Regresemos ahora a nuestra familia de rectas $Y = K\,(a\,X + b)$ que encontramos también como "solución" a nuestro ejemplo.

Tenemos que para una recta de esta familia los puntos R y S se encuentran *ambos* en el punto $(-\frac{b}{a}, 0)$, de modo que, siendo P cualquier punto de esta recta (que es su misma tangente en P), *sí se satisface que* $|\overline{PR}| = |\overline{PS}|$. ¿Qué es lo que pasa entonces?

La respuesta la encontramos si pensamos nuestro problema en términos de *distancia dirigida.* Veamos cómo ocurre esto. Cuando decimos que el punto P divide al segmento RS en dos partes iguales, lo cual vemos gráficamente como

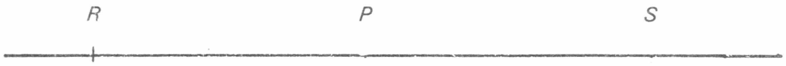


Figura 37. El punto P divide la mitad del segmento $\overline{RS}$.

lo podemos interpretar pensando en que la distancia del punto R al punto P debe ser la misma que la distancia del punto P al punto S.

Observe que cuando decimos "distancia del punto R al punto P", pensamos exactamente lo mismo que cuando decimos "distancia del punto P al punto R" lo cual no es más que una propiedad (¿defecto?) de la distancia euclidiana (en términos más generales acontece que la distancia euclidiana es un tipo especial de *métrica*, que sabemos es una función $d\colon \Re \times \Re \to \Re$, la cual posee, entre otras, la propiedad de simetría, i.e. $d(x, y) = d(y, x)$).

Sin embargo, esta manera de interpretar la división del segmento RS por P no es consistente, pues en ese caso tendríamos una situación como la siguiente

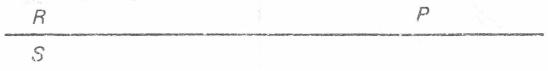


Figura 38. El punto P divide a la mitad al segmento $\overline{RS}$.

en la que "el punto P divide al segmento $\overline{RS}$ a la mitad", ya que la distancia del punto R al punto P es la misma que la distancia del punto P al punto S.

Este conflicto lo resolveremos si introducimos el concepto de *distancia dirigida* entre dos puntos, el cual no es más que la asignación de una "dirección de positividad" para la distancia de la siguiente manera

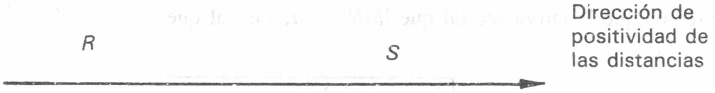


Figura 39. Distancia dirigida.

distancia (dirigida) de R a $S = |RS|$
distancia (dirigida) de S a $R = -|\overline{RS}|$

de modo que la manera correcta de interpretar que el punto P divide al segmento RS en dos partes iguales es pensando que la distancia (dirigida) de R a P es la misma que la distancia (dirigida) de P a S. Con este nuevo concepto de distancia, en el caso de que R y S estén en el mismo punto y P fuese cualquier otro punto, ya no se tendría por qué pensar que P divide a la mitad al ''segmento $\overline{RS}$'', pues en este caso las distancias (dirigidas) entre R y P y entre P y S no son iguales (tienen signos contrarios).

Regresando a nuestro ejemplo DGC. 4, el problema de haber obtenido una ''solución indeseable'' se debió a que para calcular la distancia entre dos puntos, digamos (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) usamos la fórmula para la distancia euclidiana

$$\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

la cual da siempre un *número positivo,* y es, por lo tanto, una distancia no dirigida.

En conclusión, a la familia de rectas $Y = K\,(a\,X + b)$ no la consideramos como solución de nuestro problema.

DGC. 5

¿Cuál es la curva que tiene la propiedad de que el segmento de la tangente en cualquier punto P de la misma, comprendido entre los ejes coordenados, es de longitud constante e igual a a?

Solución

Sea $P\,(X, Y)$ un punto cualquiera de la curva.

La ecuación de la recta tangente a la curva que pasa por P es

$$y - Y = Y'\,(x - X)$$

Las intersecciones de esta recta con los ejes coordenados son*

$$M\,(O,\ Y - X\,Y')$$

$$N(X - \frac{Y}{Y'},\ 0)$$

---

*Por las condiciones mismas del problema, cualquiera que sea el punto $P\,(X, Y)$, no podremos tener nunca $Y' = 0$.

Queremos que la curva sea tal que $|\overline{MN}| = a$, i.e. tal que

$$\sqrt{\left(X - \frac{Y}{Y'}\right)^2 + (Y - X\,Y')^2} = a$$

Después de hacer algunas simplificaciones algebraicas, esta última expresión nos queda como

$$((Y^2) + 1)\,(X\,Y' - Y)^2 = a^2\,(Y')^2$$

de donde se obtiene a su vez la expresión

$$Y = XY' - \frac{a\,Y'}{\sqrt{(Y')^2 + 1}}$$

que es una ecuación diferencial de Clairaut

$$Y = X\,Y' + f(Y')$$

Haciendo $Y' = V$ obtenemos

$$Y = XV - \frac{a\,V}{\sqrt{V^2 + 1}}$$

Derivando

$$Y' = XV' + V - \frac{a\sqrt{V^2 + 1} - a\,V \dfrac{V}{\sqrt{V^2 + 1}}}{(V^2 + 1)}\,V'$$

$$= V + \left(X - \frac{a}{(V^2 + 1)^{3/2}}\right) V'$$

de donde

$$V'\left(X - \frac{a}{(V^2 + a)^{3/2}}\right) = 0$$

Si $V' = 0 \Rightarrow V = m$ (constante) obtenemos la solución general de la ecuación

$$\boxed{Y = m\,X - \frac{a\,m}{\sqrt{m^2 + 1}}}$$

De la condición

$$X - \frac{a}{(V^2 + 1)^{3/2}} = 0$$

y de la condición

$$Y = X\,V + \frac{a\,V}{\sqrt{V^2 + 1}}$$

obtenemos, eliminando V, la solución singular

$$\boxed{X^{2/3} + Y^{2/3} = a^{2/3}}$$

que es la envolvente de la familia de rectas de la solución general.

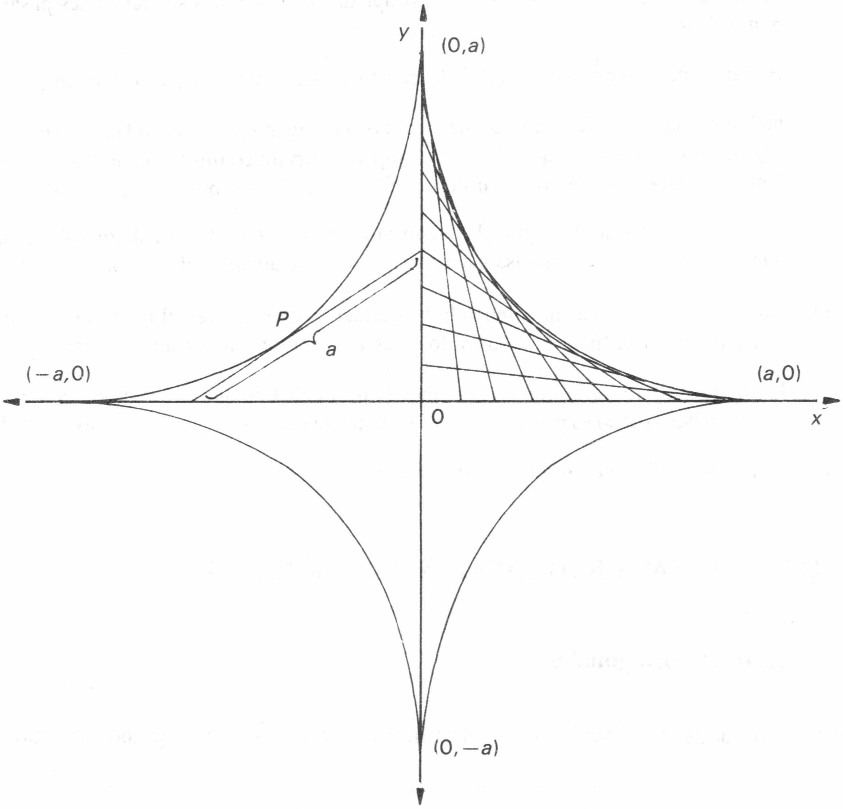


Figura 40. Solución del ejemplo DGC. 5.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 3. SECCIÓN 3)

1. Hallar las curvas con la propiedad de que la suma de las longitudes de su tangente y subtangente en cualquiera de sus puntos es igual al producto de coordenadas del punto en cuestión.
2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, \frac{1}{2})$, si para cualquier segmento $[1, x]$ se tiene que el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente es igual a la razón entre la abscisa x del punto extremo y su ordenada.
3. Hallar la ecuación de la curva que pasa por $(3,1)$, si la ordenada de la intersección de su tangente en ese punto con el eje y es igual a su subnormal.
4. Encontrar la curva que pasa por $(1,1)$ si el cuadrado de la longitud de la ordenada de la intersección de su tangente en ese punto con el eje y es igual al producto de las coordenadas del punto de contacto.
5. Demuestre que solamente las rectas $y = C_1 x$ y las hipérbolas $xy = C_2$ tienen la propiedad de que la longitud del radio polar de cualquiera de sus puntos es igual a la longitud de la tangente trazada en tal punto.
6. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si el punto medio del segmento de su normal desde un punto cualquiera de la curva hasta el eje de abscisas está situado en la parábola $y^2 = \frac{1}{2}x$.
7. Encontrar la familia de curvas con la propiedad de que todas sus tangentes pasan por un punto dado.
8. Hallar la curva con la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto dado.
9. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si para cualquier segmento $[a, x]$ se tiene que el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente de esta curva es igual al cubo de la ordenada del punto extremo del arco.
10. Hallar la curva que pasa por $(1,1)$ con la propiedad de que su subnormal en cualquier punto es a la suma de la abscisa y la ordenada como la ordenada de este punto es a la abscisa.
11. Hallar todas las curvas que tienen la propiedad de que el área del triángulo originado por una tangente a la línea buscada y los ejes de coordenadas es una constante.
12. Encontrar la familia de curvas que tiene la propiedad de que la longitud del arco medida desde un punto dado es proporcional a la pendiente de la tangente al punto extremo del arco.
13. Hallar la familia de curvas con curvatura constante.

4. TRAYECTORIAS ORTOGONALES E ISOGONALES

4.1 Trayectorias ortogonales

Supongamos dada una familia monoparamétrica de curvas en el plano del tipo

$$f(x, y, c) = 0$$

con f diferenciable. Estaremos interesados en construir otra familia de curvas en el plano (también monoparamétrica) que tenga la propiedad de que cada una de las curvas de esta familia corte a las curvas de la familia dada *ortogonalmente.* Llamaremos entonces a las curvas de esta nueva familia las *trayectorias ortogonales* de la familia inicial.

Veamos un ejemplo muy simple. Consideremos la familia de rectas $y = x + C$ que son rectas de pendiente 1 y ordenada al origen C (C es el parámetro). ¿Cuáles serían las trayectorias ortogonales de esta familia? No es difícil descubrir, con razonamientos geométricos, que la familia de rectas $y = -x + C'$ es precisamente la de las trayectorias ortogonales de $y = x + C$. En efecto, cada recta de la primera familia tiene pendiente 1 y cada recta de la segunda familia tiene pendiente -1, de modo que en cualquier punto en el que estas rectas se encuentren se tendrá que sus pendientes son recíprocas y de signos contrarios (condición de perpendicularidad).

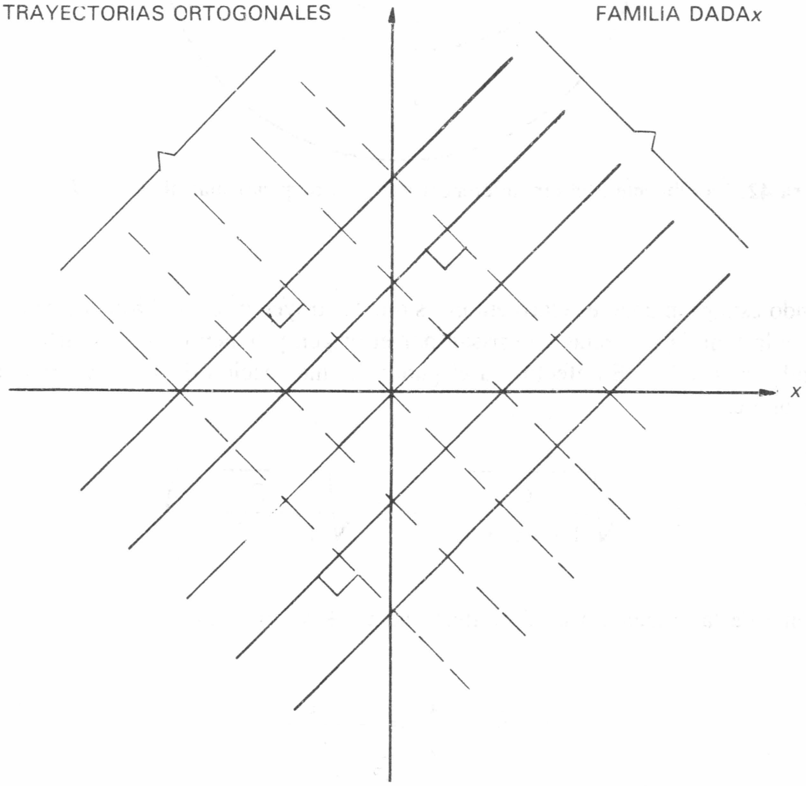


Figura 41. Trayectorias ortogonales de la familia $y = x + c$.

Otro ejemplo menos trivial pero igual de simple es el siguiente. Consideremos la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = C$ ($C \geq 0$), que son circunferencias con centro en el origen y radio C. Una propiedad geométrica por todos conocida de una circunferencia es que la tangente en un punto P de ella es ortogonal al segmento que une el centro de la circunferencia con P.

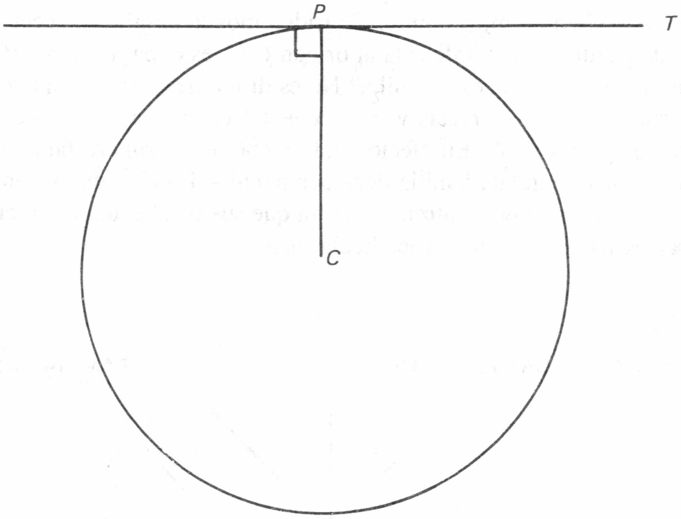


Figura 42. La tangente a la circunferencia por P es perpendicular al radio CP.

Usando esta propiedad es claro entonces que las trayectorias ortogonales de la familia dada es la familia de rectas que pasan por el origen y tienen pendiente arbitraria, i. e. la familia $y = C' x$. En efecto, en el punto de intersección de $x^2 + y^2 = C$ con $y = C' x$, que es

$$\left(\pm \sqrt{\frac{C}{1 + (C')^2}}, \pm C' \sqrt{\frac{C}{1 + (C')^2}} \right)$$

la pendiente de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = C$ es

$$y' = - \frac{x}{y} = - \frac{1}{C'}$$

y la pendiente de $y = C' x$ es C', de modo que se cumple la condición de perpendicularidad

$$\left(- \frac{1}{C'} \right) (C') = - 1$$

Geométricamente esto se ve como

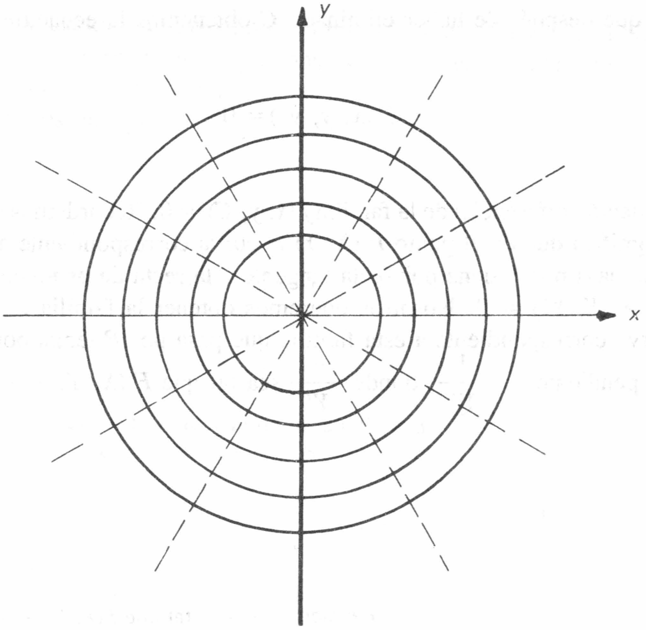


Figura 43. Trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c$.

Analicemos ahora el caso general.

Tenemos pues la familia monoparamétrica dada por

$$f(x, y, C) = 0$$

y queremos obtener la familia de sus trayectorias ortogonales.

Derivando $f(x, y, C) = 0$ con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, C) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, C)\, y' = 0$$

de donde

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, C)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, C)}$$

Como sabemos, la ecuación diferencial de la familia $f(x, y, C) = 0$ la obtenemos eliminando C del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y, C) = 0 \\ y' = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, C)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, C)} \end{array}\right.$$

Supongamos que después de haber eliminado C obtenemos la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = 0$$

que será la ecuación diferencial de la familia $f(x, y, C) = 0$. Recordemos que geométricamente esto significa que en el punto $P(X, Y)$ la curva correspondiente a la familia $f(x, y, C) = 0$ que pasa por P tiene por recta tangente a la recta de pendiente Y', donde Y' es tal que $F(X, Y, Y') = 0$. Nosotros queremos obtener la familia $g(x, y, C') = 0$, tal que la curva correspondiente a esta familia que pasa por P tenga por recta tangente a la recta de pendiente $-\dfrac{1}{Y'}$, donde $\dfrac{-1}{Y'}$ sea tal que $F(X, Y, -\dfrac{1}{Y'}) = 0$.

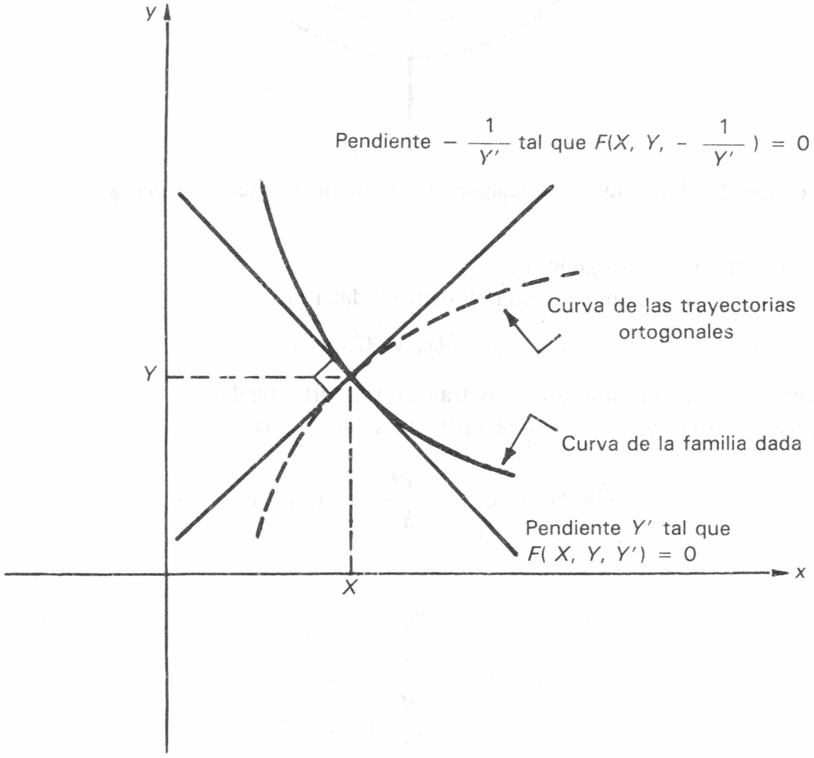

y
Pendiente $-\frac{1}{Y'}$ tal que $F(X, Y, -\frac{1}{Y'}) = 0$
Curva de las trayectorias ortogonales
Y
Curva de la familia dada
Pendiente Y' tal que $F(X, Y, Y') = 0$
X
x

Figura 44. Interpretación geométrica de 2 curvas que se cortan ortogonalmente.

Por lo tanto, la ecuación diferencial de la familia de las trayectorias ortogonales de $f(x, y, C) = 0$ será

$$F\left(x, y - \frac{1}{y'}\right) = 0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO
BIBLIOTECA

Resolviendo esta ecuación diferencial obtendremos la familia buscada (ahora resulta claro el por qué la familia de trayectorias ortogonales de una familia monoparamétrica es también una familia monoparamétrica).

Veamos algunos ejemplos.

T. O. 1

Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $y^3 = C x^2$.

Solución

Obtengamos la ecuación diferencial de la familia dada.

Derivando $y^3 = C x^2$ respecto de x obtenemos

$$3 y^2 y' = 2 C x$$

Como $C = \dfrac{y^3}{x^2}$ obtenemos

$$3 y^2 y' = 2 \frac{y^3}{x^2} x$$

de donde la ecuación diferencial de esta familia es

$$y' = \frac{2}{3} \frac{y}{x}$$

Entonces, la ecuación diferencial de la familia de las trayectorias ortogonales es

$$- \frac{1}{y'} = \frac{2}{3} \frac{y}{x}$$

Separando variables e integrando

$$\int 2 y \, dy = - \int 3 x \, dx + C$$

$$\boxed{2 y^2 + 3 x^2 = C'}$$

que es la familia de trayectorias ortogonales de $y^3 = C x^2$.

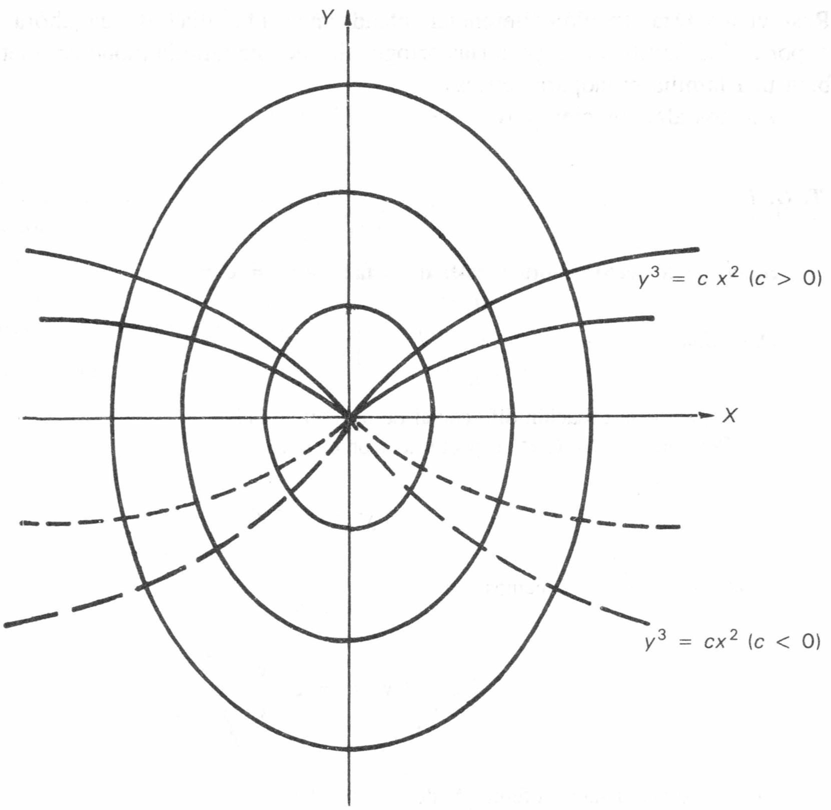


Figura 45. Solución del ejemplo T.O. 1.

T. O. 2

Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de círculos de un mismo radio cuyos centros se encuentran en una recta dada.

Solución

Sea $y = a\,x + b$ a la recta dada.

Sean (x_0, y_0) los centros de los círculos. Entonces debe de cumplirse que $y_o = a\,x_o + b$.

La familia de la que trata el ejemplo es entonces

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

donde r es dado (constante).

Tomemos a x_o como el parámetro. Entonces la ecuación de esta familia se escribe así

$$(x - x_o)^2 + (y - a\,x_o - b)^2 = r^2$$

Derivando respecto de x

$$2\,(x - x_o) + 2\,(y - a\,x_o - b)\,y' = 0$$

o

$$y' = -\frac{x - x_o}{y - a\,x_o - b}$$

Para obtener la ecuación diferencial de la familia tenemos que eliminar x_o (el parámetro) del sistema

$$\begin{cases} (x - x_o)^2 + (y - a\,x_o - \mathrm{b})^2 = r^2 \\ y' = -\dfrac{x - x_o}{y - a\,x_o - b} \end{cases}$$

Podemos proceder como sigue.

Despejando x_o de la segunda ecuación obtenemos

$$x_o = \frac{x + y\,y' - b\,y'}{a\,y' + 1}$$

Sustituyendo en la primera ecuación nos queda

$$\left(x - \frac{x + y\,y' - b\,y'}{a\,y' + 1}\right)^2 + \left(y - a\,\frac{x + y\,y' - b\,y'}{a\,y' + 1} - b\right)^2 = r^2$$

de donde se obtiene que

$$(y - a\,x - b)^2\,(1 + (y')^2) = r^2\,(a\,y' + 1)^2$$

que es la ecuación diferencial en la familia dada.

Entonces la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$(y - a\,x - b)^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{y'}\right)^2\right) = r^2 \left(-\frac{a}{y'} + 1\right)^2$$

o

$$[(y - a\,x - b)^2 - r^2](y')^2 + 2\,a\,r^2\,y' + (y - a\,x - b)^2 - r^2\,a^2 = 0$$

Tenemos pues que resolviendo esta ecuación obtendremos la familia de las trayectorias ortogonales que estamos buscando. Es evidente que para hacer esto tendremos que recurrir a algún artificio que nos permita colocar esta ecuación dentro del esquema de alguno de los tipos de ecuaciones que hemos ya explicado y de los cuales hemos visto estrategias para resolver, pues, así como está expresada la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales, resultan ''inservibles'' los métodos de integración de ecuaciones que hasta este momento hemos estudiado.

Ubiquémonos en el contexto geométrico de nuestro ejemplo. Tratamos de encontrar la familia de curvas que sean las trayectorias ortogonales de la familia de círculos de radio r y centro sobre la recta dada $y = a x + b$.

Con un poco de intuición geométrica podremos pensar que una transformación de coordenadas consistente en:

i) una traslación del origen de coordenadas al punto $(0, b)$

ii) una rotación del sistema coordenado xy, por un ángulo $\alpha = \arctan a$.

Nos permitiría obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas que son ortogonales a los círculos dados, viendo ahora el problema en el nuevo sistema transformado $X\ Y$. Independientemente de qué curvas sean la solución de nuestro ejemplo, éstas podrían tener una expresión más simple (desde el punto de vista algebraico) si las vemos en este nuevo sistema que si las vemos en el antiguo sistema $x\ y$.

Veamos que, efectivamente, esta idea funciona (ver la gráfica de la página siguiente). Entonces las coordenadas del sistema antiguo $x\ y$ y las coordenadas del nuevo sistema $X\ Y$ están relacionadas por

$$x = X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha$$

$$y = X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha + b$$

¿Cómo se relaciona la pendiente de una recta l y en el sistema $x\ y$ $(m_{l_{xy}})$ con la pendiente de esa misma recta en el sistema $X\ Y$ $(m_{l_{XY}})$?

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos de l en el sistema antiguo, y (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) esos mismos dos puntos en el nuevo sistema. Tenemos que

$$m_{l_{xy}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m_{l_{XY}} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

donde

$$x_1 = X_1 \cos \alpha - Y_1 \operatorname{sen} \alpha$$

$$y_1 = X_1 \operatorname{sen} \alpha + Y_1 \cos \alpha + b$$

$$x_2 = X_2 \cos \alpha - Y_2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$y_2 = X_2 \operatorname{sen} \alpha + Y_2 \cos \alpha + b$$

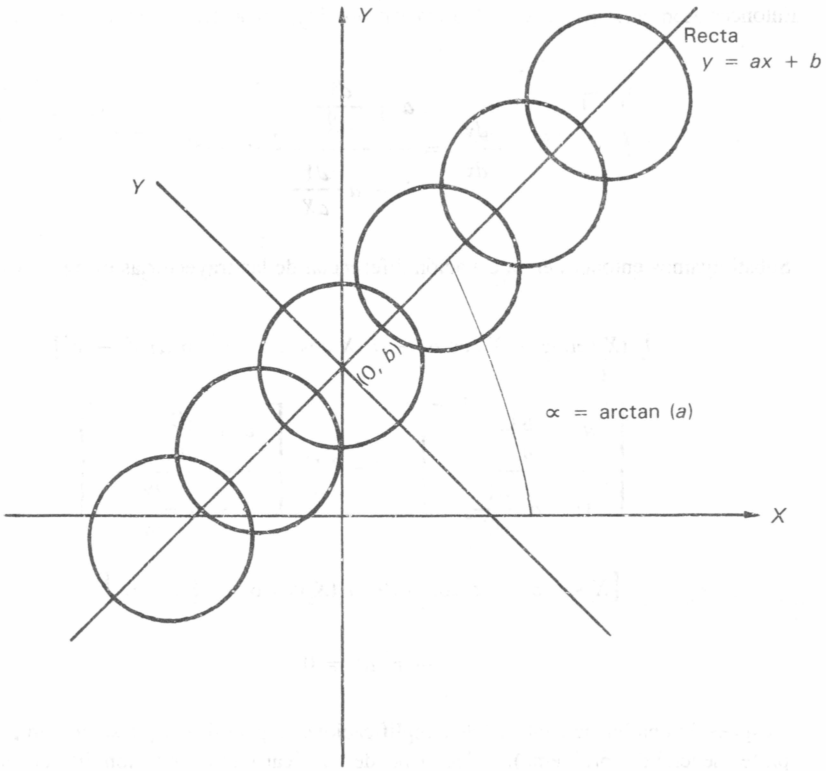


Figura 46. Ejemplo T.O. 2.

Entonces

$$m_{l_{xy}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{X_2 \operatorname{sen} \alpha + Y_2 \cos \alpha + b - X_1 \operatorname{sen} \alpha - Y_1 \cos \alpha - b}{X_2 \cos \alpha - Y_2 \operatorname{sen} \alpha - X_1 \cos \alpha + Y_1 \operatorname{sen} \alpha}$$

$$= \frac{(X_2 - X_1) \operatorname{sen} \alpha + (Y_2 - Y_1) \cos \alpha}{(X_2 - X_1) \cos \alpha - (Y_2 - Y_1) \operatorname{sen} \alpha} =$$

$$= \frac{\tan \alpha + \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}}{1 - \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \tan \alpha} = \frac{a + m_{l_{XY}}}{1 - a\, m_{l_{XY}}}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a + \dfrac{dY}{dX}}{1 - a\dfrac{dY}{dX}} \quad \text{-·- -} \; (*)$$

Substituyamos entonces en la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales. Nos queda

$$\left[\, (X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha - a\,(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha)\,)^2 - r^2 \right] \cdot$$

$$\left[\frac{a + \dfrac{dY}{dX}}{1 - a\dfrac{dY}{dX}} \right]^2 + 2\,a\,r^2 \left[\frac{a + \dfrac{dY}{dX}}{1 - a\dfrac{dY}{dX}} \right] +$$

$$+ \quad + \left[X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha - a\,(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha) \right]^2$$

$$- r^2 a^2 = 0$$

Después de una buena cantidad de simplificaciones algebraicas (que se omiten por no formar parte esencial del problema), el lector puede verificar que la ecuación diferencial anterior se convierte en la simplísima ecuación de variables separables

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{\pm \sqrt{r^2 - Y^2}}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{\pm \sqrt{r^2 - Y^2}}{Y}\, dY = \int dX + C$$

(*) Hubiéramos podido proceder formalmente como sigue:
Diferenciando $x = X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha$ obtenemos $dx = dX \cos \alpha - dY \operatorname{sen} \alpha$. Diferenciando $y = X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha + b$ obtenemos $dy = dX \operatorname{sen} \alpha + dY \cos \alpha$.

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dX \operatorname{sen} \alpha + dY \cos \alpha}{dX \cos \alpha - dY \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\tan \alpha + \dfrac{dY}{dX}}{1 - \dfrac{dY}{dX} \tan \alpha} =$$

$$= \frac{a + \dfrac{dY}{dX}}{1 - a\dfrac{dY}{dX}}$$

Resolvamos la integral del lado izquierdo haciendo $Y = r$ sen ϕ. Entonces

$$\int \frac{\pm\sqrt{r^2 - Y^2}}{Y}\, dY = \pm\, r \int \frac{\cos^2 \phi}{\operatorname{sen} \phi}\, d\,\phi = \pm r \left[\int \csc \phi \; d\,\phi - \int \operatorname{sen} \phi \; d\,\phi \right] = \pm r\, [ln\, (\csc \phi - \cot \phi) + \cos \phi]$$

$$= \pm r \left[ln \left[\frac{r}{Y} - \frac{\sqrt{r^2 - Y^2}}{Y} \right] + \frac{\sqrt{r^2 - Y^2}}{r} \right]$$

$$= \pm\; r\; ln \frac{r - \sqrt{r^2 - Y^2}}{Y} \pm \sqrt{r^2 - Y^2}$$

de modo que la familia de curvas, que son las trayectorias ortogonales buscadas, es (en el sistema transformado *XY*)

$$\boxed{\pm r\; ln \frac{r - \sqrt{r^2 - Y^2}}{Y} \pm \sqrt{r^2 - Y^2} = X + C}$$

que es una familia de *tractrices* (ver el ejemplo 2 de la sección 6 de este capítulo).

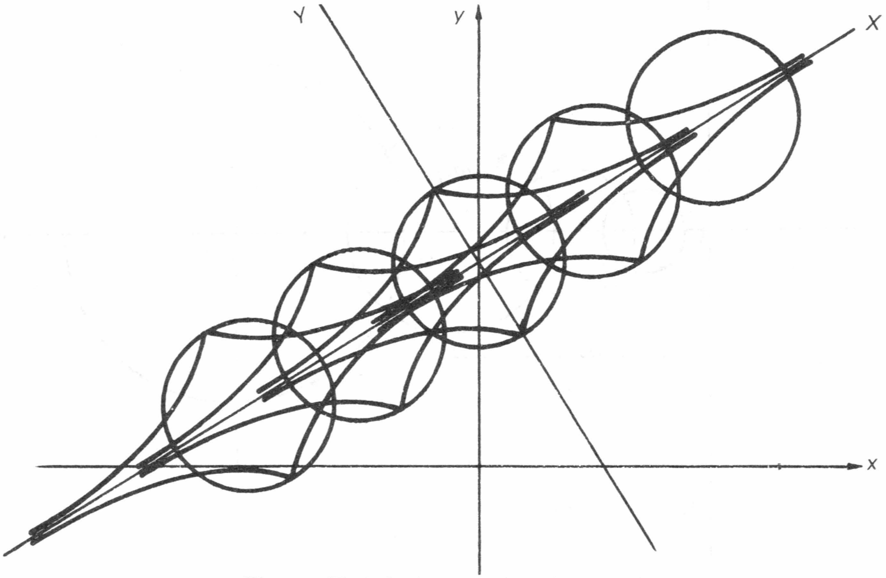


Figura 47. Solución del ejemplo T.O. 2.

T.O. 3

Suponga que en el origen de coordenadas se encuentra una fuente sonora. En la dirección positiva del eje x sopla viento a una velocidad constante a m/seg. Se trata de ver cuáles serán las líneas de propagación del sonido por el plano.

Solución

Vamos a recordar algunos conceptos de la física de las ondas que usaremos en la solución de este ejemplo.

Tenemos entonces en 0 (el origen de coordenadas) una fuente de impulsos sonoros. Si trazamos una curva en el plano que pase por todos los puntos que en un instante dado experimentan una perturbación similar, tendremos entonces un *frente de onda.* Al transcurrir el tiempo éste se mueve mostrando cómo se propaga en el medio un impulso emitido por la fuente. Si la fuente es tal que emite continuamente impulsos (como ocurre en nuestro ejemplo), tendremos entonces una familia de frentes de onda que nos indica la manera de propagación de la emisión (continua) de impulsos en el medio. En un medio homogéneo e isótropo (como es nuestro caso) la *dirección de propagación es siempre perpendicular al frente de onda.* Una línea normal a los frentes de onda que indique la dirección y sentido del movimiento de las ondas se llama *rayo*.

En este ejemplo se trata de ver las líneas de propagación, o rayos, de las ondas sonoras emitidas desde el origen de coordenadas, si por el eje x sopla viento a la velocidad a.

Si tuviéramos un medio en el que no soplase viento en ninguna dirección, los frentes de onda serían circunferencias concéntricas de radio arbitrario y centro en el origen (en donde

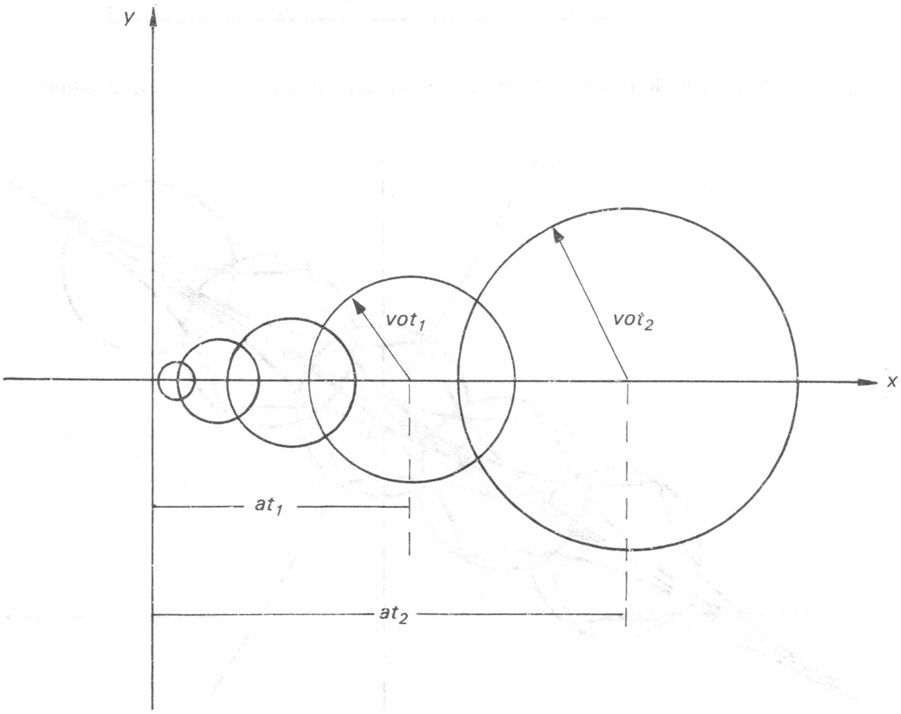


Figura 48. Ejemplo T.O. 3.

se encuentra la fuente); de modo que los rayos o líneas de propagación del sonido serían las trayectorias ortogonales de esta familia de circunferencias (rectas radiales).

En general podemos decir que dada la familia de frentes de onda, las líneas de propagación del sonido serán las trayectorias ortogonales de esta familia dada.
Veamos entonces cuál es la familia de frentes de onda en nuestro ejemplo.

Sea v_o la velocidad del sonido en el aire (331 m/seg). A $t = 0$ comienzan a emitirse impulsos sonoros del origen. A los t (seg) el impulso emitido por la fuente ha sido ''arrastrado'' (at), metros por efecto de la velocidad del viento. En este instante el frente de onda es una circunferencia con centro en la fuente (que ya no está en el origen) y radio ($v_o\, t$) metros que es la distancia que ha viajado la perturbación provocada por el impulso emitido.

De modo que la familia de frentes de onda en nuestro ejemplo serán circunferencias con centro en el punto (at, 0) y radio $v_o t$ ($t > 0$ es el parámetro), es decir la familia

$$(x - at)^2 + y^2 = (v_o\, t)^2$$

Buscamos entonces las trayectorias ortogonales a esta familia. Derivando respecto de x obtenemos

$$x - a\, t + y\, y' = 0$$

Despejando t

$$t = \frac{x + y\, y'}{a}$$

Sustituyendo en la ecuación de la familia de frentes de onda

$$(y\, y')^2 + y^2 = \left[v_o \frac{x + y\, y'}{a} \right]^2$$

de donde

$$y = \frac{x}{b\sqrt{1 + (y')^2} - y'} \qquad b = \pm \frac{a}{v_o}$$

que es la ecuación diferencial de la familia de frentes de onda. Entonces la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales es

$$y = \frac{x\, y'}{b\sqrt{1 + (y')^2} + 1}$$

Se trata de una ecuación de Lagrange, la cual resolveremos haciendo

$$y' = \tan \alpha$$

(esta sustitución fue sugerida por el radical que aparece en la ecuación diferencial); nos queda entonces que

$$y = \frac{x \tan \alpha}{b \sec \alpha + 1} = \frac{x \operatorname{sen} \alpha}{b + \cos \alpha}$$

de donde

$$x = \frac{b + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} y$$

Sea

$$\xi(a, y) = \frac{b + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} y$$

Consideremos a α como función de y. Tenemos que, derivando la expresión $x = \xi(\alpha, y)$ respecto de y, nos queda

$$\frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \alpha) - (b + \cos \alpha) \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$y \frac{d\alpha}{dy} + \frac{b + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

de donde

$$\frac{1 + b \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} y \frac{d\alpha}{dy} = b$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{1 + b \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} d\alpha = b \int \frac{dy}{y} + C$$

$$ln (\tan \frac{\alpha}{2}) + b\, ln (\operatorname{sen} \alpha) = b\, ln\, y + C$$

de donde obtenemos que

$$y = C' \operatorname{sen} \alpha (\tan \frac{\alpha}{2})^{1/b}$$

De la expresión $x = \xi\ (\alpha, y)$ tenemos

$$x = C'\ (b + \cos\alpha)\ (\tan \frac{\alpha}{2})^{1/b}$$

Entonces las líneas de propagación del sonido están dadas por las ecuaciones paramétricas (α es el parámetro)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= C'\ (b + \cos\alpha)\ (\tan \frac{\alpha}{2})^{1/b} \\ y &= C'\ \operatorname{sen}\alpha\ (\tan \frac{\alpha}{2})^{1/b} \end{aligned}}$$

donde $b = \pm \frac{a}{v_o}$ y C' es una constante arbitraria.

Como era de esperarse, cuando $a \to 0$, tenemos que

$$\frac{y}{x} \to \tan\alpha$$

que son rectas que pasan por el origen.

T.O. 4

Sea F: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa de la variable compleja $Z = x + i\,y$, tal que $F\ (Z) = u\ (x, y) + i\,v\ (x, y)$, donde u y v son funciones reales (que por ser F holomorfa, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$). Demuestre que la familia de curvas en el plano, dada por $v\ (x, y) = C'$, es la familia de trayectorias ortogonales de la familia $u\ (x, y) = C$.

Solución

Consideremos entonces la familia $u\ (x, y) = C$, y obtengamos la ecuación diferencial que tiene por solución esta familia. Derivando respecto de x nos queda

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,y' = 0$$

de modo que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,(-\frac{1}{y'}) = 0$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial x} y' - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Como $F = u + i v$ es holomorfa, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Entonces la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales se puede escribir como

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y' = 0$$

que sabemos es la ecuación diferencial de la familia $v (x, y) = C'$. Esto era lo que queríamos probar.

Este importante resultado nos permite obtener una gran cantidad de ejemplos de trayectorias ortogonales. A modo de ejemplo consideremos la función holomorfa $F (Z) = Z^2$.
Entonces

$$F (Z) = (x + i y)^2 = x^2 - y^2 + i 2 x y$$

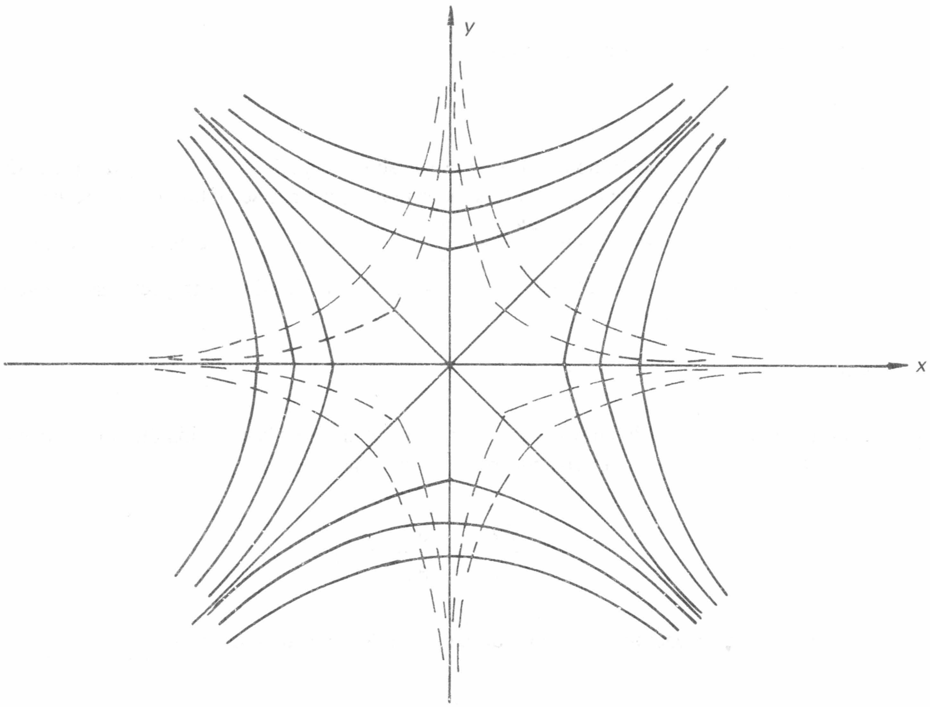


Figura 49. Solución del ejemplo T.O. 4.

de donde

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 2xy$$

Entonces, según el resultado anterior, las hipérbolas

$$xy = C'$$

son las trayectorias ortogonales de las hipérbolas

$$x^2 - y^2 = C$$

4.2 Trayectorias isogonales

Hemos estudiado el problema de construir una familia de curvas que tenga la propiedad de cortar ortogonalmente a cada miembro de otra familia dada.

Consideraremos aquí una situación más general.

Nuestro problema será ahora el siguiente: dada una familia de curvas en el plano, construir otra que tenga la propiedad de que corte a cada miembro de la familia dada con un ángulo prefijado α. En particular, si $\alpha = \pi/2$, caemos en la situación de la construcción de trayectorias ortogonales.

Sea $F(x, y, y') = 0$ la ecuación diferencial de la familia dada. Entonces, en el punto (X, Y) de intersección de un miembro de esta familia con uno de la familia por construir, tenemos que las rectas tangentes deben cortarse formando un ángulo α. Si Y' (tal que $F(X, Y, Y') = 0$) es la pendiente de la recta tangente a la curva de la familia dada en (X, Y) y llamamos G' a la pendiente de la recta tangente a la curva de la familia por construir en (X, Y) sabemos que debe de cumplirse que

$$\tan\alpha = \frac{Y' - G'}{1 + Y'G'}$$

de donde

$$Y' = \frac{G' + \tan\alpha}{1 - G'\tan\alpha}$$

Entonces la curva de la familia por construir en (X, Y) debe tener una tangente de pendiente G', donde G' es tal que

$$F\left(X, Y, \frac{G' + \tan\alpha}{1 - G'\tan\alpha}\right) = 0$$

Resumiendo, si $F(x, y, y') = 0$ es la ecuación diferencial de la familia dada $f(x, y, c) = 0$, entonces

$$F\left(x, y, \frac{y' + \tan\alpha}{1 - y' \tan\alpha}\right) = 0$$

será la ecuación diferencial de la familia $g(x, y, c') = 0$ de las *trayectorias isogonales* con un ángulo α de la familia inicial.

Veamos un ejemplo

T.I. 1

Hallar la familia de curvas que corten a cada circunferencia de la familia $x^2 + y^2 = C$ en un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.

Solución

La ecuación diferencial de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = C$ es

$$y' = -\frac{x}{y}$$

de modo que la ecuación de la familia que buscamos es

$$\frac{y' + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - y' \tan\frac{\pi}{4}} = -\frac{x}{y}$$

o

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

que es una ecuación homogénea. Haciendo $y = x\,u$ tenemos

$$x\,u' + u = \frac{1 + u}{1 - u}$$

de donde

$$x\,u' = \frac{u^2 + 1}{1 - u}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{(1 - u)\,du}{u^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} + C$$

de donde se obtienen

$$\arctan u - \frac{1}{2}\, ln\,(u^2 + 1) = ln\ x + C$$

Regresando a la variable y nos queda

$$\arctan \frac{y}{x} = ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$$

o

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C'\ e^{\arctan \frac{y}{x}}$$

que en coordenadas polares se ve como

$$\boxed{r = C'\ e^{\theta}} \qquad C' = e^{-C} > 0$$

(familia de espirales logarítmicas).

EJERCICIOS (CAPÍTULO 3. SECCIÓN 4)

Hallar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas (1 − 10)

1. $y = cx^2$.
2. $y^2 + x^2 = cx$.
3. $y^2 + x^2 = cy$.
4. $(2c - x)y^2 = x^3$ (cisoides).
5. $y^2 = 4(x - c)$.
6. $y = ce^x$.
7. $y = e^{cx}$.
8. ▲ $y = x + ce^{-x}$.
9. $x^k + y^k = c^k$ (k es un entero).
10. $\cos y = ce^{-x}$.
11. Demostrar que la familia de parábolas $y^2 = 4c(x + c)$ es una familia autoortogonal (i.e. los elementos de esta familia son las trayectorias ortogonales de ellos mismos). Trace algunos elementos de la familia.
12. Demuestre que la familia de cónicas cofocales

$$\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c} = 1$$

(a y b son parámetros fijos) es una familia autoortogonal.

13. Demuestre que si las familias $u(x, y) = c$ y $v(x, y) = c$ son ortogonales, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

14. En el texto se demostró: "Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es una función holomorfa de la variable compleja $z = x + i\,y$, entonces las familias $u(x,y) = c$ y $v(x,y) = c$ son ortogonales". ¿Vale la afirmación recíproca? (Sugerencia: considere la función $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy\,i$).
15. Demuestre que las familias $e^x \cos y = c$ y e^x sen $y = c$ con ortogonales (sugerencia: considere la función de variable compleja $f(z) = e^z$).
16. Use dos argumentos distintos para demostrar que la familia $x^3 - 3xy^2 = c$ y $3x^2y - y^3 = c$ son ortogonales (sugerencia: para el segundo argumento considere la función de variable compleja $f(z) = z^3$).
▲ 17. Demuestre que si $\dfrac{dr}{d\phi} = F(r, \phi)$ es la ecuación diferencial de una familia de curvas en coordenadas polares, entonces la familia de las trayectorias ortogonales satisface la ecuación diferencial $\dfrac{dr}{d\phi} = -\,r^2\,/F(r, \phi)$.
18. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de cardioides $r = c(1 - \cos \phi)$.
19. Halle las trayectorias ortogonales de la familia de espirales logarítmicas $r = e^{c\varphi}$.
20. Hallar la familia de trayectorias que cortan a cada elemento de la familia $y = 3x + c$ un ángulo constante igual a 20°.
21. Hallar la familia de trayectorias que cortan a cada elemento de la familia $x^2 = 2c(y - x\sqrt{3})$ formando un ángulo constante igual a 60°.
22. Hallar la familia de trayectorias isogonales a la familia de parábolas $y^2 = 4cx$ con un ángulo de 45°.

5. APLICACIONES A PROBLEMAS RELACIONADOS CON CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Existen muchos fenómenos en los cuales acontece que, llamando x a la variable que medimos con respecto al tiempo, la velocidad (instantánea) de variación de x es proporcional a x misma. Esta situación la modelamos matemáticamente como

$$\frac{dx}{dt} = k\,x$$

que es una simple ecuación de variables separables que tiene por solución $x = x_o\, e^{kt}$ donde $x_o = x\,(0)$.

En matemáticas decimos que un fenómeno de esta naturaleza es un fenómeno de crecimiento (si $k > 0$) o de decrecimiento (si $k < 0$).

Veremos aquí algunas situaciones particulares que ocurren en la física y en la biología, en donde acontecen fenómenos de crecimiento y/o de decrecimiento, o bien, algunas variantes de éstos.

Dividiremos esta sección en tres partes:

a) Desintegración radiactiva.
b) Ley de enfriamiento de Newton.
c) Modelos de población.

5.1 Desintegración radiactiva

El llamado fenómeno de radiactividad, estudiado a comienzos del siglo por Rutherford (entre otros), se debe al hecho de que existen ciertos elementos, llamados ''elementos radiactivos'' (como el uranio), los cuales tienen su núcleo demasiado ''cargado'' de partículas (protones y neutrones), que hacen que estos elementos sean *inestables* desde el punto de vista de la cantidad de partículas subatómicas que posee. Así, por ejemplo, el plomo - 206 (lo cual significa que este elemento tiene 206 partículas en su núcleo) es un elemento muy estable desde el punto de vista radiactivo, mientras que el uranio - 238 es un elemento muy inestable por tener demasiadas partículas en su núcleo. Se dice entonces que el plomo - 206 es un elemento ''no radiactivo'' y el uranio - 238 es un elemento ''radiactivo''. Entre el uranio - 238 y el plomo - 206 existe una serie de elementos (la llamada ''serie del uranio''), los cuales son también radiactivos. En orden decreciente de radiactividad, esta serie del uranio es: Uranio - 238, Torio - 234, Paladio - 234, Uranio - 234, Torio - 230, Radio - 226, Radón - 222, Polonio - 218, Plomo - 214, Bismuto - 214, Polonio - 214, Plomo - 210, Bismuto - 210, Polonio - 210, Plomo - 206.

Debido a la inestabilidad existente en el núcleo de los elementos radiactivos, éstos tienden a estabilizarse emitiendo partículas subatómicas (rayos α, β y γ), lo cual hace que estos elementos vayan desintegrándose (fenómeno de desintegración radiactiva). Experimentalmente se ha llegado a la siguiente *ley de desintegración radiactiva:*

> ''La velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva en un instante dado es proporcional a la cantidad de sustancia presente en ese instante''.

Llamemos x a la cantidad de cierta sustancia radiactiva U presente al tiempo t. Entonces la ley de desintegración radiactiva establece que

$$\frac{dx}{dt} = -k\,x$$

donde k es la constante de proporcionalidad, que es característica para cada sustancia radiactiva.

Esta constante es positiva, pues el hecho de que se trata de un fenómeno de decrecimiento lo hemos explicitado con el signo menos colocado en el lado derecho de esta ecuación.

Si x_o es la cantidad de U que se tenía inicialmente ($a\ t = 0$), tenemos que

$$x = x_o e^{-k\,t}$$

En realidad esta última expresión de la *versión continua* del fenómeno de desintegración radiactiva, que obviamente se realiza de manera *discreta.*

Quiero decir con esto que la cantidad de sustancia radiactiva no disminuye continuamente con el tiempo, pues es claro que, viendo de cerca el fenómeno, tendríamos una situación como la siguiente

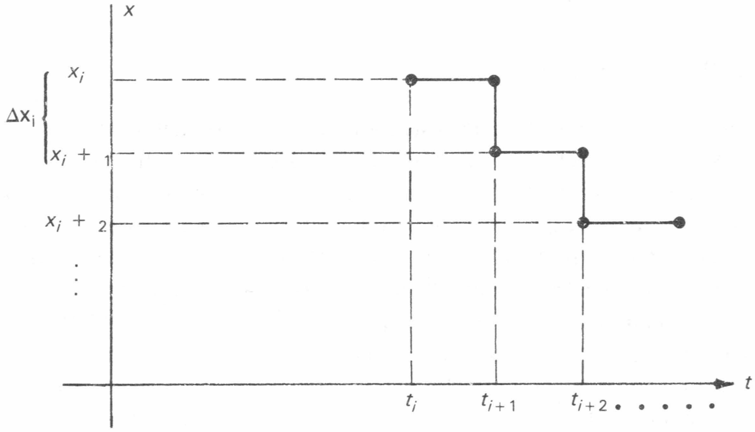


Figura 50. Fenómeno de desintegración radiactiva.

En el intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1})$ la sustancia U no emitió partícula subatómica alguna, por lo que la cantidad de ella (su masa) se mantuvo constante en x_i.

Al instante t_{i+1} son emitidas algunas partículas de masa Δx_i, por lo que la cantidad de U pasa ahora a ser $x_{i+1} = x_i - \Delta x_i$. La cantidad de U se mantiene ahora constante en x_{i+1} durante todo el intervalo de tiempo $[t_{i+1}, t_{i+2})$, hasta que en el instante t_{i+2} se vuelvan a emitir algunas partículas subatómicas de U de masa Δx_{i+1}, siendo entonces la nueva cantidad de U dada por $x_{i+2} = x_{i+1} - \Delta x_{i+1}$, y así sucesivamente.

Acontece que, como siempre, la expresión $x = x_o e^{-kt}$ nos da la idealización del fenómeno que estamos estudiando. Si vieramos la gráfica de x contra t que reporta nuestro modelo ideal y la gráfica real de este fenómeno, veríamos algo como

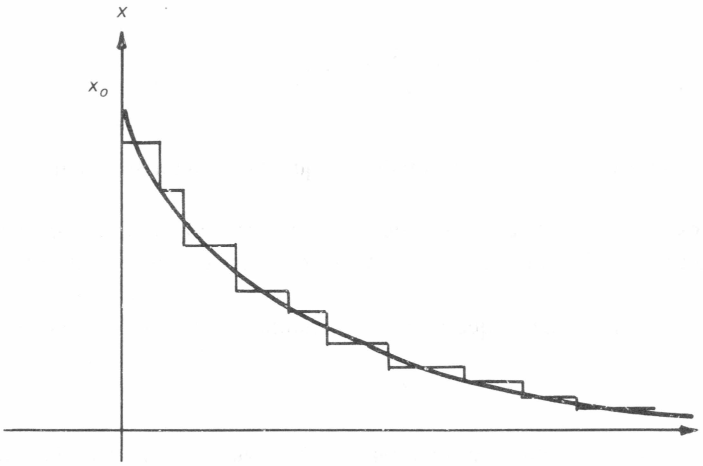


Figura 51. Versión ideal y versión real del fenómeno de desintegración radiactiva.

Un parámetro muy importante que se debe considerar cuando se está estudiando el fenómeno de desintegración radiactiva de la sustancia U, es la "vida media" (denotada por $t_{1/2}$) de U. Entendemos por vida media de una sustancia radiactiva el tiempo que transcurre desde que se tenían x_o gr de U hasta que se tienen $\frac{x_o}{2}$ gr de U.

Como $x = x_o e^{-kt}$, haciendo $x = \frac{x_o}{2}$, obtenemos que

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}}$$

Es decir, conociendo la constante k (que como ya dijimos es característica de cada sustancia) podemos conocer la vida media de la sustancia U. Una manera de obtener esta información es conociendo la cantidad de U en dos momentos distintos. Si llamamos $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$, como $x = x_o e^{-kt}$, tenemos que

$$x_1 = x_o e^{-k t_1}$$

$$x_2 = x_o e^{-k t_2}$$

Dividiendo estas expresiones obtenemos

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-k(t_1 - t_2)}$$

de donde

$$\boxed{k = \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{t_1 - t_2}}$$

Una interesante aplicación de todo lo visto anteriormente se encuentra en un método para determinar edades de fósiles y algunos otros datos arqueológicos.

Este método se conoce como el "método del Carbono - 14" y se debe a Willard Libby, cuyo descubrimiento le valió el Premio Nóbel de Química en 1960.

El método del Carbono - 14 se basa en lo siguiente: la atmósfera terrestre es continuamente bombardeada por rayos cósmicos, los cuales producen neutrones libres que se combinan con el nitrógeno de la atmósfera para producir el isótopo C - 14 (Carbono - 14), llamado comúnmente radiocarbono, pues es un elemento radiactivo.

Este Carbono - 14 se combina con el bióxido de carbono presente en la atmósfera, el cual es absorbido por las plantas. Las plantas a su vez son alimento para los animales y así es como incorporan el radiocarbono a sus tejidos vivos.

En un tejido vivo la velocidad de incorporación de radiocarbono está equilibrada con la velocidad de desintegración del mismo. Cuando un organismo muere, la velocidad de incorporación de radiocarbono a él se hace nula y entonces comienza el proceso de desintegración radiactiva del radiocarbono que se encontraba presente en el momento de su muerte.

Se asume la hipótesis de que la velocidad de bombardeo de la atmósfera por rayos cósmicos ha sido siempre la misma. Esto implica que la velocidad original de desintegración radiactiva de C - 14 en una muestra, como lo puede ser un pedazo de carbón, es exactamente la misma que la velocidad de desintegración medida ahora en una muestra similar. Esta hipótesis nos da la pauta para determinar la edad de una muestra de carbón.

Sea x la cantidad de C - 14 presente en la muestra al tiempo t, y x_o la cantidad presente a $t = 0$ cuando se formó la muestra. Sabemos que $x = x_o e^{-kt}$, donde k se puede conocer para el Carbono - 14, pues se sabe que la vida media de él es de 5568 años.

Llamemos $r(t)$ a la velocidad de desintegración del C - 14 al tiempo t. Entonces $r(t) = \frac{dx}{dt} = k\, x_o e^{-kt}$, de modo que $r(0) = k\, x_o$ = velocidad de desintegración del C - 14 al tiempo $t = 0$.

Según la hipótesis introducida anteriormente, $r(0)$ lo podemos llegar a conocer si medimos la velocidad de desintegración del C - 14 en una muestra similar a la estudiada, y $r(t)$ lo medimos directamente de la muestra estudiada. Entonces

$$\frac{r(t)}{r(0)} = e^{-kt}$$

de donde

$$\boxed{t = \frac{1}{k}\, ln\, \frac{r(0)}{r(t)}}$$

expresión que nos da la edad de la muestra.

Veamos un ejemplo ilustrativo.

En 1950 se hicieron excavaciones en Nipur (Babilonia), en las cuales se encontraron muestras de carbón que reportaron 4.09 desintegraciones de radiocarbono por minuto y por gramo. Una muestra similar reportó 6.68 desintegraciones. Se sabe que estas muestras se formaron en la época del reinado de Hamurabi. Con estos datos podremos determinar hace cuanto tiempo Hamurabi reinó en Babilonia.

Tenemos que

$$r(t) = 4.09$$
$$r(0) = 6.68$$

Como para el radiocarbono tenemos que $t_{½} = 5568$ años, entonces

$$k = \frac{ln\,2}{t_{½}} = \frac{ln\,2}{5568} = 1.2448 \times 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

De modo que

$$t = \frac{1}{1.2448 \times 10^{-4}}\, ln\, \frac{6.68}{4.09} = 3940.7367$$

Es decir, hace aproximadamente 3941 años Hamurabi reinó en Babilonia.

5.2 Ley de enfriamiento de Newton

Según esta ley la velocidad a la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea.

Si llamamos T a la temperatura del cuerpo a un tiempo t, y T_m a la temperatura del medio en el que se encuentra, tendremos entonces que

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Nuevamente hemos explicitado el hecho de que T es una función decreciente de t, colocando el signo menos en el lado derecho de la ecuación, por lo que k será entonces una constante positiva.

Si T_o era la temperatura del cuerpo a $t = 0$, tendremos que, separando variables e integrando

$$\int_{T_o}^{T} \frac{dT}{T - T_m} = -k \int_0^t \mathrm{dt}$$

de donde

$$ln\,\frac{T - T_m}{T_o - T_m} = -\,k\,t$$

y

$$\boxed{T = (T_0 - T_m)\,e^{-k\,t} + T_m}$$

que es la expresión que nos da la temperatura del cuerpo a un tiempo t.

Veamos un divertido e interesante ejemplo práctico de la ley de enfriamiento de Newton.

Dos personas A y B llegan a un restaurante y piden café. Ambos reciben tazas de café caliente (con la misma cantidad) a igual temperatura y al mismo tiempo. A $t = 0$, la persona A agrega inmediatamente una pequeña cantidad de crema fría y espera t_o minutos para comenzar a tomar su café. B espera primeramente t_o minutos, luego añade la misma cantidad de crema fría a su café, y comienza a tomarlo. ¿Cuál de las dos personas tomará el café más caliente?

Tendremos que introducir algunas variables antes de proceder a plantear la solución del problema.

T_C = temperatura a la que A y B reciben el café (a $t = 0$)
T_{Ct_o} = temperatura del café después de t_o minutos.
T_{CCO} = temperatura de la mezcla café-crema, que forma A a $t = 0$.
T_A = temperatura a la que A toma el café.

T_B = temperatura a la que B toma el café =
$T_{CC t_o}$ = temperatura de la mezcla café-crema que forma B a $t = t_0$.
T_{CR} = temperatura inicial de la crema.
$T_{CR t_o}$ = temperatura de la crema después de t_o minutos.
T_m = temperatura del medio ambiente.

En el ejemplo se habla de ''café caliente'' y de ''crema fría''. Debemos interpretar estos datos como que $T_C > T_m$ y $T_{CR} < T_m$.

Tenemos entonces un proceso simultáneo que consiste en:

i) Se forma (*A* lo hace) una mezcla café-crema, y ésta se enfría durante t_o minutos.
ii) Durante estos t_o minutos se enfría el café de *B* y a su vez ''se calienta''* la crema, de modo que a los t_o minutos se hace la mezcla café-crema (el café ya no está tan caliente como aquél que usó *A* para su mezcla, ni la crema está tan fría como la usada en tal mezcla).

Tanto la velocidad de enfriamiento de la mezcla café-crema de *A* y la del café de *B*, como la velocidad de ''desenfriamiento'' de la crema, se rigen por la ley de Newton estudiada en esta sección.

Vamos a introducir ahora un par de hipótesis que, aunque no son dadas directamente en el ejemplo, son físicamente aceptables y constituirán puntos clave en la solución del mismo.

La constante de proporcionalidad k que aparece en la formulación matemática de la ley de enfriamiento de Newton depende de (es función de) las características físicas del cuerpo sometido a enfriamiento (o calentamiento). Llamaremos k_1 a la constante correspondiente al enfriamiento del café (de *B*). Estrictamente hablando la constante de proporcionalidad para el proceso de enfriamiento de la mezcla café-crema de *A* no es la misma que la de *B* (o sea k_1). Sin embargo, considerando que en el ejemplo se habla de ''una pequeña cantidad'' de crema fría (i.e. considerando que las características físicas que intervienen en la determinación de k_1 no son sustancialmente alteradas por la adición de esa pequeña cantidad de crema fría), tomaremos también como k_1 esta constante de proporcionalidad (la del proceso de enfriamiento de la mezcla café-crema efectuada por *A* a $t = 0$).

La segunda de las hipótesis que introduciremos se explica a continuación.

No es difícil darse cuenta que otro de los parámetros que tienen influencia en la determinación de la constante de proporcionalidad citada en la hipótesis anterior es la superficie de contacto del cuerpo con el medio. Esto es, k será mayor mientras más grande sea la superficie de contacto del cuerpo con el medio (recuerde que $k > 0$). Físicamente resulta aceptable (aunque quizá nunca hayamos hecho el experimento) que la velocidad a la que se enfría un cuerpo en forma de lámina es mayor que la velocidad a la que éste se enfriaría si lo tuviéramos en forma de una esfera compacta. En nuestro ejemplo aceptamos que el recipiente en donde está servido el café es mayor que el recipiente en donde se encuentra la crema, de modo que la velocidad a la que se enfría el café es mayor que la velocidad a la que se ''desenfría'' la crema. Si llamamos k_2 a la constante de proporcionalidad en la formulación matemática del proceso de ''desenfriamiento'' de la crema, lo que consideramos, según la hipótesis introducida aquí, es que $k_1 > k_2$.

---

* En realidad lo que acontece con la crema en el transcurso de estos t_o minutos es que ésta va quedando cada vez menos fría.

Formulemos entonces los modelos matemáticos de enfriamiento del café de A y B. Para A tenemos

$$\frac{dT}{dt} = -\,k_1\,(T - T_m)$$

donde T es la temperatura de la mezcla café-crema a un tiempo t.

Separando variables e integrando nos queda que

$$\int_{T_{CCO}}^{T_A} \frac{dT}{T - T_m} = -\,k_1 \int_0^{t_o} dt$$

de donde

$$ln\,\frac{T_A - T_m}{T_{CCO} - T_m} = -\,k_1\,t_0$$

Despejando T_A

$$T_A = (T_{CCO} - T_m)\,e^{-k_1\,t_0} + T_m$$

que es la temperatura a la que A toma su café (con crema). Para B tenemos

$$\int_{T_C}^{T_{Ct_o}} \frac{dT}{T - T_m} = -\,k_1 \int_0^{t_o} dt$$

de donde

$$T_{Ct_o} = (T_C - T_m)\,e^{-k_1\,t_o} + T_m$$

Ésta es la temperatura del café sin crema de B después de t_o minutos (*no* es la temperatura a la que B toma su café, puesto que aún falta agregarle la crema).

También durante esos t_o minutos la crema pasa de una temperatura T_{CR} a una temperatura T_{CRt_o}, siendo la relación entre estas variables dada por

$$\int_{T_C}^{T_{Ct_o}} \frac{dT}{T - T_m} = -\,k_2 \int_0^{t_o} dt \quad *$$

$$ln\,\frac{T_{CRt_0} - T_m}{T_{CR} - T_m} = -k_2\,t_0$$

---

* Para el proceso de "desenfriamiento" de la crema tendríamos que

$$\frac{dT}{dt} = k_2\,(T_m - T)$$

pues hemos aceptado que $T_m > T$ y consideramos que $k_2 > 0$. Así pues, $\frac{dT}{dt} > 0$, que establece el hecho de que la temperatura de la crema es una función *creciente* del tiempo.

de donde

$$T_{CRt_0} = (T_{CR} - T_m)\, e^{-k_2 t_o} + T_m$$

Resumamos los resultados obtenidos hasta ahora en la siguiente gráfica

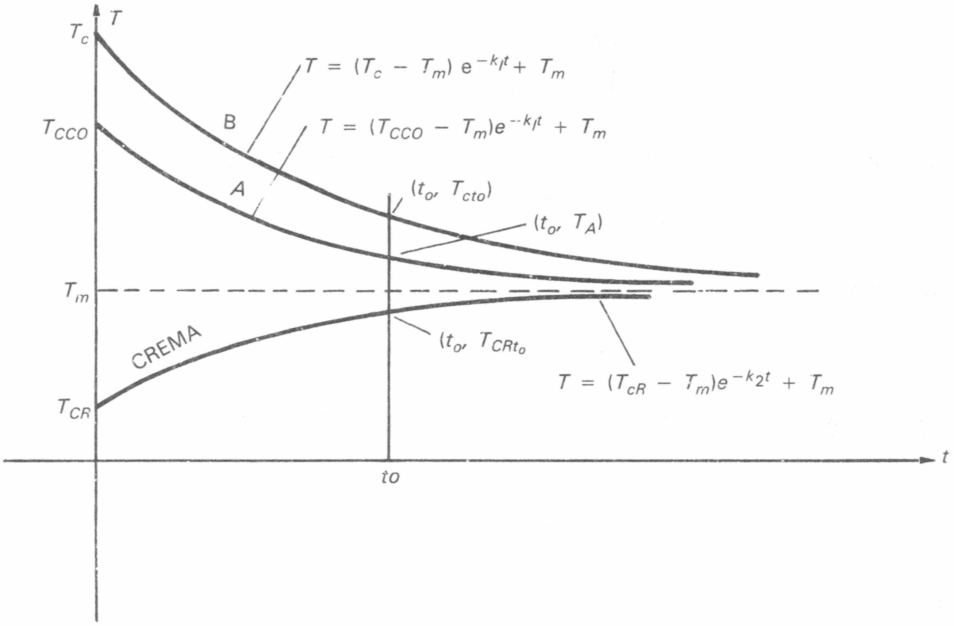


Figura 52. Temperatura del café de *A*, de *B* y de la crema.

Tenemos ahora que determinar T_{CCO} (temperatura inicial de la mezcla café-crema de *A*) en términos de T_C y T_{CR} (temperatura del café y temperatura de la crema), así como T_B (temperatura a la que *B* toma el café) en términos de T_{Ct_o} y T_{CRt_o} (temperatura del café a los t_o minutos-momento en el que *B* hace la mezcla con la crema a la temperatura T_{CRt_o}).

Este par de problemas por resolver se pueden ver, en abstracto, como la siguiente situación física:

Un cuerpo de masa m_1 y temperatura T_1 se pone en contacto (se mezcla) con otro cuerpo de masa m_2 y temperatura T_2, con $T_1 > T_2$. ¿Cuál será la temperatura T de la mezcla?

Para resolver este problema observemos que

Calor perdido por
el cuerpo de masa $m_1 = m_1\, c_1\, (T_1 - T)$

Calor perdido por
el cuerpo masa $m_2 = m_2\, c_2\, (T - T_2)$

donde c_1 y c_2 son los calores específicos de los cuerpos de masas m_1 y m_2 respectivamente.

Según el principio de la conservación de la energía tenemos que

$$m_1c_1\,(T_1 - T) = m_2c_2\,(T - T_2)$$

de donde

$$T = \frac{m_1\,c_1\,T_1 + m_2\,c_2\,T_2}{m_1\,c_1 + m_2\,c_2}$$

Sea entonces m_C la masa del café servido a A y a B y m_{CR} la masa de la crema agregada al café. Sean c_C y c_{CR} los calores específicos correspondientes.

Entonces es claro que

$$T_{CCO} = \frac{m_C\,c_C\,T_C + m_{CR}c_{CR}\,T_{CR}}{m_C\,c_C + m_{CR}\,c_{CR}}$$

y

$$T_B = \frac{m_C\,c_C\,T_{Ct_o} + m_{CR}\,c_{CR}\,T_{CRt_o}}{m_C\,c_C + m_{CR}\,c_{CR}}$$

que son las relaciones que queríamos establecer.

Simplifiquemos estas expresiones poniendo $m_C\,c_C = W_C$ y $m_{CR}\,c_{CR} = W_{CR}$ (estos son datos conocidos).

Entonces

$$T_{CCO} = \frac{W_C\,T_C + W_{CR}\,T_{CR}}{W_C + W_{CR}}$$

y

$$T_B = \frac{W_C\,T_{Ct_o} + W_{CR}\,T_{CRt_o}}{W_C + W_{CR}}$$

(Observe que T_{CCO} y T_B quedaron en términos de datos *conocidos*).

Entonces la temperatura a la que A toma el café (con crema) es

$$T_A = (T_{CCO} - T_m)\,e^{-k_1\,t_o} + T_m$$

o

$$\boxed{T_A = \left[\frac{W_CT_C + W_{CR}\,T_{CR}}{W_C + W_{CR}} - T_m\right] e^{-k_1\,t_o} + T_m} \qquad \textbf{(C)}$$

y la temperatura a la que B toma el café (con crema) es

$$T_B = \frac{W_C\, T_{C_{t_o}} + W_{CR}\, T_{CR_{t_o}}}{W_C + W_{CR}}$$

o

$$\boxed{T_B = \frac{1}{W_C + W_{CR}} \Big[W_C\,[\,(T_C - T_m)\, e^{-k_1 t_o} + T_m] + W_{CR}\,[(T_{CR} - T_m)\, e^{-k_2 t_0} + T_m] \Big]}$$

(D)

Tanto (**C**) como (**D**) han quedado en términos de datos conocidos. La pregunta es ahora: ¿qué número es mayor, el reportado por (**C**) o el reportado por (**D**)?

Calculemos la diferencia $T_A - T_B$

$$\begin{aligned} T_A - T_B = {} & \left[\frac{W_C\, T_C + W_{CR}\, T_{CR}}{W_C + W_{CR}} - T_m \right] e^{-k_1 t_o} + T_m - \\ & \frac{1}{W_C + W_{CR}} \Big[W_C\,[\,(T_C - T_m)\, e^{-k_1 t_o} + T_m] + \\ & + W_{CR}\,[\,(T_{CR} - T_m)\cdot e^{-k_2 t_o} + T_m] \Big] \\ = {} & \frac{W_{CR}\,(e^{-k_2 t_o} - e^{-k_1 t_o})(T_m - T_{CR})}{W_C + W_{CR}} \end{aligned}$$

Ciertamente $W_{CR} > 0$ y $W_C > 0$, y además, por la segunda de las hipótesis introducidas, $k_1 > k_2$, lo cual implica que $e^{-k_2 t_o} > e^{-k_1 t_0}$, y también que $T_m > T_{CR}$.

Entonces

$$T_A - T_B > 0$$

i.e.

$$T_A > \mathrm{T}_\mathrm{B}$$

por lo que A toma el café más caliente que B.

5.3 Modelos de población

Nos proponemos ahora estudiar el fenómeno del crecimiento de una población, proponiendo algún modelo que matematice tal fenómeno.

En un primer acercamiento a la formulación de un modelo matemático para el crecimiento de una población es natural pensar en que la población crecerá tan rápidamente como número de elementos existan en ella. Es decir, si llamamos p al número de elementos de una cierta población a un tiempo t, entonces

$$\frac{dp}{dt} = a\,p$$

donde a es una constante de proporcionalidad positiva.

Si p_o es el tamaño de la población a un cierto tiempo t_o, tenemos entonces que

$$p = p_o e^{a(t - t_o)}$$

Este modelo reporta un *crecimiento exponencial* para la población, y se conoce como ''ley Malthusiana de crecimiento de población'', pues en 1798 el economista inglés Thomas Malthus lo propuso en su libro *Essay on Population.*

Confrontemos este modelo con la realidad del crecimiento actual de la población humana en el mundo.

Se sabe que en el año de 1961 la población en el mundo era de 3.06×10^9 seres humanos, y en 1970 era de 3.65×10^9.

Tomando $t_o = 1961$, calculamos a

$$3.65 \times 10^9 = 3.06 \times 10^9\ e^{a(1970\text{-}1961)}$$

de donde

$$a = \frac{1}{9}\ ln\ \frac{3.65}{3.06} = 0.0196$$

de modo que el crecimiento de la población en la Tierra estaría dado por

$$p = 3.06 \times 10^9\ e^{0.0196(t\text{-}1961)}$$

La exactitud reportada por este modelo es bastante local. En efecto, se sabe que en 1950 la población mundial era de 2.509×10^9 habitantes, y nuestro modelo nos reporta un dato de 2.446×10^9, teniendo una asombrosa exactitud del 98%. Sin embargo, para el año de 1900 el modelo reporta una cantidad de $.925 \times 10^9$ habitantes, mientras que en realidad en ese año había 1.61×10^9 habitantes.

Además, las predicciones a futuro de este modelo son ciertamente inconcebibles: para el año 2575 habría un ser humano por cada metro cuadrado en la Tierra. . . ¡inclusive en el mar!

Un modelo bastante más apegado a la realidad para el crecimiento de poblaciones* es el proporcionado por la llamada "ley logística de crecimiento de poblaciones", la cual establece que

$$\frac{dp}{dt} = a\,p - b\,p^2$$

donde a y b son ciertos coeficientes que son característicos de cada población, y son llamados coeficientes vitales de la población. Este modelo fue introducido en 1837 por el biólogo alemán Verhulst. La acción del término $-b\,p^2$ es de amortiguamiento de la parte de crecimiento exponencial $(a\,p)$. Normalmente el coeficiente b es muy pequeño en valor absoluto (en comparación con el de a) lo cual hace que si la población no es muy grande, el término predominante sea el ap y el crecimiento de la población sea entonces muy parecido al crecimiento exponencial (el modelo malthusiano tiene una buena exactitud en poblaciones no muy grandes). Sin embargo, si p es grande, el término $-bp^2$ ya se hace significativo ante el término ap, y ejerce entonces sobre este último su acción de amortiguamiento, lo cual hace ser más real al modelo, pues en poblaciones muy grandes (como la población humana en la Tierra), hay que tomar en cuenta factores como las guerras, el hambre, muertes por accidentes, etc., que influyen en que la población no crezca proporcionalmente a su número de habitantes.

Estudiemos entonces el modelo proporcionando por la ley logística de crecimiento de poblaciones.

Sea p_o la población que se tenía al tiempo $t = t_0$. Separando variables e integrando queda

$$\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{a\,p - b\,p^2} = \int_{t_o}^{t} dt$$

Desarrollando en fracciones parciales el integrando del lado izquierdo de esta última expresión tenemos

$$\frac{1}{p\,(a - b\,p)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{p} + \frac{b}{a - b\,p}\right]$$

de modo que

$$\frac{1}{a}\left[\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{p} - \int_{p_o}^{p} \frac{-\,b\,d\,p}{a - b\,p}\right] = t - t_o$$

o

$$ln\,\frac{p}{p_o} - ln\,\frac{a - b\,p}{a - b\,p_o} = a\,(t - t_o)$$

---

* Ciertamente nos estamos refiriendo a poblaciones humanas. Existen algunos tipos de poblaciones (de bacterias por ejemplo) cuyo crecimiento es bastante cercano al de tipo exponencial.

despejando p nos queda

$$\boxed{p = \frac{a/b}{1 + (\frac{a/b}{p_o} - 1)\, e^{-a\,(t\,-\,t_o)}}}$$

Una primera observación interesante de esta expresión es que

$$\lim_{\to\ \infty} p = \frac{a}{b}$$

es decir, según este modelo, el crecimiento de la población está limitado. Llamaremos $p_{\text{máx}}$ al cociente $\frac{a}{b}$, el cual representa entonces la cantidad de habitantes límite que puede tener la población.

Una manera de obtener este importante dato es conociendo el tamaño de la población en dos momentos distintos (diferentes a t_0), t_1 y t_2, tales que $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$ (i.e. tal que el tiempo que existe entre t_o y t_1 sea el mismo que existe entre t_1 y t_2).

En efecto, sea $p_1 = p\ (t_1)$ y $p_2 = p\ (t_2)$. Entonces

$$p_1 = \frac{a/b}{1 + (\frac{a/b}{p_o} - 1)\, e^{-a\,(t_1\,-\,t_0)}}$$

$$p_2 = \frac{a/b}{1 + (\frac{a/b}{p_o} - 1)\, e^{-a\,(t_2\,-\,t_0)}}$$

Llamemos $\alpha = t_1 - t_0$. Entonces $t_2 - t_0 = 2\ \alpha$, de modo que las expresiones anteriores pueden reescribirse como

$$p_1 = \frac{\frac{a}{b}\, p_o}{p_o + (\frac{a}{b} - p_o)\, e^{-a\alpha}}$$

$$p_2 = \frac{\frac{a}{b}\, p_o}{p_o + (\frac{a}{b} - p_o)\, e^{-2a\alpha}}$$

Despejando $\frac{a}{b}$ de ambas expresiones e igualando obtenemos que

$$\frac{p_1\, p_o\, (e^{-a\alpha} - 1)}{p_1\, e^{-a\alpha} - p_o} = \frac{p_2 p_0\, (e^{-2\, a\, \alpha} - 1)}{p_2\, e^{-2\, a\, \alpha} - p_o}$$

o equivalentemente

$$\frac{p_1}{p_1\, e^{-a\, \alpha} - p_o} = \frac{p_2\, (e^{-a\, \alpha} + 1)}{p_2\, e^{-2\, a\, \alpha} - p_o}$$

de donde se obtiene que

$$\boxed{e^{-a\alpha} = \frac{p_o\, (p_2 - p_1)}{p_2\, (p_1 - p_o)}}$$

con esta expresión podemos calcular a, y como

$$\frac{a}{b} = \frac{p_1 p_o\, (e^{-a\alpha} - 1)}{p_1^2\, e^{-a\alpha} - p_o}$$

obtenemos finalmente que

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{p_1\, (p_o\, p_1 - 2\, p_o\, p_2 + p_1\, p_2)}{p_1^2 - p_o\, p_2}}$$

que es la expresión que nos da la población máxima. Por otra parte, de la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = a\, p - b\, p^2 = p\, (a - b\, p)$$

obtenemos que $\frac{dp}{dt} = 0$ sólo cuando $p = 0$ y cuando $p = \frac{a}{b} = p_{\text{máx}}$. Entonces $\frac{dp}{dt} > 0$ durante todo el intervalo de tiempo desde que la población nace hasta que alcanza su máximo valor.

Observe también que

$$\frac{d^2p}{dt^2} = a\, \frac{dp}{dt} - 2\, b\, p\, \frac{dp}{dt} = (a - 2b\, p)\, p\, (a - bp)$$

por lo que si $0 < p < \frac{a}{2b} = \frac{1}{2}\, p_{\text{máx}}$ tendremos la gráfica de p contra t cóncava hacia arriba, mientras que si $\frac{a}{2b} < p < \frac{a}{b}$ la gráfica será cóncava hacia abajo. Este punto de inflexión se logra al tiempo t, tal que

$$½ \frac{a}{b} = \frac{a/b}{1 + (\frac{a/b}{p_0} - 1)\, e^{-a\,(t - t_0)}}$$

o sea

$$t = \frac{1}{a}\, ln \frac{a/b - p_0}{p_0} + t_0$$

por lo que en el intervalo de tiempo $(t_0, \frac{1}{a}\, ln \frac{a/b - p_0}{p_0} + t_0)$ durante el cual la población alcanza la mitad de su población máxima se presenta un *crecimiento acelerado* (la curva es cóncava hacia arriba), mientras que en el intervalo $(\frac{1}{a}\, ln \frac{a/b - p_0}{p_0} + t_0, \infty)$ se tendrá un *crecimiento lento* (la curva es cóncava hacia abajo).

Gráficamente nuestros resultados se ven como

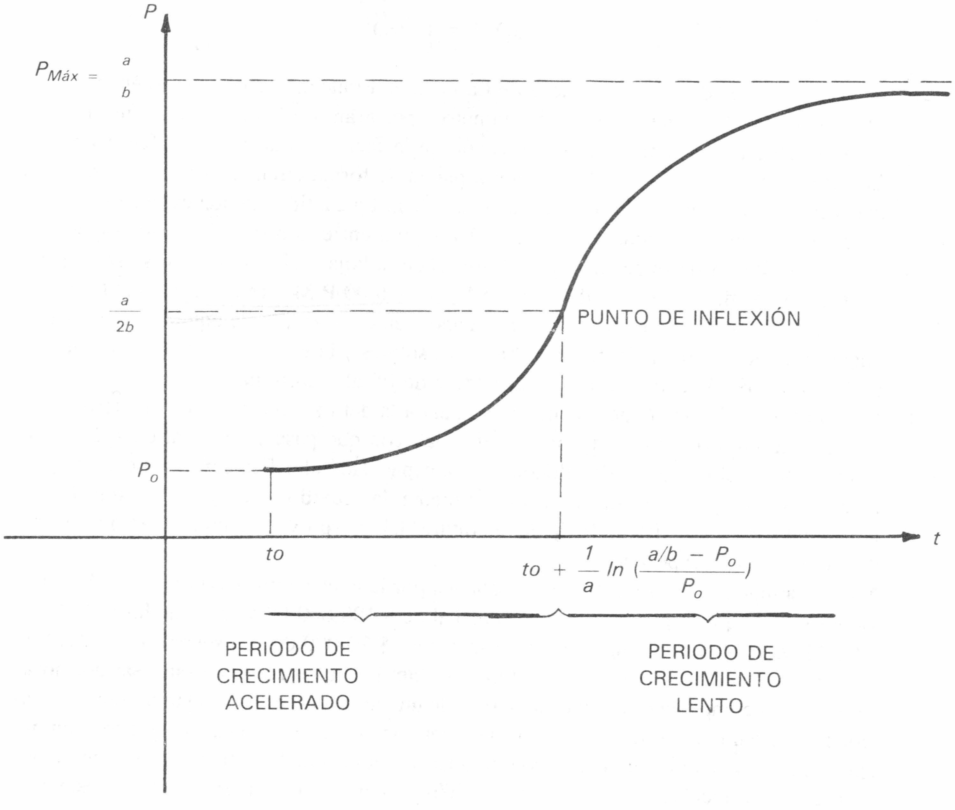


Figura 53. Modelo logístico de crecimiento de población.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 3. SECCIÓN 5)

1. Supóngase que se descubre que en 27 años, aproximadamente 1.4% de cierta cantidad de un elemento radiactivo se ha desintegrado. Determine el tiempo que ha de transcurrir para que se desintegre la mitad de la cantidad original de dicho elemento.
2. Si la vida media del radio es de 1700 años, ¿qué porcentaje (de una cierta cantidad inicial) quedará de radio después de 100, 200 y 300 años?
3. Cierto isótopo radiactivo que tiene una vida media de T min se produce en un reactor nuclear a una velocidad de a gr/min. Demuestre que después de un tiempo "muy grande" la cantidad del isótopo radiactivo es de $aT/\ln 2$ (gr).
4. Un material radiactivo se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente de material. Si $x = x(t)$ representa la cantidad de material al tiempo t, y sabemos que $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$, demuestre que la vida media del material es de

$$t_{1/2} = \frac{(t_2 - t_1)\ ln\ 2}{ln\ (x_1/x_2)}$$

5. Los neutrones en un depósito nuclear aumentan a una velocidad proporcional a la cantidad de neutrones presentes. Sea $x = x(t)$ la cantidad de neutrones al tiempo t. Suponga que $x(0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$. Demuestre que

$$(x_2/x_0)^{t_1} = (x_1/x_0)^{t_2}$$

6. Se extrajo carbón de la famosa cueva de Lascaux en Francia, el cual reportó en 1950 una cantidad de 0.97 desintegraciones por minuto y por gramo. Materia viva similar reporta 6.68 desintegraciones. Haga una estimación de la fecha en que la cueva fue ocupada.
7. La velocidad de crecimiento de una cierta planta de forma circular es proporcional a su perímetro y a la cantidad de luz que cae sobre ésta. La cantidad de luz es, a su vez, proporcional al área de la hoja y al coseno del ángulo entre la dirección de los rayos y la vertical. Hallar la dependencia entre el área S de la hoja y el tiempo t, si se sabe que a las 6:00 A.M. dicha área era de 1600 cm^2 y a las 6:00 P.M. era de 2500 cm^2 (considerar que la observación se efectuó en el ecuador, en el momento de equinoccio en que el ángulo formado entre la dirección de los rayos solares y la vertical puede ser considerada de 90° a las 6:00 A.M. y a las 6:00 P.M. y de 0° al medio día).
8. La temperatura inicial T_0 de un cuerpo es igual a la del medio ambiente. El cuerpo recibe calor de un aparato calentador (la velocidad con que pasa el calor al cuerpo es una función dada del tiempo: $cg(t)$, donde c es la capacidad calorífica constante del cuerpo). Además, el cuerpo cede calor al medio ambiente de acuerdo a la ley de Newton. Hallar la dependencia que existe entre la temperatura del cuerpo y el tiempo, medido a partir del comienzo del experimento.
9. Nuestro amigo J.B. acostumbra ir los sábados por la noche a una casa de juego. Siempre va después de que le pagan su sueldo semanal de $ 100,000.00 y juega de las 9:00 P.M. a las 11:00 P.M. El domingo entrega a su esposa $ 80,000.00. La señora de J.B. acepta este tipo de "pérdidas" del monto del ingreso familiar, pues reconoce que esas dos horas de juego, en compañía de algunos amigos y de un par de cervezas, relajan bastante la tensión nerviosa de su marido. J.B. es una persona sumamente metódica en el juego: siempre apuesta cantidades directamente proporcionales a la cantidad de dinero que tiene, y por lo tanto su "velocidad de pérdida" es también proporcional al dinero que tiene (este dato es conocido por la señora de J.B.). El último fin de semana aconteció algo distinto: la señora de J.B. se enteró que su marido no llegó a las 9:00 P.M. a la casa de juego, sino

que ese sábado llegó a las 8:00 P.M. Sin embargo, al domingo siguiente su marido le entregó los mismos \$ 80,000.00 que le entregaba siempre. Conociendo ya a su esposo desde 10 años atrás, la señora concluyó que ese sábado él no había jugado 2, sino 3 horas y que sin embargo la cantidad neta recibida para el gasto de la familia era la misma (de \$ 80,000.00). Después de unos cuantos minutos con papel y lápiz, la señora de J.B. llamó a su esposo y le dijo: "Querido, sé que recibiste un aumento de sueldo de \$ ____________________, así es que la próxima semana espero que sigas jugando solamente dos horas y me entregues la cantidad de \$ ____________ que me corresponde". Llene los espacios.

10. Agua a una temperatura de 90°C se enfría en 7 min a 70°C en un cuarto cuya temperatura es de 20°C. (a) Hallar la temperatura del agua después de 20 min. (b) ¿Cuándo es la temperatura del agua igual a 50°C?
11. Un aceite posee una temperatura igual a 10°C. Si tarda 10 min en calentarse a 30°C en un cuarto con temperatura de 40°C. (a) ¿Cuál será su temperatura después de 20 min?, ¿después de 40 min? (b) ¿Cuándo será la temperatura de 15°C?
12. Si la temperatura del aire es de 15°C y un cuerpo se enfría en 15 min desde 90°C hasta 50°C, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C?
13. Un termómetro cuya lectura marca 26°F se introduce en una habitación cuya temperatura es de 70°F. Dos minutos después la temperatura que el termómetro marca es de 40°F. Determine la lectura de la temperatura del termómetro en función del tiempo. ¿Cuál será la temperatura que indicará el termómetro a los 20 min de introducirse en la habitación?
14. A la 1:30 P.M. la lectura de un termómetro es de 60°F y se lleva inmediatamente a un medio donde la temperatura ambiente es de 10°F. A las 2:10 P.M. la lectura del termómetro es de 16°F. A las 2:30 P.M. se regresa el termómetro al medio de 60°F. ¿Cuál será la lectura del termómetro a las 2:50 P.M.?, ¿a qué hora indicará en su lectura 30°F?
15. Según lo que establece la ley de enfriamiento de Newton estudiada aquí, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del medio ambiente, en donde el coeficiente de proporcionalidad es constante. En algunos cálculos resulta conveniente considerar que este coeficiente depende linealmente del tiempo $k = k_0 (1 + at)$. Tomando en cuenta este hecho, hallar la dependencia entre la temperatura T del cuerpo y el tiempo t, considerando que a $t = 0$, $T = T_0$ y que la temperatura del medio ambiente es de T_m.
16. Una cierta población de bacterias se reproduce a una velocidad proporcional a la cantidad de las mismas. Si después de 2 días se duplicó el número de bacterias, ¿cuántas bacterias habrá después de 3 días?, ¿después de cuánto tiempo se triplicará el número de bacterias?
17. El crecimiento de una cierta población de insectos obedece la ley $\dfrac{dp}{dt} = 0.03\, p^{3/2}$. Si a $t = 0$ se tenían p_0 insectos, ¿cuándo habrá $10\, p_0$ insectos?
18. En un cultivo la cantidad de bacterias crece a una velocidad proporcional a la k-ésima potencia de la cantidad presente. Si $x(t)$ representa la cantidad de bacterias en el cultivo al tiempo t, y sabemos de $x(0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, demuestre que si $x(t_2) = x_2$, entonces

$$t_2 = \frac{x_2^{1-k} - x_0^{1-k}}{x_1^{1-k} - x_0^{1-k}}\, t_1$$

19. Una familia de salmones que viven en las aguas de las costas de Alaska tiene un crecimiento acorde a la ley Malthusiana

$$\frac{dp}{dt} = 0.003\, p$$

donde $p = p(t)$ es la población de salmones al tiempo t. A $t = 0$ un grupo de tiburones se establecen en las costas de Alaska y comienzan a atacar a los salmones. La velocidad a la que los tiburones matan a los salmones es de $0.001\, p^2$. Aún más, debido a la presencia de los tiburones, se tiene una emigración hacia otras aguas, de 0.002 salmones por minuto. Suponga que a $t = 0$ se tenían 800,000 salmones. Halle una fórmula para $p(t)$.

20. Demuestre que la ecuación $p = p(t)$ que da la población a un tiempo t, según la ley logística de crecimiento de poblaciones, se puede escribir como

$$p(t) = \frac{a/b}{1 - e^{-a(t - t*)}}$$

donde $t*$ es el tiempo en el cual se alcanza el punto de inflexión de la curva $p = p(t)$.

21. Se ha observado el crecimiento de un árbol y se han obtenido los siguientes datos

tiempo (t-días)	altura (x-m)
160	2.1
320	4.4
480	5.3

Suponga que el crecimiento del árbol se rige por la ley logística. Determine $x = x(t)$, la altura del árbol como una función del tiempo t. ¿Cuál es la máxima altura que (teóricamente) alcanzará el árbol?, ¿qué altura tendrá el árbol después de 3 años?, ¿cuándo comienza el periodo de crecimiento lento del árbol?

22. En un cierto país se vienen haciendo censos de población cada 10 años desde 1940 y se tienen reportados los siguientes datos

año	población (millones de habitantes)
1940	30
1950	46
1960	65
1970	84
1980	100

Suponga que el crecimiento de la población es dado por la ley logística. Determine: (*a*) la población máxima; (*b*) el año en el que se tiene el cambio del periodo de crecimiento rápido al periodo de crecimiento lento. ¿Cuántos habitantes hay en ese momento? (*c*) la función $p = p(t)$.

23. Este problema presenta un modelo para el crecimiento de una población sujeta a epidemias. Suponga que inicialmente el crecimiento de la población se rige por la ley logística con coeficientes a y b y que cuando $p(t_1) = p_1 < a/b$ ataca la epidemia. En este momento los coeficientes de la ecuación diferencial de la ley logística se hacen A ($< a$) y B ($< b$). Suponga que $p_1 < A/B$. Comienza entonces un proceso de decrecimiento de la población, hasta que $p(t_2) = p_2 > A/B$. En este momento la epidemia se acaba y la población comienza de nuevo a crecer de acuerdo a la ley logística con los coeficientes (originales) a y b. Así pues se obtienen intervalos de tiempo en que la población fluctúa entre p_1 y p_2. Demuestre que esta población posee un comportamiento periódico, de periodo $t_1 + t_2$

donde

$$t_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{p_1 (a - b p_2)}{p_2 (a - b p_1)}$$

$$t_2 = \frac{1}{A} \ln \frac{p_2 (Bp_1 - A)}{p_1 (Bp_2 - A)}$$

6. APLICACIONES DIVERSAS

6.1 La catenaria

Se trata de ver cuál es la forma que toma una cadena flexible que está suspendida entre dos puntos y que cuelga con su propio peso.

Solución

Sea $y = y(x)$ la curva que representa la forma que tomará la cadena. Coloquemos el punto más bajo de la cadena sobre el eje y, tal como se muestra en la siguiente figura.

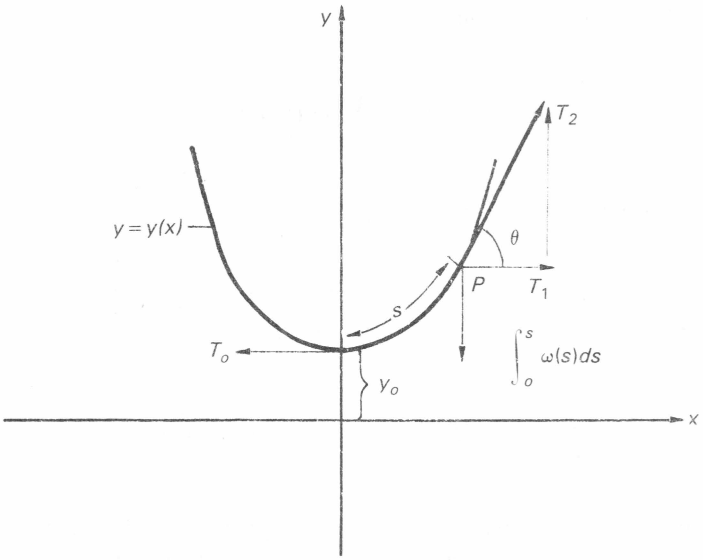


Figura 54. La catenaria.

Sea $P(x, y)$ un punto (distinto al punto más bajo de la cadena), cualquiera sobre $y = y(x)$. Según la condición de equilibrio de la cadena debemos tener que, siendo T la tensión (en la dirección tangencial $y = y(x)$) de la cadena en el punto P y T_1 y T_2 sus componentes en las direcciones de los ejes, entonces (tomando como punto referencial al punto más bajo de la cadena):

$$T_2 = \text{peso de la cadena hasta el punto } P$$

$$T_1 = T_0$$

donde T_0 es la tensión horizontal que presenta el punto más bajo de la trayectoria, y, si llamamos $\omega = \omega(s)$ a la densidad lineal de la cadena (medida a partir del punto más bajo), tendríamos que el peso de la cadena hasta el punto P es $\int_0^s \omega(s)\, ds$ (aquí s es la *longitud de arco*).

Entonces

$$T_2 = T \operatorname{sen} \theta = \int_0^s \omega\,(s)\, ds$$

$$T_1 = T \cos \theta = T_o$$

de modo que

$$T_o \tan \theta = \int_0^s \omega\,(s)\, ds$$

Pero $\tan \theta = y'$ (en x) entonces

$$T_o y' = \int_0^s \omega\,(s)\, ds$$

Derivando respecto de x obtenemos que

$$T_o y'' = \frac{d}{dx} \int_0^s \omega(s)\, ds = \frac{d}{ds} \left[\int_0^s \omega\,(s)\, ds \right] \frac{ds}{dx}$$

$$T_o y'' = \omega\,(s) \frac{ds}{dx} = \omega(s) \sqrt{1 + (y')^2}$$

Resolvamos el problema para el caso en que $\omega(s) = \omega_o$ (la densidad lineal de la cadena es constante). Entonces la ecuación diferencial a resolver es

$$y'' = a \sqrt{1 + (y')^2} \qquad \text{donde } a = \frac{\omega_o}{T_o}$$

Haciendo $y' = u$, (por lo que $y'' = u'$) nos queda

$$u' = a \sqrt{1 + u^2}$$

Separando variables e integrando (usando el hecho de que en $x = 0$, $u = y' = 0$, pues éste es el punto más bajo de $y = y(x)$)

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = a \int_0^x dx$$

o

$$ln\ (u + \sqrt{1 + u^2}) = ax$$

de donde

$$u = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

Pero $u = y'$, por lo que

$$\int_{y_o}^{y} dy = \int_{0}^{x} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\, dx$$

de donde

$$y = y_o + \frac{1}{a}\,\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} - \frac{1}{a}$$

o

$$\boxed{y = y_o + \frac{1}{a}\,(\cosh ax - 1)}$$

Debido a este problema (*y* a su solución, por supuesto) a la curva representada por la función $f(x) = \cosh x$ se le llama CATENARIA (del latín *catena* = cadena).

6.2 La tractriz

Imagine unido el punto $P(0,a)$ y el punto $Q(0,0)$ por una cuerda tensa (de longitud a).

A $t = 0$ comienza el punto Q a moverse con velocidad constante por la parte positiva del eje x, tirando entonces del punto P. Se trata de describir la trayectoria que seguirá P.

Solución

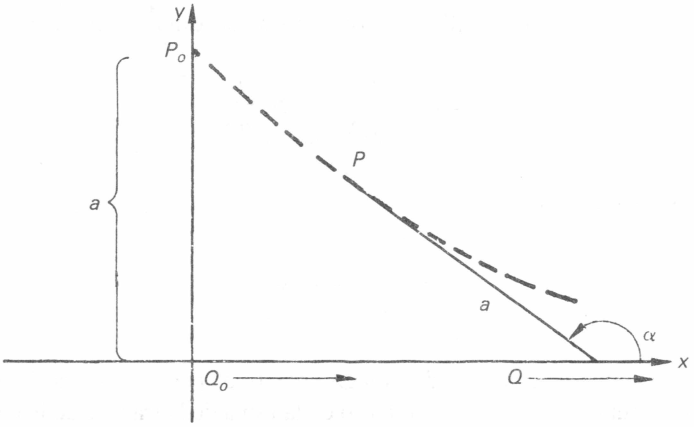


Figura 55. La tractriz.

Sea $y = y(x)$ la ecuación de la curva que queremos encontrar (por donde se moverá el punto P).

Se ve entonces que esta curva tendrá la propiedad de que la longitud de su tangente será siempre constante e igual a a.

De la figura vemos que, si $\tan \alpha = y'$, entonces

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{a}$$

Entonces

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y}{a}$$

que es la ecuación diferencial de nuestro problema.

Separando variables e integrando

$$\int_a^y \frac{\sqrt{a^2 - y^2}\, dx}{y} = - \int_0^x dx$$

de donde

$$\boxed{-x = a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}}$$

Debido a este problema, a la curva que representa la expresión que hemos obtenido se le llama *tactriz* (del latín *tractrum* = tirar).

Observación: en realidad la tractriz tiene dos ramas simétricas respecto del eje y. Acontece que de la expresión que hallamos como ecuación diferencial del problema

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y}{a}$$

obtenemos en realidad que

$$y' = \frac{y}{\pm \sqrt{a^2 - y^2}}$$

En este caso hemos despreciado el signo positivo, pues, tal como hemos planteado el problema, el punto P se moverá a lo largo de la rama de la tractriz en la cual y' siempre es negativa.

6.3 La catenaria y la tractriz*

Hemos estudiado los problemas que han dado origen a dos importantes curvas: la catenaria y la tractriz.

De la primera de ellas podemos decir que aparece en relación al problema de unir dos puntos en el plano (con ordenada positiva) por medio de una curva tal que la superficie del cuerpo de revolución que se obtiene al girar esta curva alrededor del eje x sea mínima. La respuesta a este problema es que los puntos deben unirse por medio de un arco de catenaria (al cuerpo de revolución resultante se le llama catenoide).

De la tractriz podemos decir que, haciéndola girar alrededor del eje x, obtenemos una superficie que sirve de modelo para geometrías no euclidianas (la "trompeta" de Lobachevsky).

Aparentemente estas curvas no tienen nada que les relacione, han surgido de problemas muy distintos, y, a futuro, los campos en donde encuentran aplicación son también muy diferentes.

Es conveniente comentar aquí un hecho sorprendente** (de esos que aparecen frecuentemente en el estudio de la matemática) acerca de una *relación geométrica* entre estas dos curvas.

Consideremos la catenaria

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

y sea $M(x, y)$ un punto cualquiera sobre ella.

Del punto M bajemos, perpendicularmente, una recta hacia el eje x. Sea N la intersección de esta recta con el eje x (ver la figura).

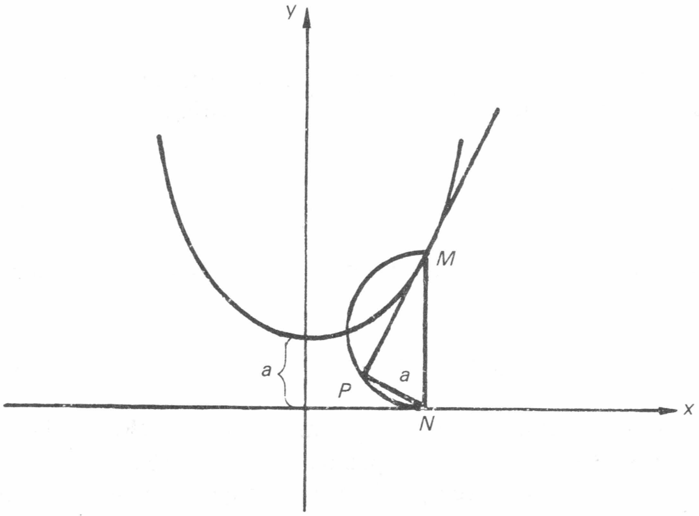


Figura 56. Construcción geométrica sobre la catenaria para localizar el punto P.

---

* No forma parte esencial del texto.

** Para quien haya estudiado algo de geometría no euclidiana en realidad no le parecerá tan sorprendente.

Tracemos ahora una semicircunferencia de diámetro MN, y marquemos una cuerda de longitud a en esta semicircunferencia tal como se muestra en la figura.

Se puede afirmar que la recta que une el punto P con el punto M es tangente a la catenaria en M.

En efecto, del triángulo (rectángulo) MPN, llamando α al ángulo PMN, tenemos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{y}$$

de donde, siendo m la pendiente de la recta que pasa por P y M, tenemos

$$m = \tan (90 - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{a} \sqrt{y^2 - a^2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{pues } y \,=\, a \cosh \frac{x}{a}}}{=} \operatorname{senh} \frac{x}{a}$$

Pero

$$y' = \left(a \cosh \frac{x}{a}\right)' = \operatorname{senh} \frac{x}{a}$$

con lo que queda mostrada la afirmación.

Hagamos una construcción similar a la anterior en cada punto de la catenaria y veamos cuál es el lugar geométrico que describe el punto P.

La ecuación de la circunferencia con diámetro MN es

$$(X - x)^2 + \left(Y - \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

(denoto con (X, Y) a las coordenadas de un punto sobre la circunferencia, y con (x, y) las coordenadas de M, punto que se encuentra en la catenaria).

O sea

$$X^2 - 2x\, X + x^2 + Y^2 - Y\, y = 0 \qquad \textbf{(E)}$$

Por otra parte, la ecuación de la recta que pasa por M y por P es (la recta tangente a la catenaria en M)

$$Y - y = \operatorname{senh} \frac{x}{a} (X - x) \qquad \textbf{(F)}$$

Consideremos el sistema de ecuaciones formado por **(E)** y **(F)** (con incógnitas X, Y). Una solución de este sistema es (x, y) (el punto M) y la otra debe ser $(\tilde{X}, \tilde{Y})$, coordenadas del punto P (estas coordenadas son precisamente las que queremos encontrar).

Resolvamos entonces simultáneamente **(E)** y **(F)**.

De **(F)** obtenemos que

$$Y = \operatorname{senh} \frac{x}{a} (X - x) + y$$

y

$$Y^2 = \operatorname{senh}^2 \frac{x}{a}(X - x)^2 + 2\, y \operatorname{senh} \frac{x}{a}(X - x) + y^2$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en (**E**), nos queda

$$X^2 - 2x\, X + x^2 + \operatorname{senh}^2 \frac{x}{a}(X - x)^2 + 2y \operatorname{senh} \frac{x}{a}(X - x)$$

$$+ y^2 - y \operatorname{senh} \frac{x}{a}(X - x) - y^2 = 0$$

O sea

$$X^2 - 2x\, X + x^2 + \operatorname{senh}^2 \frac{x}{a}(X - x)^2 + y \operatorname{senh} \frac{x}{a}(X - x) = 0$$

expresión que puede reescribirse como (usando el hecho de que $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$)

$$(X - x)\left[y \operatorname{senh} \frac{x}{a} + (X - x)\cosh^2 \frac{x}{a}\right] = 0$$

De aquí vemos que $X = x$ es efectivamente una solución del sistema (la correspondiente al punto M), por lo que las coordenadas del punto P se obtienen haciendo

$$y \operatorname{senh} \frac{x}{a} + (X - x)\cosh^2 \frac{x}{a} = 0$$

de donde obtenemos que

$$X = -\frac{y \operatorname{senh} \dfrac{x}{a}}{\cosh^2 \dfrac{x}{a}} + x$$

y de (**F**) obtenemos que

$$Y = \frac{y}{\cosh^2 \dfrac{x}{a}}$$

Por lo tanto, el punto P tiene de coordenadas

$$\left(-\frac{y \operatorname{senh} \dfrac{x}{a}}{\cosh^2 \dfrac{x}{a}} + x,\ \frac{y}{\cosh \dfrac{x}{a}}\right)$$

o bien, recordando que $y = a \cosh \frac{x}{a}$, queda

$$\left(-a \frac{\operatorname{senh} \frac{x}{a}}{\cosh \frac{x}{a}} + x, \frac{y}{\cosh \frac{x}{a}} \right)$$

De modo que $\widetilde{X} = -a \dfrac{\operatorname{senh} \frac{x}{a}}{\cosh \frac{x}{a}} + x, \; \widetilde{Y} = \dfrac{a}{\cosh \frac{x}{a}}$.

Hallemos cómo están relacionadas $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$.

Vemos que de

$$\widetilde{Y} = \frac{a}{\cosh \frac{x}{a}}$$

obtenemos que

$$\cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{\widetilde{Y}} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

y

$$\operatorname{senh} \frac{x}{a} = \pm \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{a} - 1} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{\widetilde{Y}} \right)^2 - 1} = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$$

Sumando estas dos últimas expresiones obtenemos

$$e^{x/a} = \frac{a}{\widetilde{Y}} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{\widetilde{Y}} \right)^2 - 1}$$

de donde

$$x = a \; ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - \widetilde{Y}^2}}{\widetilde{Y}} \qquad (\mathbf{G})$$

Por otro lado

$$\widetilde{X} = -a \frac{\operatorname{senh} \frac{x}{a}}{\cosh \frac{x}{a}} + x$$

$$= -\widetilde{Y} \operatorname{senh} \frac{x}{a} + x$$

Usando (**G**) y el hecho de que senh $\frac{x}{a} = \pm\sqrt{\cosh^2\frac{x}{a} - 1} = \frac{\pm\sqrt{a^2 - \tilde{Y}^2}}{\tilde{Y}}$ obtenemos

$$\tilde{X} = -\tilde{Y}\frac{\pm\sqrt{a^2 - \tilde{Y}^2}}{\tilde{Y}} + a\ ln\frac{a \pm \sqrt{a^2 - \tilde{Y}^2}}{\tilde{Y}}$$

o

$$\tilde{X} = \mp\sqrt{a^2 - \tilde{Y}} + a\ ln\frac{a \pm \sqrt{a^2 - \tilde{Y}^2}}{\tilde{Y}}$$

o bien

$$\boxed{\mp\tilde{X} = \sqrt{a^2 - \tilde{Y}^2} + a\ ln\frac{a - \sqrt{a^2 - \tilde{Y}^2}}{\tilde{Y}}}$$

que es la ecuación de una tractriz.

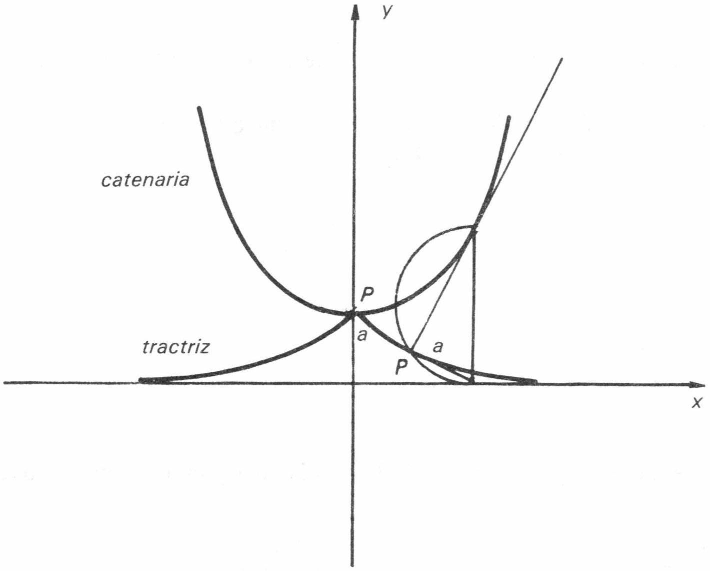


Figura 57. Relación geométrica entre la catenaria y la tractriz.

6.4 La propiedad focal de una parábola

Sea dada una parábola cualquiera. Si en el foco de ella se encuentra una fuente luminosa, es fácil mostrar (usando el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión) que los rayos emitidos por la fuente serán reflejados por la parábola en direcciones paralelas al eje de la misma. Decimos entonces que la parábola tiene la propiedad focal.

Lo que queremos hacer ahora es demostrar que si una curva tiene la propiedad focal, entonces esta curva tiene que ser una parábola (con lo cual tendremos entonces que la propiedad focal *caracteriza por completo* a una parábola). Más concretamente, se trata de hallar la ecuación de la curva tal que, si en el origen de coordenadas se encuentra una fuente luminosa, los rayos que emite esta fuente sean reflejados por la curva en direcciones paralelas al eje x.

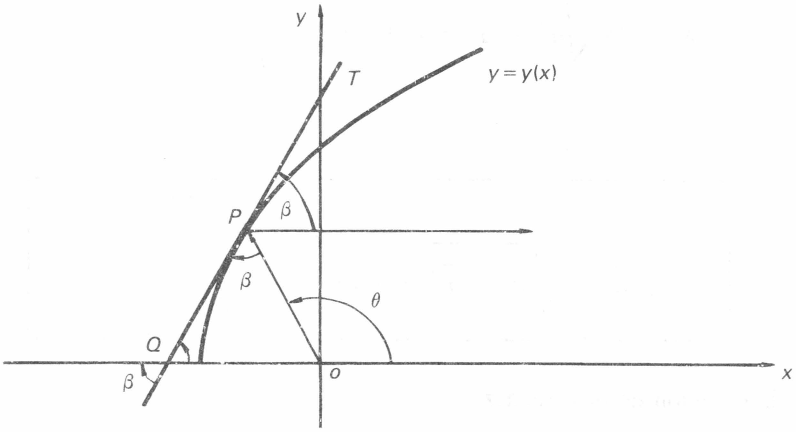


Figura 58. Propiedad focal de la parábola.

Sea $y = y(x)$ la ecuación de la curva que queremos hallar, y sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre ella.

Usando la ley de reflexión (los ángulos de incidencia y reflexión son iguales), tenemos que $y' = \tan \beta$ y, del triángulo OPQ

$$\theta = 2\,\beta$$

Por otra parte

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

(ya está considerado el signo negativo de la abscisa del punto P), por lo que

$$\frac{y}{x} = \tan 2\,\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{2\,y'}{1 - (y')^2}$$

o sea (despejando y')

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

que es la ecuación diferencial de nuestro problema.

Se trata de una ecuación homogénea que resolvemos haciendo $y = ux$. Entonces

$$u + xu' = -\frac{1}{u} \pm \sqrt{\frac{1}{u^2} + 1}$$

o bien

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-(u^2 + 1) \pm \sqrt{u^2 + 1}}{u}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{u\,du}{-(u^2 + 1) \pm \sqrt{u^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x} + C''$$

o bien

$$ln\,(C' \cdot |x|) = \frac{u\,du}{-(u^2 + 1) \pm \sqrt{u^2 + 1}}$$

La integral del lado derecho la podemos resolver haciendo $u^2 + 1 = v^2$, de modo que

$$ln\,(C'\ |x|) = -\int \frac{-dv}{-v \pm 1} = -\ ln\ |-v \pm 1|$$

$$= -\ ln\ \left| \mp \sqrt{u^2 + 1} \pm 1 \right|$$

$$= -\ ln\ \left| \mp \frac{\sqrt{y^2 + x^2} \pm x}{} \right|$$

o sea

$$\pm \sqrt{y^2 + x^2} \pm x = C$$

de donde obtenemos finalmente que

$$\boxed{y^2 = C^2 + 2C\,x}$$

que es la ecuación de la familia de parábolas con foco en el origen cuyo eje focal es el eje x.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 3. SECCIÓN 6)

1. Para el fenómeno de salida de fluidos por un orificio practicado a un recipiente, aplicamos la ley de Torricelli, que establece que la velocidad con la que el líquido sale del recipiente por el orificio está dada por $v = (2gh)^{\frac{1}{2}}$, donde h es la altura de la columna del líquido sobre el orificio y g es la aceleración debida a la gravedad. Considere un recipiente cilíndrico que tiene su eje vertical y cuya sección transversal es S. El recipiente tiene en su fondo un pequeño orificio cuya área es q cerrado por un diafragma. El recipiente contiene un líquido cuya altura es h. En el momento $t = 0$ el diafragma comienza a abrirse siendo el área del orificio proporcional al tiempo. El orificio queda completamente abierto después de T seg. Demuestre que la altura del líquido en ese momento es de

$$[(h)^{\frac{1}{2}} - \frac{(2g)^{1/2}}{4S}\, qT]^2$$

▲ 2. Cierto día estuvo nevando continuamente desde la mañana. Al medio día, un hombre comenzó a limpiar una calle a una "velocidad constante", i.e. quitaba cantidades iguales de nieve de la calle en iguales intervalos de tiempo. El hombre limpió 200 m para las 2:00 P.M. y a las 3:00 P.M. llevaba ya 300 m de "calle limpia". Diga a qué horas comenzó a nevar.

▲ 3. (El problema de las cuatro moscas). Se tienen 4 moscas paradas en las esquinas de una mesa cuadrada de lado a. A $t = 0$ comienzan a caminar a la misma velocidad, de tal modo que cada mosca se desplaza siempre hacia su compañera que se encuentra a su derecha. Encuentre la trayectoria seguida por cada mosca y la distancia que cada una de ellas recorre antes de encontrarse con sus compañeras; ¿en qué parte de la mesa ocurre tal encuentro? (Sugerencia: trace un sistema de coordenadas polares con el polo en el centro de la mesa y el eje polar pasando por uno de sus vértices).

▲ 4. Considere un planeta ideal de forma esférica constituido por un material líquido incomprensible de densidad D. El planeta se encuentra gravitacionalmente aislado del resto del Universo. Describa la variación de la presión en el interior del planeta; ¿a qué distancia del centro del planeta la presión es máxima?

▲ 5. Considere un cilindro recto circular con eje vertical el cual contiene agua. El cilindro se hace girar alrededor de su eje con una velocidad angular constante ω. Describa la forma (de la superficie) que toma el agua.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO BIBLIOTECA

6. Un punto P de masa m en el plano es atraído hacia n puntos fijos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (también en el plano) con fuerzas proporcionales a las distancias: la fuerza de atracción del punto P al punto C_i es $F_i = k_i m\, PC_i$; Sean (x, y) las coordenadas del punto P y (x_i, y_i) las del punto C_i — $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Suponga que a $t = 0$ se tiene $x = x_o$, $y = y_o$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$, $\dfrac{dy}{dt} = v_o$.

Demuestre que las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del punto $P(x, y)$ son

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x) \qquad \begin{aligned} x(0) &= x_o \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} k_i(y_i - y) \qquad \begin{aligned} y(0) &= y_o \\ y'(0) &= y_o \end{aligned}$$

Resuelva entonces estas ecuaciones y concluya que la trayectoria que describe el punto P es la elipse

$$\left(\frac{x - a}{x_o - a}\right)^2 + \left((y - b) + \frac{x - a}{x_o - a}(b - y_o)\right)^2 \frac{k}{v_o^2} = 1$$

donde

$$a = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \qquad b = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} k_i y_i \qquad k = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Sugerencia: una ecuación de la forma

$$\frac{d^2W}{dt^2} + KW = DK \qquad (K \text{ y } D \text{ constantes})$$

es una ecuación lineal de segundo orden. Este tipo de ecuaciones serán estudiadas en el capítulo 4. Por el momento (para resolver el problema) solamente necesita saber que esta ecuación posee por solución general a

$$W(t) = C_1 \operatorname{sen}(K)^{1/2}t + C_2 \cos (K)^{1/2}t + D$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias.

7. Era el 21 de octubre de 1805. Se acercaba la hora del comienzo de la gran batalla naval conocida como Batalla de Trafalgar. Por una parte, el almirante Villenueve contemplaba,

afinando los últimos detalles, su poderosa flota de 33 navíos, mientras que el almirante Nelson hacía lo mismo con su flota de 27 navíos. El almirante Villenueve verificó la hora en su reloj. Faltaban aún 3 horas para dar marcha a su flota, así que mandó pedir otra botella de Borgoña y siguió repasando todos y cada uno de los detalles estratégicos para la batalla. Villenueve reafirmó su hipótesis de que, como era costumbre en las batallas navales de principios del siglo XIX, tanto su flota como la del almirante Nelson navegarían paralelamente disparando sus cañones a discreción. La experiencia en este tipo de batallas permitía disponer a Villenueve de la información acerca de la ''ley de destrucción'' de la flota opuesta: Villenueve sabía que la velocidad de destrucción de una flota era proporcional a la potencia de fuego de la flota opuesta. También sabía que los barcos británicos tenían una potencia de fuego similar a la de sus navíos, de modo que Villenueve confiaba ciegamente en la victoria. Sin embargo, le preocupaba un detalle. ¿Podría cuantificar anticipadamente las pérdidas que tendría en la batalla? Dio un par de sorbos a su vaso con Borgoña y caminó hacia el escritorio. Tomó un papel y un lápiz y escribió algo. Después de 3 líneas tenía la respuesta. Reproduzca lo que Villenueve escribió en esa hoja.

APÉNDICE AL CAPÍTULO 3

LA BRAQUISTÓCRONA

Trataremos aquí con un problema muy interesante para la matemática y para la física, conocido desde el siglo XVII como ''el problema de la braquistócrona'', el cual, además del interés que el mismo problema posee, en cuanto a la herramienta usada para su planteamiento y solución, tiene gran importancia de tipo histórico, ya que podemos decir que este problema abre el estudio de una nueva rama de la matemática: el cálculo de variaciones.

El comienzo: Galileo

No es el momento para hablar de lo que es y lo que representa Galileo para la ciencia. Sin embargo, resulta casi imposible mencionarlo sin hacer al menos un ligero comentario al respecto.

Se puede decir que la importancia que tiene la figura de Galileo para la ciencia descansa en gran parte en el tipo de mentalidad con que aborda los problemas científicos, lo cual representa un cambio radical para la ciencia del siglo XVI. A Galileo le interesa más el *cómo* suceden los fenómenos físicos, que el *por qué* suceden. Por ejemplo, ya Aristóteles había estudiado el *por qué* de la caída de los cuerpos (todos los cuerpos tienden a su lugar natural), sin embargo, Galileo aborda la problemática del *cómo* es que se efectúa la caída de los cuerpos (3a. jornada de sus ''Diálogos Sobre dos Nuevas Ciencias'').

Con Galileo aparecen nuevos ''métodos para pensar y para abordar problemas científicos'', los cuales cobran dimensiones insospechadas para su tiempo, en cuanto a los resultados que obtiene. Basta recordar cómo es que Galileo estudia lo relacionado con la persistencia del movimiento: sus conclusiones se encontraban a un sólo paso de lo que hoy conocemos como la 1a. Ley de Newton (Ley de la inercia).

Quizás gran parte del contenido filosófico de la obra científica de Galileo se encuentra inmerso en su famosa frase:

> La filosofía se halla escrita en aquel amplio libro que tenemos abierto para siempre ante nuestros ojos, me refiero al Universo; pero no puede ser leído hasta que no hayamos aprendido

> el lenguaje y nos hayamos familiarizado con los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya medición es humanamente imposible comprender ni una sola palabra.

Galileo es el iniciador de la problemática relacionada con el braquistócrono. Sabemos que Galileo fue un estudioso del movimiento de los cuerpos por planos inclinados (pues era así como lograba ''congelar'' la aceleración de la gravedad y así poder hacer las mediciones correspondientes a cuerpos cayendo —recuérdese que en ese tiempo no se disponía de buenos instrumentos de medición). También es cierto que Galileo estaba familiarizado con el movimiento de cuerpos por trayectorias circulares (tal como lo es el péndulo), ya que establece resultados como aquel de que los cuerpos cayendo por cuerdas de un círculo llegan al mismo tiempo al punto más bajo de él (Teorema VI. Proposición VI. Jornada 3a. ''Diálogos Sobre dos Nuevas Ciencias''). Obsérvese los elementos que intervienen en el resultado: cuerdas (trayectoria rectilínea: planos inclinados), círculo (trayectoria curvilínea circular: péndulo) Este resultado se ilustra en la figura 1 (ver el ejemplo MEC. 8 de la sección 3.1).

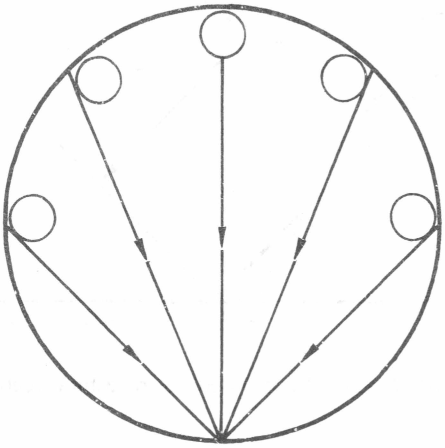


Figura 59. Ejemplo MEC. 8.

Galileo se cuestiona sobre cuál de las trayectorias, la recta o la circular, es en la que un cuerpo tomaría *menos* tiempo en recorrerla, dados dos puntos fijos en ella.

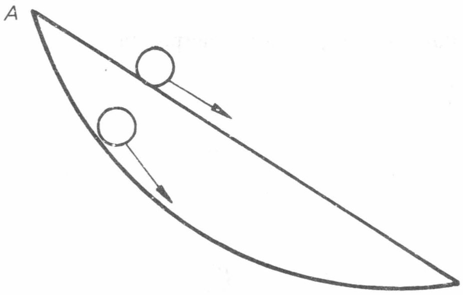


Figura 60. Trayectoria rectilínea y trayectoria circular.

Galileo creía que el cuerpo caería más rápidamente por la trayectoria circular. El objetivo de esta primera sección es validar esta creencia de Galileo.

La trayectoria recta (el plano inclinado)

Tenemos, pues, un cuerpo cayendo por un plano inclinado, sin fricción, desde un punto A hasta un punto B. Fijemos de una vez las coordenadas de estos puntos: tomemos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$.

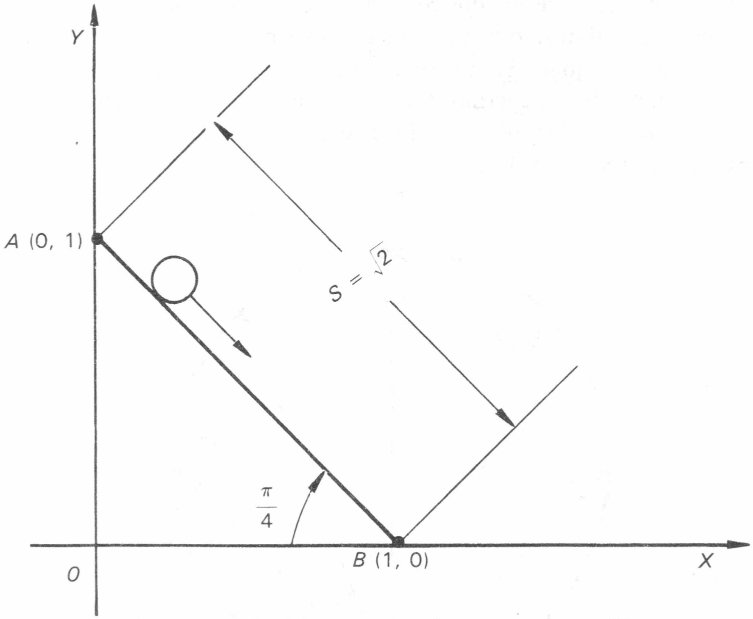


Figura 61. Caída del cuerpo por la trayectoria rectilínea.

Haciendo un diagrama de cuerpo libre tenemos:

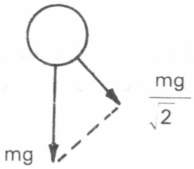


Figura 62. Diagrama de cuerpo libre.

Por lo tanto:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

Obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

Integrando (nuestras condiciones iniciales son $V(0) = 0$, $s(0) = 0$)

$$\int_0^v dV = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\int_0^t dt \right]$$

$$v = \frac{g}{\sqrt{2}} t$$

Integrando nuevamente:

$$\int_0^s ds = \frac{g}{\sqrt{2}} \int_0^t tdt$$

$$s = \frac{g}{2\sqrt{2}} t^2$$

Queremos conocer el tiempo para cuando $s = \sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = \frac{g}{2\sqrt{2}} t^2$$

por lo que:

$$\boxed{t = \frac{2}{\sqrt{g}} \text{ seg}}$$

La trayectoria circular (el péndulo)

Consideremos los mismos puntos A y B unidos por una trayectoria circular

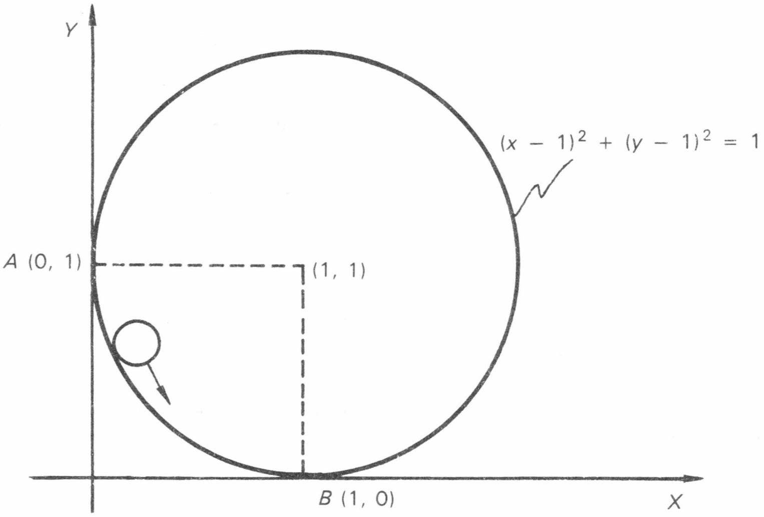


Figura 63. Caída del cuerpo por la trayectoria circular.

Por comodidad hagamos la siguiente traslación del origen de coordenadas:

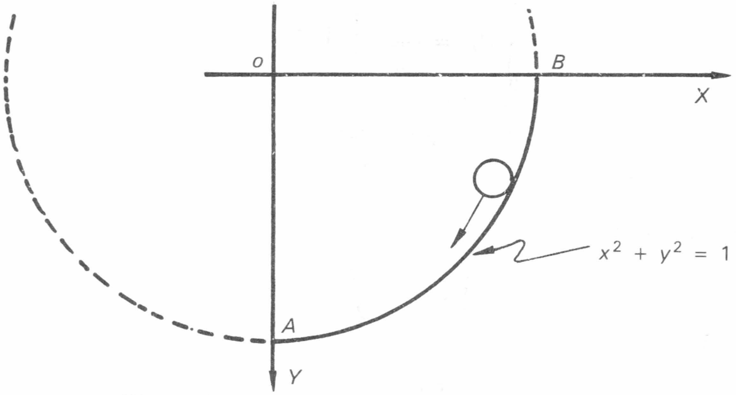


Figura 64. Traslación al origen de coordenadas.

Hagamos un diagrama de cuerpo libre

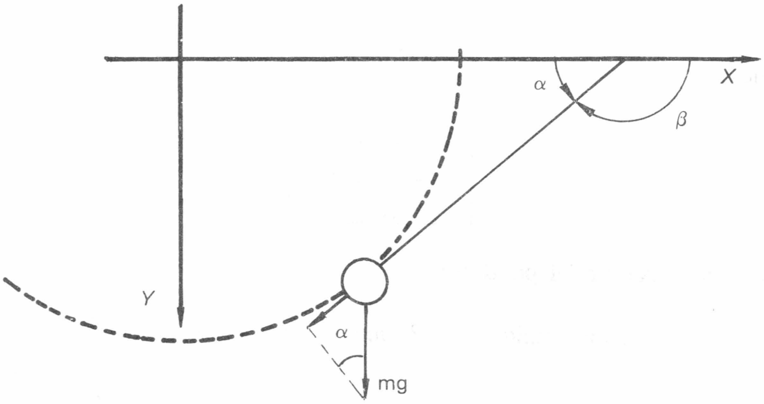


Figura 65. Diagrama de cuerpo libre.

De tal modo que la fuerza con la que el cuerpo se desliza por la circunferencia es mg sen α, o sea

$$m \frac{dv}{dt} = mg \operatorname{sen} \alpha$$

o

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \alpha$$

en donde v es la velocidad tangencial del cuerpo en su recorrido.

Por otra parte:

$$\tan \beta = -\frac{x}{y}$$

o sea:

$$-\tan\alpha = -\frac{x}{y}$$

de donde:

$$\operatorname{sen}\alpha = x$$

por lo que la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{dv}{dt} = gx$$

Para evitar el trabajo con estas 3 variables (v, x, y t) hagamos una parametrización de la siguiente manera:

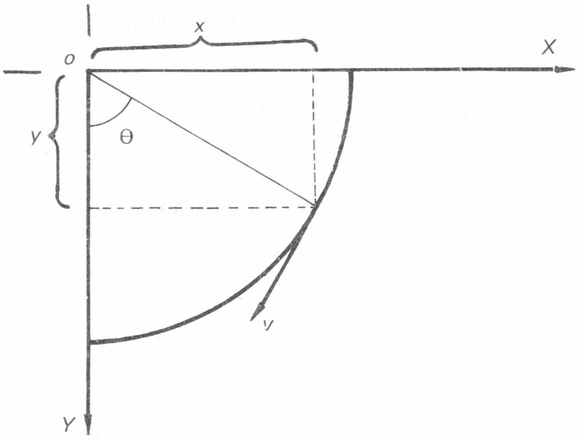


Figura 66. Introducción del parámetro Θ.

de modo que:

$$x = \operatorname{sen}\Theta$$

$$y = \cos\Theta$$

$$v = -\frac{d\,\Theta}{dt}$$

por lo que nuestra ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -g\operatorname{sen}\Theta$$

¡La cual es la ecuación del movimiento de un péndulo! (situación física también muy familiar para Galileo).

Observación:

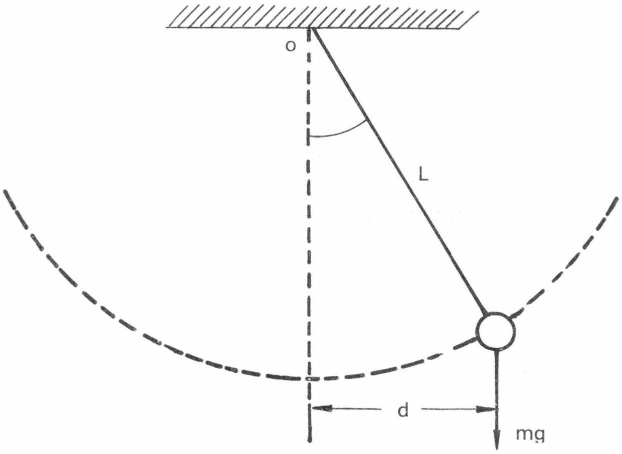


Figura 67. Movimiento pendular.

Suma de momentos respecto de "0" = 0
Momento de inercia + momento de la masa con respecto del pivote 0 = 0.

$$mL^2 \frac{d^2\Theta}{dt^2} + mg\, L \operatorname{sen} \Theta = 0$$

o bien

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \Theta = 0$$

En nuestro caso $L = 1$, que es la ecuación que obtuvimos.

Intentemos* pues resolver esta ecuación (es claro que en este caso sen $\Theta \neq \Theta$, puesto que vamos a considerar Θ desde 0 hasta 90 grados).

En la ecuación diferencial a resolver no aparece la variable independiente t, por lo que se sugiere realizar el cambio de variable.

$$w = \frac{d\,\Theta}{dt}$$

(usamos a propósito la letra w puesto que además ésta representa físicamente la velocidad angular).

Tomamos a w como nueva variable dependiente y a Θ como una nueva variable independiente, por lo que:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\Theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(w) = \frac{d}{d\,\Theta}(w)\,\frac{d\,\Theta}{dt} = w\,\frac{dw}{d\Theta}$$

---

* Como se podrá ver en seguida nos quedaremos en el puro intento.

sustituyendo:

$$w \frac{dw}{d\Theta} = -\ g \text{ sen } \Theta$$

separando las variables

$$wdw = -\text{ sen } \Theta\ d\Theta$$

integrando

$$\int_0^w wdw = -\ g \int_\delta^\Theta \text{sen } \Theta\ d\Theta$$

$$\frac{1}{2} w^2 = g(\cos \Theta - \cos \delta)$$

$$w = \sqrt{2g\ (\cos \Theta - \cos \delta)}$$

Hagamos los cambios:

$$\cos \Theta = 1 - 2 \text{ sen}^2 \left[\frac{\Theta}{2}\right]$$

$$\cos \delta = 1 - 2 \text{ sen}^2 \left[\frac{\delta}{2}\right]$$

queda entonces:

$$w = 2 \sqrt{g(\text{sen}^2 \frac{\delta}{2} - \text{sen}^2 \frac{\Theta}{2})}$$

como $w = \dfrac{d\Theta}{dt}$, tenemos:

$$\frac{d\Theta}{2\sqrt{g(\text{sen}^2 \frac{\delta}{2} - \text{sen}^2 \frac{\Theta}{2})}} = dt$$

Si hacemos el cambio de variable:

$$\text{sen } \frac{\Theta}{2} = k \text{ sen } \Phi$$

donde

$$k = \text{sen } \frac{\delta}{2}$$

de modo que $\Theta = \delta$ corresponde a $\Phi = \dfrac{\pi}{2}$ y $\Theta = 0$ corresponde a $\Phi = 0$

Tenemos:

$$d\Theta = \frac{2k \cos \Phi \; d\Phi}{\cos \dfrac{\Theta}{2}} = \frac{2 \sqrt{k^2 - \text{sen}^2 (\Theta/2)}}{\sqrt{1 - k^2 \; \text{sen}^2 \Phi}} \; d\Phi$$

de modo que:

$$\frac{d\Theta}{2 \sqrt{g \; [k^2 - \text{sen}^2 \dfrac{\Theta}{2}]}} = \frac{\dfrac{2 \sqrt{k^2 - \text{sen}^2 \dfrac{\Theta}{2}}}{\sqrt{1 - k^2 \; \text{sen}^2 \Phi}} \; d\Phi}{2 \sqrt{g \; [k^2 - \text{sen}^2 \dfrac{\Theta}{2}]}} = \frac{d\Phi}{\sqrt{g \; [1 - k^2 \; \text{sen}^2 \Phi]}}$$

por lo que nos queda:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \quad \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2 \; \text{sen}^2 \Phi}} = dt$$

integrando:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2 \; \text{sen}^2 \Phi}} = \int_0^t dt$$

en donde $k = \text{sen} \dfrac{\delta}{2}$. En nuestro caso $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, puesto que el cuerpo recorrerá una cuarta parte del círculo, por lo que $k^2 = 0.5$.
Entonces:

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - 0.5 \; \text{sen}^2 \Phi}}$$

A una integral de la forma

$$\int_0^{\gamma} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2 \; \text{sen}^2 \gamma}}$$

la cual es una función de k y γ se le llama integral elíptica de primera clase.

(Existe también la integral elíptica de segunda clase, que es de la forma:

$$\int_0^{\gamma} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\gamma}\; d\gamma$$

la cual aparece en relación al problema de encontrar la longitud de una elipse).

Estas integrales elípticas no se pueden evaluar en términos de funciones elementales. Sin embargo, debido a que son integrales que llegan a aparecer frecuentemente en problemas importantes, se tienen reportadas tablas con evaluaciones numéricas de ellas, con valores dados de k y γ.

En nuestro caso tenemos:

$$F\,(k,\, \Phi) = F\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{\pi}{2}\right] = 1.854$$

por lo que el tiempo que andábamos buscando es:

$$t = \frac{1.854}{\sqrt{g}}\ \text{seg}$$

¡Galileo tenía razón!

Los Bernoulli

La familia de los Bernoulli aportó mucho a las ciencias exactas: basta abrir algún libro de cálculo para encontrar resultados debidos a ellos. Lo mismo ocurre si abrimos algún libro de ecuaciones diferenciales o de física. Fueron 3 generaciones de la familia las que estuvieron siempre brillando en el firmamento de los matemáticos de los siglos XVII-XVIII.

Uno de ellos, Johann Bernoulli, en 1696 convierte aquel problema que Galileo había ya tratado en uno más general y mucho más interesante: tenemos los puntos A y B de nuestro problema considerado unidos por un alambre, el cual puede tomar *cualquier* forma.

La pregunta ahora es: ¿Qué forma ha de tomar el alambre para que soltando un cuerpo de A caiga por él (sin fricción) y llegue a B en el menor tiempo posible?

Sabemos ya que en el caso particular de que el alambre tome la forma de línea recta y la de circunferencia, el cuerpo tardará menos tiempo si se desliza por esta última trayectoria que si lo hace por la primera. Esta fue la tesis de Galileo que ha sido corroborada con los cálculos de la sección anterior. Sin embargo, ahora el problema cobra dimensiones mucho más fuertes en el sentido de que existen *una infinidad* de formas que el alambre puede adoptar y de ellas *alguna* habrá que haga que el cuerpo tome el menor tiempo posible para efectuar su recorrido.

Éste es el momento en que en la matemática nace el famoso problema de la Braquistócrona (del griego *Brachistos* = el menor y *Cronos* = tiempo). Algo que será sorprendente es que la solución de este problema NO se encuentra en ninguna de las trayectorias consideradas por Galileo.

En esta sección se hará la exposición tanto de la solución que a este problema propone Johann Bernoulli, como la que propone Jakob Bernoulli, con el objeto de que se pueda apreciar el contraste en los métodos de ataque de un mismo problema. En realidad la solución de Johann ha sido mucho más difundida (y por lo tanto es más conocida) que la solución de Jakob, y la razón de esto es muy clara: la solución que propone Johann es "... una obra de arte de orden muy elevado"* tal como podrá apreciarse en seguida.

Sin embargo, el método de ataque de Jakob para resolver este problema también es muy interesante, pues usa en él argumentos infinitesimalistas, los cuales no dejarán nunca de ser objeto de admiración por parte nuestra.

La solución de Johann Bernoulli

Veremos ahora la solución que propone Johann Bernoulli al problema de la Braquistócrona, la cual, como dijimos anteriormente, se trata de una verdadera obra de arte, y es, por lo tanto, algo digno de admiración y reflexión (... solamente Johann Bernoulli la pudo haber planteado así).

Lo que veremos en seguida es un hermoso ejemplo de que en realidad existe una dinámica interna propia dentro de la ciencia, la cual establece interrelaciones entre sus distintas partes (esto, en principio, no es algo evidente). Gran parte de la maravilla que representa la solución de Johann B. es que nos permitirá ver que las ramas "aisladas" de la ciencia pertenecen a un sólo tronco común, y que, por lo tanto, pueden entrar unas en auxilio de otras para lograr objetivos concretos; en nuestro caso, la solución del problema de la braquistócrona.

Comencemos pues por comentar un resultado que aparece en la física (en la óptica, más concretamente), el cual *aparentemente* no tiene relación con nuestro problema.

El problema de la refracción de la luz

En 1654 Pierre de Fermat enuncia un resultado, el cual iba a permitir consolidar los estudios de óptica que se realizaban en su tiempo y además iba a repercutir en toda una serie de estudios de matemáticas que, a posteriori, desembocarían en lo que hoy conocemos como el cálculo de variaciones.

El resultado al cual me refiero es el conocido "principio del mínimo tiempo de Fermat", el cual usaremos para lograr establecer nuestro pretendido resultado de óptica: la ley de Snell.

Es bien sabido que la velocidad de la luz en un medio depende de las características mecánicas del mismo (densidad, viscosidad, etc.). Cuando un rayo luminoso pasa de un medio I de ciertas características mecánicas a un medio II con características mecánicas distintas, ocurre entonces un cambio en su velocidad, el cual se traduce en un cambio de dirección. A este fenómeno se le conoce con el nombre de *refracción* de la luz (figura 68).

---

* George F. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. pp. 49.

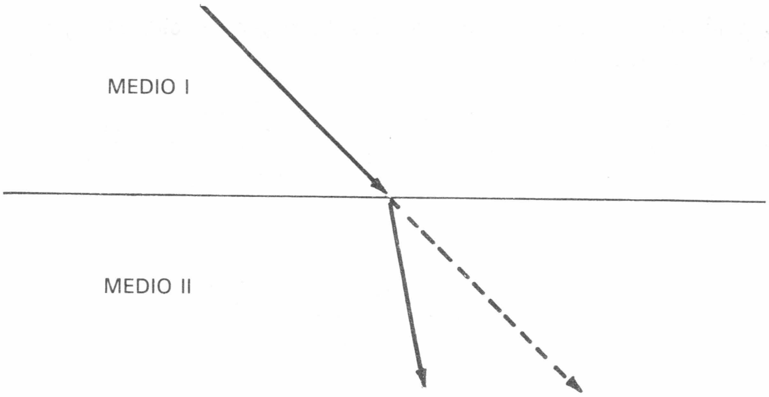


Figura 68. Fenómeno de refracción.

Tomemos dos puntos *M* y *N* por donde pasa el rayo luminoso, pertenecientes a medios distintos. El principio del mínimo tiempo de Fermat establece que la trayectoria que sigue este rayo para ir de *M* a *N* es tal que le toma el *mínimo* tiempo para recorrerla.

Fijemos los puntos *M* y *N*: sea *M* (0, *Ym*) y *N* (*Xn*, *Yn*) (figura 69).

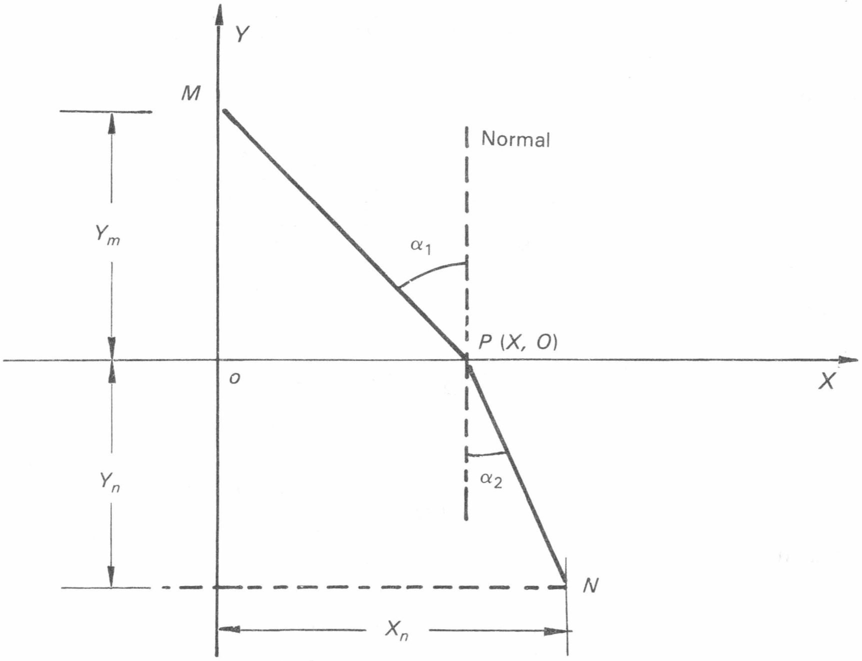


Figura 69. Trayectoria del rayo de *M* a *P*.

A los ángulos α_1 y α_2, los cuales se miden respecto de la normal, se les llama ángulo de incidencia y ángulo de refracción respectivamente. El punto *P* tiene de coordenadas

$(X, 0)$. Suponiendo que el rayo recorre de M a P con una velocidad V_1, y de P a N con una velocidad V_2, tenemos que:

$$\begin{matrix}\text{Tiempo que tarda el} & & \text{Tiempo que tarda} & & \text{Tiempo que tarda}\\ \text{rayo en ir de } M \text{ a } N & = & \text{en ir de } M \text{ a } P & + & \text{en ir de } P \text{ a } N \\ (T) & & (t_1) & & (t_2)\end{matrix}$$

Entonces:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{|\overline{MP}|}{V_1} + \frac{|\overline{PN}|}{V_2}$$

o bien

$$T = \frac{\sqrt{Ym^2 + X^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{Yn^2 + (Xn - X)^2}}{V_2}$$

Es claro que $T = T(X)$. Como T es mínimo, deberá cumplirse la condición de extremo $T'(X) = 0$.

$$\frac{dT}{dX} = \frac{X}{V_1\sqrt{Ym^2 + X^2}} - \frac{Xn - X}{V_2\sqrt{Yn^2 + (Xn - X)^2}} = 0$$

o bien:

$$\frac{\dfrac{X}{\sqrt{Ym^2 + X^2}}}{V_1} = \frac{\dfrac{Xn - X}{\sqrt{Yn^2 + (Xn - X)^2}}}{V_2}$$

Pero:

$$\frac{X}{\sqrt{Ym^2 + X^2}} = \operatorname{sen} \alpha_1$$

$$\frac{Xn - X}{\sqrt{Yn^2 + (Xn - X)^2}} = \operatorname{sen} \alpha_2$$

quedando entonces:

$$\boxed{\frac{\operatorname{Sen} \alpha_1}{V_1} = \frac{\operatorname{Sen} \alpha_2}{V_2}}$$

A este resultado se le conoce como ley de Snell de la refracción de la luz. Este resultado fue establecido por Willebrord Snell en 1621 y se obtuvo de una manera experimental (la presentación que hicimos aquí es una presentación racional del resultado).

El argumento de Johann Bernoulli para resolver el problema de la braquistócrona

Consideremos un medio estratificado, como el que se muestra en la figura 70. Se tendrá entonces que un rayo luminoso tomará el mejor tiempo en ir de A a B, puesto que así lo hace para ir de A a M y también de M a B. Entonces se cumplirá la Ley de Snell en cada uno de los casos.

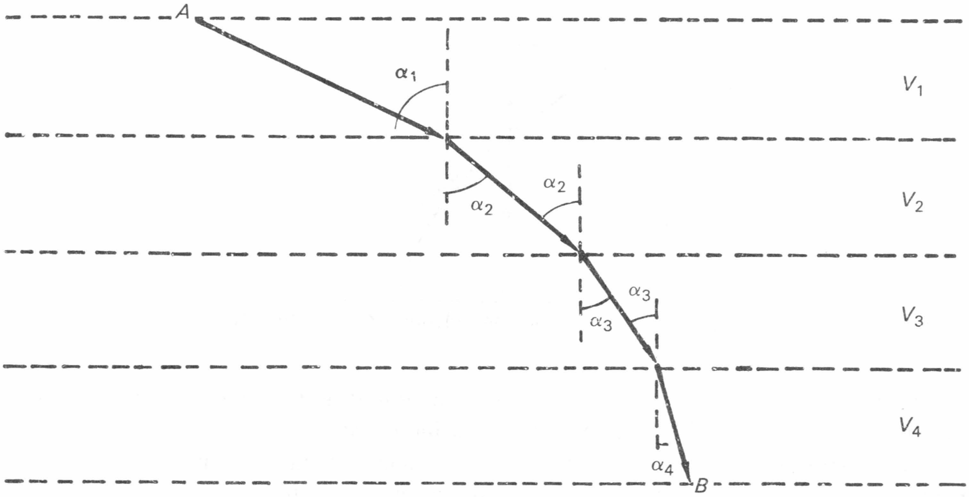


Figura 70. Refracciones sucesivas de un rayo.

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{V_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{V_2} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{V_3} = \frac{\text{sen } \alpha_4}{V_4}$$

donde V_1, V_2, V_3 y V_4 son las velocidades del rayo en cada uno de los estratos del medio.

Veamos qué sucede si aumentamos el número de capas por las que el rayo tiene que pasar (figura 71).

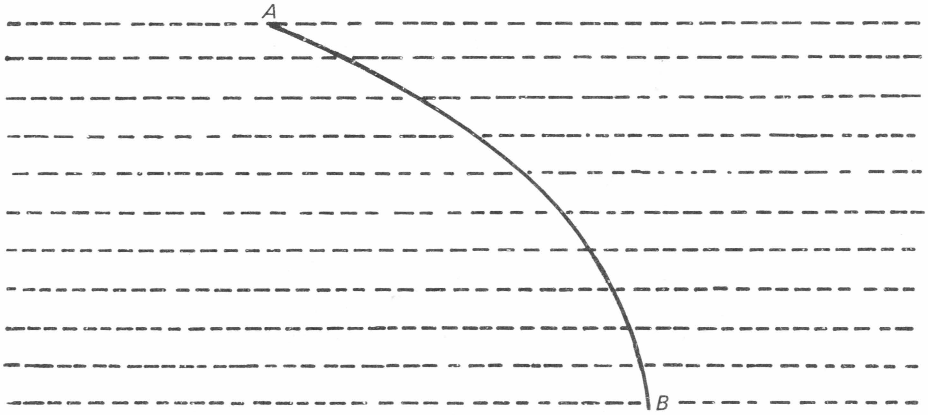


Figura 71. Refracciones del rayo por un número mayor de capas.

Es claro que si hacemos que el número de capas se haga cada vez más y más grande, ocurrirá que el rayo luminoso se refractará más y más veces, de tal modo que *en el límite* (cuando el número de capas tiende al infinito), tendremos que el rayo describirá *una línea curva* y se tendrá además que cumplir que:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{V} = \text{constante}$$

en cada punto de la trayectoria (figura 72).

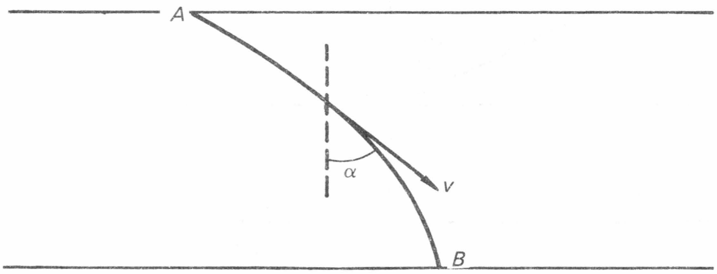


Figura 72. Versión continua de la refracción del rayo (por un número infinito de capas).

Lo interesante de esto es que el rayo tomará *en total el menor tiempo* en ir de A a B, puesto que así lo está haciendo momento a momento.*

Hasta ahora hemos hablado del rayo luminoso que se refracta momento a momento, pero, ¿qué relación tiene esto con nuestro cuerpo que se desliza por la trayectoria que queremos encontrar?

La relación existe en el hecho de que podemos considerar a nuestro cuerpo como un rayo luminoso que cae (que se refracta) en un medio de densidad variable, y, puesto que el rayo luminoso toma *el menor tiempo* para recorrer su trayectoria, pues así mismo lo hará nuestro cuerpo, tal como queríamos que ocurriese. ¡Esta es precisamente la hermosa analogía que hace Johann Bernoulli y que le permite resolver el problema de la braquistócrona!

Tomemos, por comodidad, nuestro sistema de coordenadas como sigue:

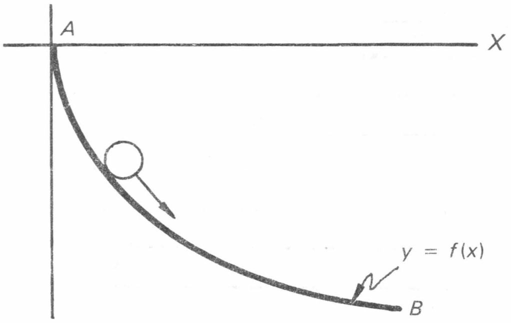


Figura 73. Descenso del cuerpo por la curva $y = f(x)$.

---

* Este fenómeno es el que ocurre cuando un rayo de sol atraviesa la atmósfera terrestre (medio de densidad creciente) hasta llegar a la superficie terrestre.

Sean A y B, respectivamente, los puntos inicial y final de la trayectoria del cuerpo, los cuales están unidos por la curva $Y = f(X)$, *la cual queremos encontrar.*

En la figura 74 se muestra un diagrama de cuerpo libre, donde α sería el "ángulo de refracción de nuestro rayo" en cada punto.

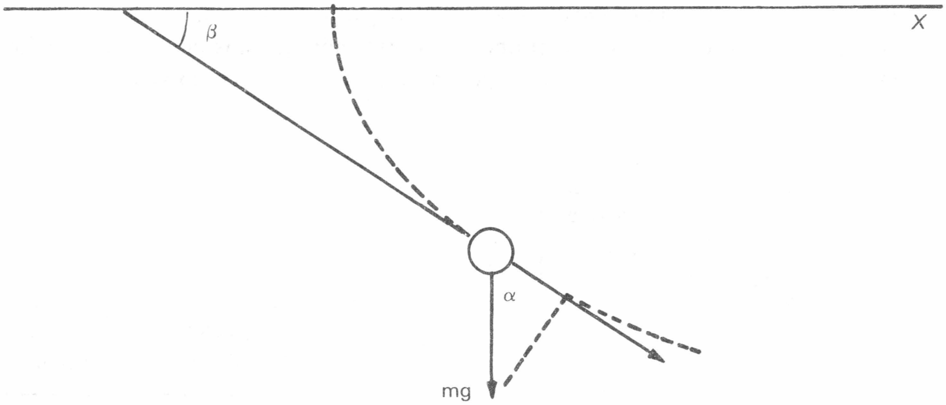


Figura 74. Diagrama de cuerpo libre.

De modo que la ecuación fundamental de nuestro problema es que *se cumpla la Ley de Snell* punto a punto, i.e.

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{V} = C \qquad \text{(constante)}$$

donde V es la velocidad instantánea que lleva el cuerpo al tiempo t, tangencial a la trayectoria.

Pero:

$$\tan\beta = \tan(90 - \alpha) = Y'$$

de donde:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (Y')^2}}$$

Además, como es bien sabido, la velocidad con que llega el cuerpo al punto B *solamente depende de la altura de la cual comenzó a caer*, y para nada depende de la trayectoria que siguió (¿por qué?), teniendo entonces que:

$$V = \sqrt{2gY}$$

De modo, pues, que la ecuación fundamental de nuestro problema es (la que nos involucra a nuestra función incógnita "Y")

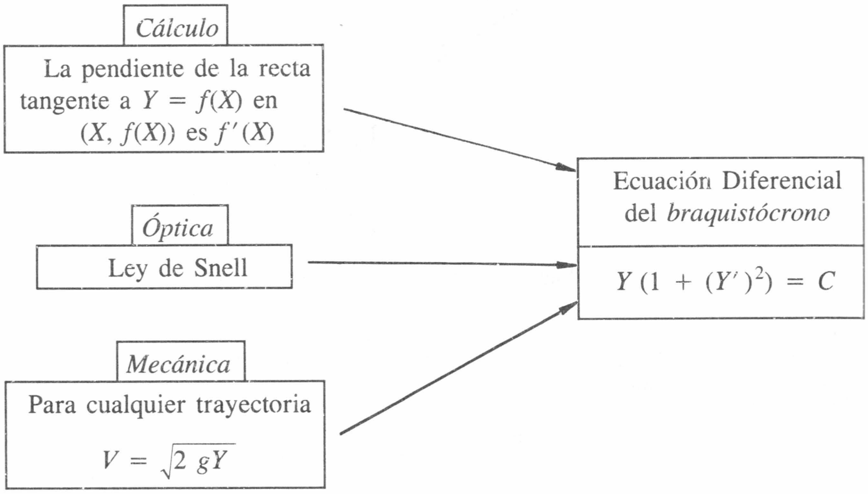
$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{V} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 + (Y')^2}}}{\sqrt{2\,gY}} = C$$

o bien:

$$\boxed{Y\,(1 + (Y')^2) = C}$$

la cual es conocida como la *ecuación diferencial del braquistócrono.*

Es importante hacer hincapié en el tipo de información que nos llevó a la ecuación diferencial del braquistócrono, lo cual lo podemos esquematizar como sigue:


Cálculo
La pendiente de la recta tangente a $Y = f(X)$ en $(X, f(X))$ es $f'(X)$
Óptica
Ley de Snell
Mecánica
Para cualquier trayectoria $V = \sqrt{2\,gY}$
Ecuación Diferencial del braquistócrono
$Y\,(1 + (Y')^2) = C$

Se vuelve a insistir en el aspecto de la interrelación existente entre las diferentes ramas de la ciencia.

Ahora bien, nuestra pregunta en este momento es: ¿cuál es la función ''Y'' que satisface a la ecuación diferencial del braquistócrono?, i.e., ¿cuál es la forma que debe tomar el alambre para que el cuerpo que se desliza por él tome el menor tiempo, partiendo de A y llegando a B?

Esta pregunta la contestaremos *resolviendo* la ecuación diferencial del braquistócrono. Pero antes de esto veamos cómo Jakob Bernoulli plantea esta misma ecuación.

La solución de Jakob Bernoulli

La solución que propone Jakob Bernoulli al problema de la braquistócrona es ciertamente menos espectacular que la que hemos ya visto de su hermano Johann. Sin embargo, es tan digna de admiración como la de Johann, puesto que, como veremos, Jakob conjuga estupendamente bien los instrumentos del análisis infinitesimal (ese ''. . . arte de auxiliarse de las cantidades infinitesimales para encontrar las relaciones existentes entre ciertas cantidades propuestas''*) y también algunos principios físicos sobre la caída de los cuerpos, siendo el resultado final el planteamiento de la ecuación diferencial del braquistócrono.

---

* Lázare Carnot. *Reflexions sur la Metaphysique du Calcul Infinitesimel.*

Comencemos esta sección estableciendo algunos resultados básicos del análisis infinitesimal por una parte, y por otra, de física (caída de los cuerpos), los cuales jugarán un papel muy importante dentro de los argumentos de Jakob para resolver el problema de la braquistócrona.

Postulados del análisis infinitesimal (L'Hôpital)

Se van a enunciar los dos postulados que aparecen al comienzo de la obra del Marqués de L'Hôpital *Análisis de los Infinitamente Pequeños*, los cuales constituyen la base del desarrollo posterior de la misma. Se hace así puesto que estos postulados son usados, como tales, dentro de la argumentación de Jakob que veremos posteriormente (recuérdese que los Bernoulli —Johann y Jakob— fueron contemporáneos y conocidos por L'Hôpital). Transcribo la parte correspondiente a la obra de L'Hôpital:*

> Postulado 1. . . . se pide que se pueda tomar indiferentemente la una por la otra de dos cantidades que no difieran entre ellas más que por una cantidad infinitamente pequeña. . .
>
> Postulado 2. . . . se pide que una línea curva pueda ser considerada como la unión de un número infinito de líneas rectas, cada una de ellas infinitamente pequeña. . .

Algunos resultados sobre la caída de los cuerpos

Son dos resultados sobre el fenómeno de la caída de los cuerpos los que Jakob usa en su argumentación y que se enuncian y se prueban en seguida, pues es necesario tenerlos presentes para no "perderse" cuando veamos los detalles de dicha argumentación.

Resultado 1. Consideremos dos cuerpos cayendo, uno de ellos por la trayectoria *MP* (vertical) y el otro por la trayectoria *MQ* (inclinada), tal como se muestra en la siguiente figura.

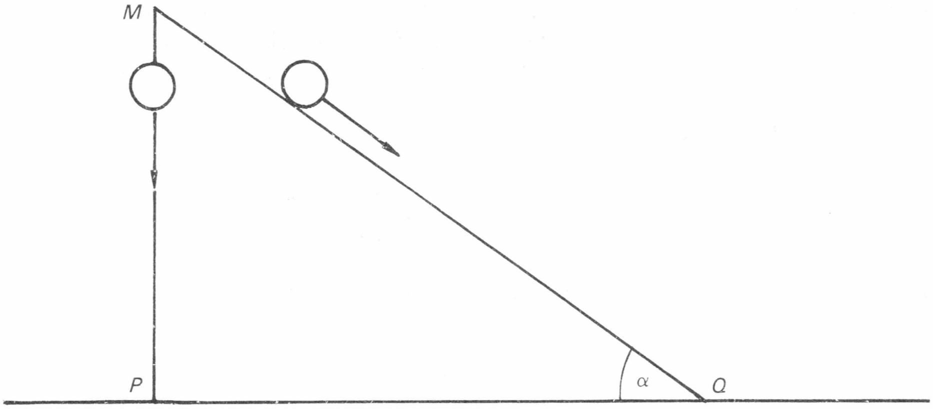


Figura 75. Resultado 1.

---

* *Analyse des Infiniment Petits.* Primera parte: Cálculo de diferencias. pp. 1, 2 y 3.

Si los dos cuerpos parten con la misma velocidad de M, entonces deberá cumplirse que:

$$\frac{t_{MP}}{t_{MQ}} = \frac{|\overline{MP}|}{|\overline{MQ}|}$$

donde t_{MP} es el tiempo que tarda el cuerpo en ir de M a P y t_{MQ} es el tiempo que tarda en ir de M a Q.

Prueba: sea Vo la velocidad inicial con que parten los cuerpos de M en $t = 0$.

Para el cuerpo que va de M a P tenemos:

$$|\overline{MP}| = Vo\ t_{MP} + \frac{1}{2}\ g\ t_{MP}^2$$

Mientras que para el cuerpo que va de M a Q:

$$|\overline{MQ}| = Vo\ t_{MQ} + \frac{1}{2}\ (g \text{ sen } \alpha)\ t_{MQ}^2$$

$$= Vo\ t_{MQ} + \frac{1}{2}\ g\ \frac{|\overline{MP}|}{|\overline{MQ}|} t_{MQ}^2$$

Entonces:

$$t_{MP} = \frac{-\ Vo + \sqrt{Vo^2 + 2g\ (\overline{MP})}}{g}$$

$$t_{MQ} = \frac{-\ Vo + \sqrt{Vo^2 + 2g\ (MP)}}{g\ \dfrac{|\overline{MP}|}{|\overline{MQ}|}}$$

de modo que:

$$\frac{t_{MP}}{t_{MQ}} = \frac{|\overline{MP}|}{|\overline{MQ}|}$$

como se quería probar.

Resultado 2. Consideremos un cuerpo cayendo verticalmente a partir de M (ver figura) sin velocidad inicial. Sean P, Q y R puntos de la trayectoria del cuerpo los cuales se encuentran infinitamente cerca uno de otro, tales que $|\overline{PQ}| = |\overline{QR}|$.

Entonces deberá cumplirse que:

$$\frac{t_{PQ}}{t_{QR}} = \sqrt{\frac{|\overline{MQ}|}{|\overline{MP}|}}$$

Prueba: llamemos V_1 la velocidad que lleva el cuerpo al pasar por P y V_2 la velocidad que lleva al pasar por Q. Es decir

$$V_1 = \sqrt{2g\ (\ |\overline{MP}|\ )}$$

$$V_2 = \sqrt{2g\ (\ |\overline{MQ}|\ )}$$

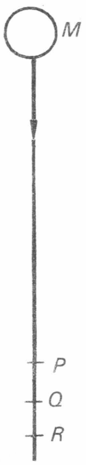


Figura 76. Resultado 2.

Razonaremos al estilo de Galileo en sus *Diálogos sobre dos Nuevas Ciencias*: Los puntos P, Q y R están infinitamente cerca, de modo que podemos asumir que en el transcurso de P a Q el cuerpo *no cambia* su velocidad (se mantiene constante en V_1), ocurriendo lo mismo de Q a R (manteniéndose constante en V_2), por lo que:

$$t_{PQ} = \frac{|\overline{PQ}|}{V_1}$$

$$t_{QR} = \frac{|\overline{QR}|}{V_2}$$

Entonces:

$$\frac{t_{PQ}}{t_{QR}} = \frac{V_2}{V_1}$$

puesto que:

$$|\overline{PQ}| = |\overline{QR}|$$

Por lo tanto:

$$\frac{t_{PQ}}{t_{QR}} = \sqrt{\frac{|\overline{MQ}|}{|\overline{MP}|}}$$

que era lo que se quería probar.

El argumento de Jakob Bernoulli para resolver el problema de la braquistócrona

Comencemos por plantear el lema fundamental sobre el cual Jakob basa su argumentación:

Lema. Sea *ACDB* la curva por la cual un cuerpo cae de *A* a *B* en el menor tiempo, y sean *C* y *D* dos puntos de dicha curva, tan cerca uno de otro como queramos. Entonces el arco *CD* es, de entre todos los arcos que tienen a *C* y a *D* como puntos extremos, el que hace que el cuerpo, cayendo de *A*, lo atraviese en el menor tiempo posible.

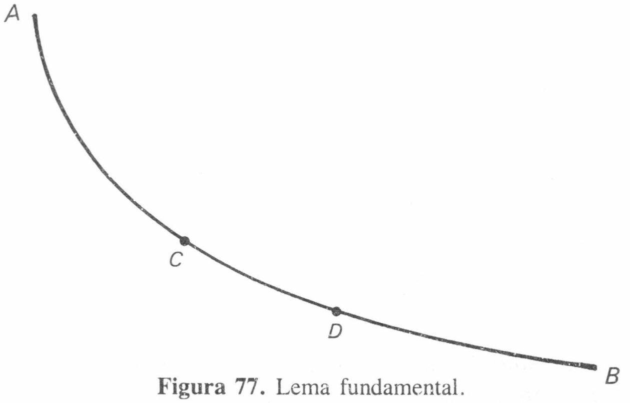


Figura 77. Lema fundamental.

En otras palabras, Jakob establece que si la curva *AB* es la que tiene la propiedad de la braquistócrona, entonces esta propiedad *se conserva en cualquier porción que consideremos de dicha curva* (aún cuando la porción que consideremos sea infinitamente pequeña) cayendo el cuerpo a partir de *A*.

Consideremos la curva *ACB* que es la que hace que un cuerpo cayendo de *A* hacia *B* lo haga en el menor tiempo posible (esta es la curva que queremos encontrar).

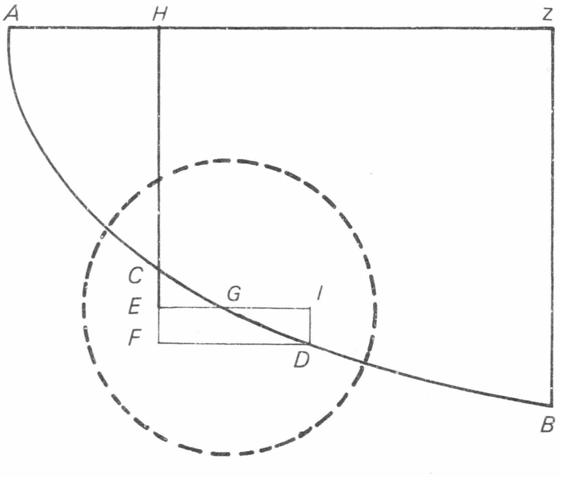


Figura 78. Planteamiento de la solución de Jakob Bernoulli.

Sean *C* y *D* dos puntos de esta curva *infinitamente cerca* uno del otro. Dibujemos la horizontal *AHZ* y la vertical *ZB*. Construyamos también la vertical *CH* y tomemos *DF* normal a ella. Tomemos el punto E que se encuentra en el punto medio del segmento CF y completemos el paralelogramo $EFDI$.

El planteamiento del problema de la braquistócrona que hace Jakob es como sigue: debemos encontrar, en EI, el punto G tal que el tiempo que toma el cuerpo (que viene cayendo de A) en recorrer CG más el tiempo que toma en recorrer GD sea *el menor posible.*

Es decir, queremos localizar en EI a G tal que:

$$t_{CG} + t_{GD}$$

sea mínimo.

Hagamos una amplificación de la parte encerrada en un círculo en la figura 78, con un microscopio infinitesimalista de 1er. orden (con este microscopio podemos *ver* los puntos que están infinitamente cerca uno de otro).

Obsérvese además que según el postulado 2 que se enunció en relación al análisis infinitesimal tenemos que CG *no* es un arco de la curva, sino una *línea recta* (infinitamente pequeña), ocurriendo lo mismo con GD.

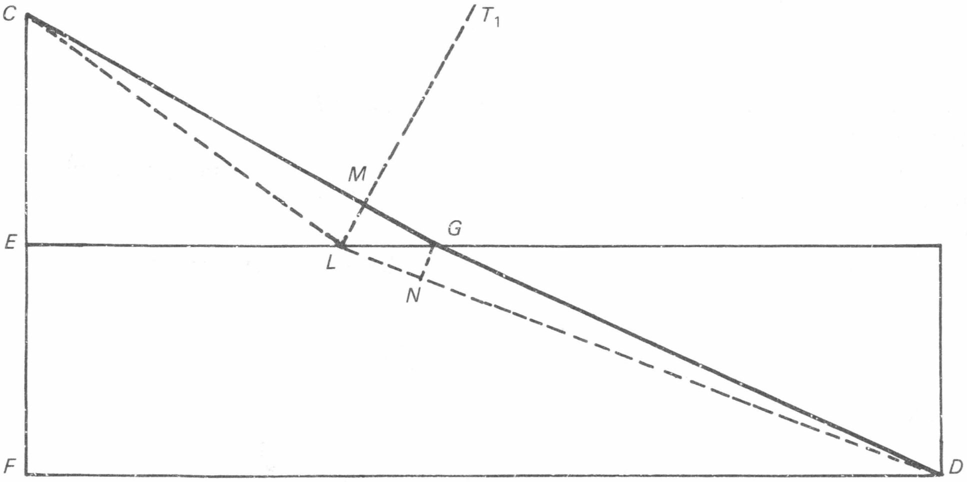


Figura 79. Nueva aproximación infinitesimal de la figura 78.

Ahora procedamos a ver la figura 78 con un nuevo microscopio infinitesimalista (el cual nos permitirá *ver* puntos infinitamente cerca de aquellos que de por sí están infinitamente cerca uno de otro) y marquemos el punto L sobre EI de tal modo que GL es infinitamente más pequeño que EG (i.e. L está infinitamente cerca de G, pero no así de E). Unimos ahora C con L y L con D.

Ahora bien, como G y L son puntos infinitamente cerca uno de otro, ocurrirá que el tiempo que tarda el cuerpo en ir de C a D, pasando por G (i.e. $t_{CG} + t_{GD}$) diferirá del tiempo que tarda el cuerpo en ir de C a D, pasando por L (i.e. $t_{CL} + t_{LD}$) en una cantidad infinitamente pequeña, de tal forma que el postulado 1 de L'Hôpital nos permite escribir:

$$t_{CL} + t_{LD} = t_{CG} + t_{GD}$$

Tenemos entonces que:

$$t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD}$$

Por otra parte, según el resultado 1 acerca de la caída de los cuerpos que establecimos anteriormente, podemos escribir:

$$\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CG}|} = \frac{t_{CE}}{t_{CG}}$$

y

$$\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CL}|} = \frac{t_{CE}}{t_{CL}}$$

Restando estas dos últimas expresiones nos queda:

$$\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CG}| - |\overline{CL}|} = \frac{t_{CE}}{t_{CG} - t_{CL}}$$

Construyamos ahora un círculo con centro en *C* y radio *CL*, localizando así sobre *CG* el punto *M*.

Entonces, debido a que *L* y *M* son puntos infinitamente cerca sobre este círculo, la recta T_1 será la tangente al círculo trazado, en *L* (ó en *M*), de modo que el ángulo *LMG* es recto.

Tenemos entonces que los triángulos *MGL* y *CGE* son semejantes, por lo que:

$$\frac{|\overline{CG}|}{|\overline{GL}|} = \frac{|\overline{EG}|}{|\overline{MG}|}$$

lo cual podemos escribir como:

$$\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{GL}|} = \frac{|\overline{EG}|}{|\overline{CG}|} \cdot \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{MG}|}$$

pero $|\overline{MG}| = |\overline{CG}| - |\overline{CL}|$, entonces:

$$\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{GL}|} = \frac{|\overline{EG}| \times t_{CE}}{|\overline{CG}| \times (t_{CG} - t_{CL})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(H)}$$

Hagamos un razonamiento similar en la parte inferior de la figura 79. Obtenemos los siguientes resultados:

$$\frac{|\overline{EF}|}{|\overline{GD}|} = \frac{t_{EF}}{t_{GD}}$$

$$\frac{|\overline{EF}|}{|\overline{LD}|} = \frac{t_{EF}}{t_{LD}}$$

restando:

$$\frac{|\overline{EF}|}{|\overline{LD}| - |\overline{GD}|} = \frac{t_{EF}}{t_{LD} - t_{GD}}$$

Construyendo ahora un círculo con centro en *D* y radio *DG*, localizando así sobre *LD* el punto *I*, y debido a la semejanza de los triángulos *LNG* y *GID*, tenemos:

$$\frac{|\overline{LN}|}{|\overline{LD}|} = \frac{|\overline{GI}|}{|\overline{GD}|}$$

y entonces:

$$\frac{|\overline{EF}|}{|\overline{LG}|} = \frac{|\overline{GI}| \times t_{EF}}{|\overline{GD}| \times (t_{LD} - t_{GD})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(I)}$$

Los primeros miembros de (**H**) e (**I**) son iguales, puesto $|\overline{CE}| = |\overline{EF}|$, de modo que:

$$\frac{|\overline{EG}| \times t_{CE}}{|\overline{CG}| \times (t_{CG} - t_{CL})} = \frac{|\overline{GI}| \times t_{EF}}{|\overline{GD}| \times (t_{LD} - t_{GD})} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{GD}|}\,{}^{*}$$

Ahora bien, según el resultado 2 sobre la caída de los cuerpos establecido anteriormente tenemos que:

$$\frac{t_{CE}}{t_{EF}} = \sqrt{\frac{|\overline{HE}|}{|\overline{HC}|}}$$

Relación que podemos escribir como:

$$\frac{|\overline{EG}| \times t_{CE}}{|\overline{GI}| \times t_{EF}} = \frac{\dfrac{|\overline{EG}|}{\sqrt{|\overline{HC}|}}}{\dfrac{|\overline{GI}|}{\sqrt{|\overline{HE}|}}}$$

de tal modo que podemos establecer que:

$$\boxed{\frac{\dfrac{|\overline{EG}|}{\sqrt{|\overline{HC}|}}}{\dfrac{|\overline{GI}|}{\sqrt{|\overline{HE}|}}} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{GD}|}}$$

---

* Puesto que $t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD}$.

Este es el ''resultado cumbre'' al que llega Jakob Bernoulli, el cual le permite establecer la ecuación diferencial del braquistócrono. Basta con leer de una manera adecuada dicho resultado y podremos entonces describir las propiedades geométricas de la curva que andamos buscando:

Observemos que $|\overline{CG}|$ y $|\overline{GD}|$ son ''elementos de la curva'' $|\overline{EG}|$ y $|\overline{GI}|$ son ''elementos de la abscisa'' y $|\overline{HC}|$ y $|\overline{HE}|$ son ''elementos de la ordenada'', por lo que la curva que andamos buscando debe ser tal que. . .

> ''. . . los elementos de la curva son directamente proporcionales a los elementos de la abscisa e indirectamente (inversamente) proporcionales a las raíces cuadradas de los elementos de las ordenadas. . .''*

Vamos a interpretar este resultado poniendo la curva en un sistema de coordenadas como sigue:

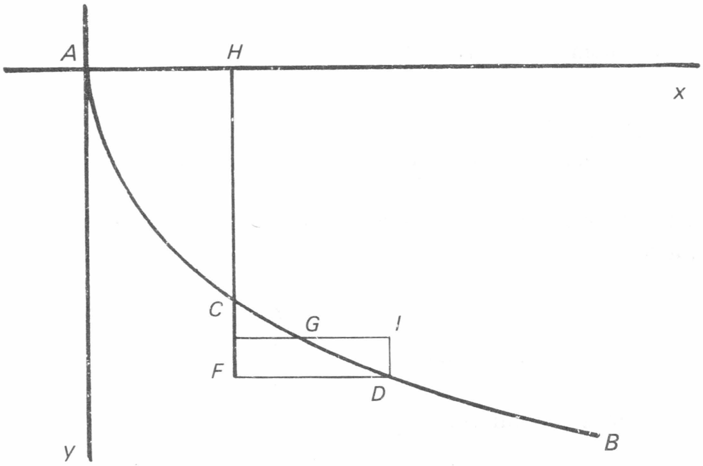


Figura 80. Interpretación del resultado de Jakob Bernoulli.

Tenemos entonces:

Nomenclatura de Jakob	*Correspondiente a (en la curva)*	*En nomenclatura moderna (figura)*
Elemento de la curva	$\|\overline{CG}\|$ $\|\overline{GD}\|$	$dS = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ diferencial de arco
Elementos de la abscisa	$\|\overline{EG}\|$ $\|\overline{GI}\|$	dx
Elementos de la ordenada	$\|\overline{HC}\|$	y
	$\|\overline{HE}\|$	$y + dy$

---

* Para decirlo con las propias palabras de Jakob.

Por lo tanto, la curva buscada es tal que:

$$d\,S = \frac{C_1\,dx}{\sqrt{y}}$$

donde C_1 es una constante de proporcionalidad.

Esta ecuación la podemos reescribir como:

$$d\,S = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \frac{C_1\,dx}{\sqrt{y}}$$

o bien:

$$\boxed{y\,(1 + (y')^2) = C} \qquad (C = C_1{}^2)$$

¡que es la ecuación diferencial de la braquistócrona!

Solución de la ecuación diferencial de la braquistócrona

En seguida se hará la exposición de los ‘‘detalles técnicos’’ necesarios para lograr establecer la ecuación de la curva que satisface a la ecuación diferencial de la braquistócrona.

Despejamos ‘‘y’’ de la ecuación diferencial. Nos queda:

$$y = \frac{C}{1 + (y')^2}$$

haciendo $y' = p$, tenemos que $dy = pdx$ y también

$$y = \frac{C}{1 + p^2}$$

de donde:

$$dy = -\frac{2Cp}{(1 + p^2)^2}\,dp$$

entonces:

$$pdx = -\frac{2Cp}{(1 + p^2)^2}\,dp$$

o bien

$$x = -\,2C\int \frac{dp}{(1 + p^2)^2} + K$$

Resolviendo esta integral:

$$x = -2C\left[\frac{1}{2}\frac{p}{1+p^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,cot} p\right] + K$$

$$= C\left[\operatorname{arc\,cot} p - \frac{p}{1+p^2}\right] + K$$

Si hacemos:

$$T = 2 \operatorname{arc\,cot} p$$

o

$$p = \cot\frac{T}{2}$$

tenemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\cos\frac{T}{2} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

también:

$$\frac{p}{1+p^2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} T$$

y

$$\frac{1}{1+p^2} = \operatorname{sen}^2\frac{T}{2}$$

por lo que:

$$y = \frac{C}{1+p^2} = C\operatorname{sen}^2\frac{T}{2} = \frac{C}{2}(1 - \cos T)$$

$$x = C\left[\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} T\right] + K$$

$$= \frac{C}{2}(T - \operatorname{sen} T) + K$$

Si llamamos $a = \dfrac{C}{2}$ nos quedaría:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\,(T - \operatorname{sen} T) + K \\ y &= a\,(1 - \cos T) \end{aligned}}$$

Hemos obtenido la solución de la ecuación diferencial del braquistócrono en forma paramétrica. Estas ecuaciones nos representan una familia de curvas llamadas *cicloides*. Si pedimos además que $y\,(0) = 0$, obtenemos la familia de cicloides.

$$x = a\,(T - \operatorname{sen} T)$$

$$y = a\,(1 - \cos T)$$

que son del tipo mostrado en la figura 81.

La cicloide es la curva que se obtiene del movimiento de un punto fijo sobre una circunferencia, cuando ésta gira, sin deslizarse, por una recta fija (digamos el eje x).

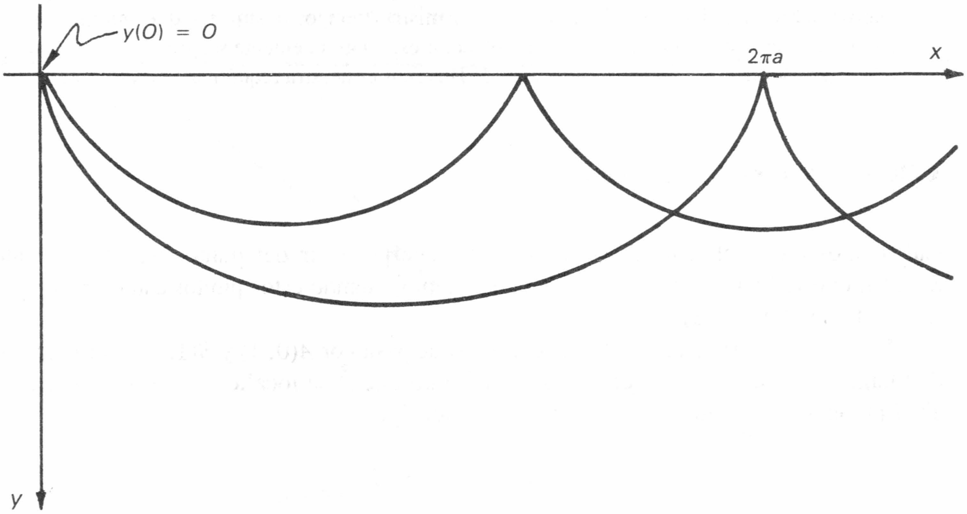


Figura 81. Familia de cicloides.

Esta curva, además de ser por la cual tiene que caer un cuerpo para lograr el mínimo tiempo de descenso dados dos puntos de su trayectoria, es decir, además de tener la propiedad del braquistocronismo, posee otra propiedad muy interesante: si soltamos cuerpos de distintas partes de ella, a un mismo tiempo, todos llegarán al punto más bajo de la trayectoria usando para ello *el mismo tiempo* de descenso (propiedad del tautocronismo —del griego *Tautos* = el mismo, *Cronos* = tiempo). Se invita al lector a probar este resultado.

De hecho, desde antes de que se resolviera el problema de la braquistócrona, se conocía ya la propiedad del tautocronismo de la cicloide. Johann Bernoulli comenta en la carta en la que reporta su solución al problema de la braquistócrona:

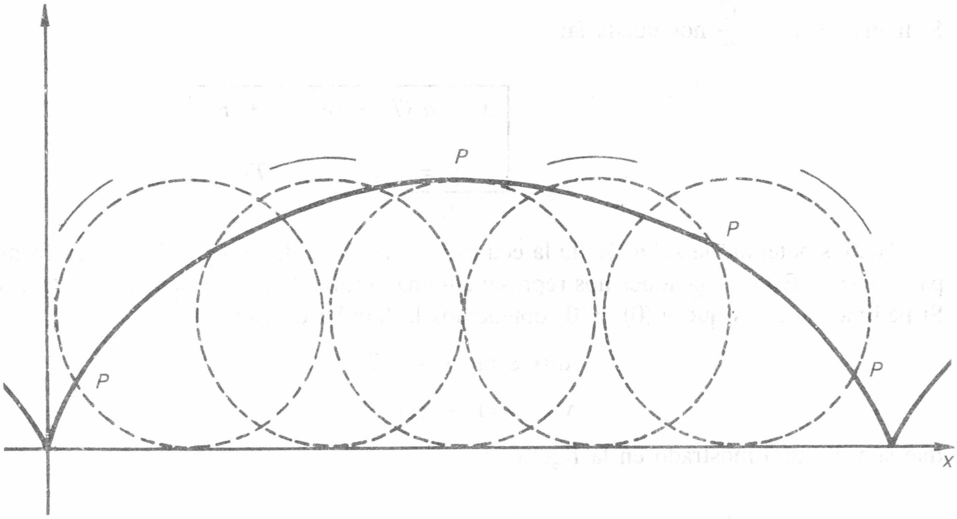


Figura 82. Movimiento del punto P que genera una cicloide.

> "... tenemos justa admiración por Huygens, porque él fue el primero en descubrir que un cuerpo sobre una cicloide ordinaria cae en el mismo tiempo, cualquiera que sea la posición de la cual comienza el movimiento. Pero el lector estará grandemente sorprendido cuando diga que exactamente esta cicloide o tautócrona de Huygens es nuestra requerida braquistócrona. . ."

Cálculo del tiempo de descenso

Calculemos ahora el tiempo que tardaría un cuerpo en ir del punto $A(0, 1)$ al punto $B(1, 0)$, que ya habíamos fijado desde un principio, cuando estos puntos están unidos por una cicloide (figura 83).

Veamos primeramente cuál es la cicloide que pasa por $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$. Por comodidad hagamos el cambio de coordenadas de modo que A se localice en $(0, 0)$ y B en $(1, 1)$. Entonces la cicloide que buscamos será del tipo.

$$x = a\,(T - \operatorname{sen} T)$$

$$y = a\,(1 - \cos T)$$

De $x = y = 0$ obtenemos $T = 0$, y de $x = y = 1$ obtenemos $T = 2.412$ (se resolvió numéricamente la ecuación $T + \cos T - \operatorname{sen} T - 1 = 0$), de modo que:

$$a = \frac{1}{1 - \cos\,(2.412)} = 0.573$$

Así que la cicloide que necesitamos considerar es:

$$x = 0.573\,(T - \operatorname{sen} T)$$

$$y = 0.573\,(1 - \cos T)$$

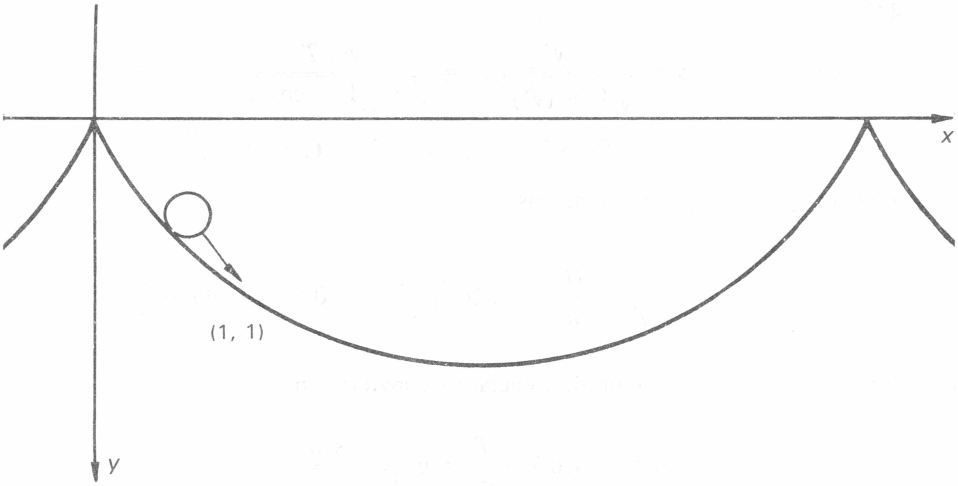


Figura 83. Cicloide que pasa por el origen y por el punto (1, 1).

Haciendo un diagrama de cuerpo libre:

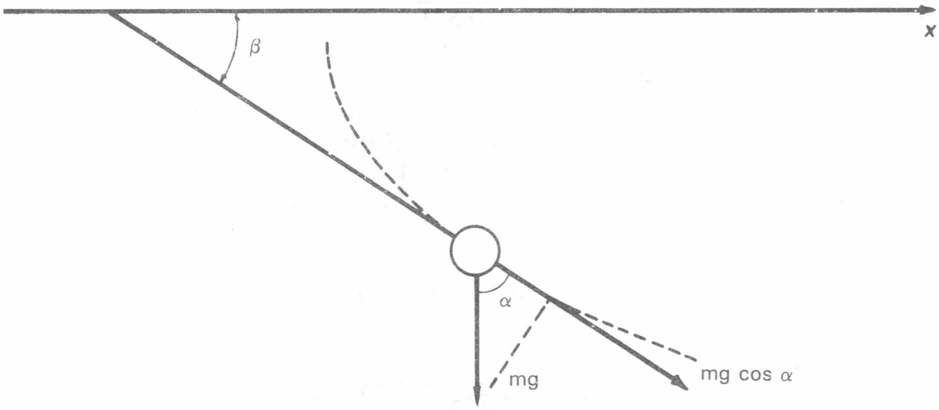


Figura 84. Diagrama de cuerpo libre.

de modo que:

$$m \frac{dV}{dt} = \text{mg} \cos \alpha$$

o bien:

$$\frac{dV}{dt} = g \cos \alpha$$

pero:

$$\tan \beta = y' = \frac{\text{sen } T}{1 - \cos T}$$

o sea que:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{\operatorname{sen} T}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos T}}$$

Si recordamos que $V = \sqrt{2\,gy}$, tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = \sqrt{2g}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (0.573) \operatorname{sen} T \frac{dT}{dt}$$

de tal forma que nuestra ecuación diferencial se convierte en:

$$\sqrt{2g}\quad \frac{1}{2\sqrt{y}} (0.573) \operatorname{sen} T \frac{dT}{dt} = g\,\frac{\operatorname{sen} T}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos T}}$$

o bien, como $y = 0.573\ (1 - \cos T)$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{0.573}}$$

por lo que el tiempo que buscamos es

$$t = \frac{\sqrt{0.573}}{\sqrt{g}} \int_0^{2.412} dT$$

$$t = \frac{\sqrt{0.573}\quad (2.412)}{\sqrt{g}}$$

$$\boxed{t = \frac{1.8257}{\sqrt{g}}\ \text{seg}}$$

¡Efectivamente por la cicloide el cuerpo cae más rápidamente que por la recta

$$(t = \frac{2}{\sqrt{g}}\ \text{seg})$$

y que por la circunferencia

$$(t = \frac{1.854}{\sqrt{g}}\ \text{seg})!$$

CAPÍTULO 4

Ecuaciones lineales de orden *n*

En este capítulo nos proponemos estudiar ecuaciones diferenciales lineales de orden n, que son ecuaciones del tipo

$$y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R(x) \qquad \textbf{(A)}$$

donde $P_1, \ldots, P_n, R\colon I \to \mathbb{R}$ son ciertas funciones de la variable x, definidas en algún intervalo I.

Este tipo de ecuaciones desempeñan un papel muy importante dentro de la teoría de las ecuaciones diferenciales, debido a que surgen en el estudio de muchos fenómenos físicos de interés, como son los llamados fenómenos de vibraciones.

Además, la teoría matemática que se puede hacer con este tipo de ecuaciones es sumamente rica en ideas y resultados.

En el presente capítulo se hará una exposición bastante modesta de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden n, concentrándonos solamente en aquellos resultados que nos permitan, en un corto plazo, obtener información de las soluciones de la ecuación.

Para ejemplificar el tipo de problemas que nos conducen al estudio de ecuaciones lineales, consideremos el sistema masa-resorte, formado por un resorte fijo en una de sus extremidades y una masa pendiente de la otra.

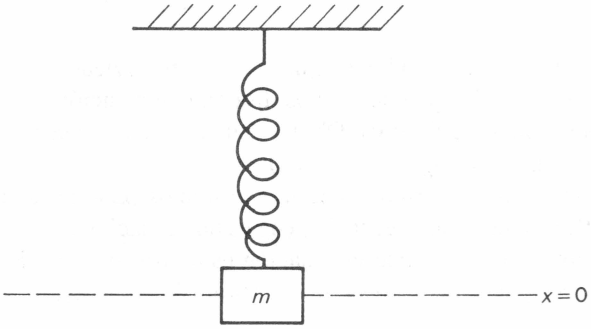


Figura 1. Sistema masa-resorte.

Llamemos $x = 0$ a la posición de equilibrio de la masa. Si desplazamos la masa en una distancia x_o de su posición de equilibrio y a $t = 0$ la soltamos, debido a la acción de las fuerzas restitutivas del resorte comenzará un movimiento oscilatorio de la masa m. Se trata entonces de describir el movimiento resultante.

Tenemos entonces la siguiente situación

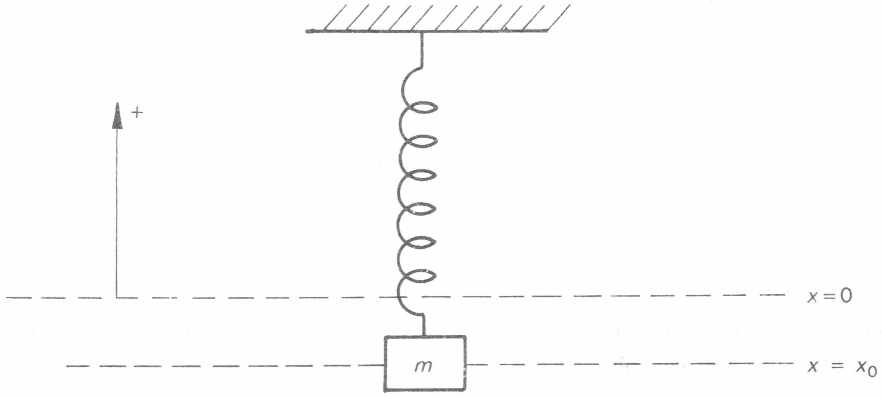


Figura 2. Dirección de positividad de los desplazamientos de la masa *m*.

Tomando como dirección de positividad de las magnitudes vectoriales que aparecen, la dirección de positividad canónica del eje y, tenemos que, según la Ley de Hooke

$$F = -kx$$

donde F denota la fuerza restitutiva del resorte, x es el desplazamiento de la masa m (la distancia a la que se encuentra el cuerpo de su posición de equilibrio) y k es una constante de proporcionalidad (positiva) que depende de las características físicas del resorte. El signo negativo es para enfatizar que F y x siempre están en direcciones contrarias.

Entonces, si x es el desplazamiento del cuerpo a un tiempo t, tenemos que

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k x = 0$$

es la ecuación diferencial del movimiento del cuerpo (resolviéndola, obtendremos la función $x = x(t)$ que, a un tiempo dado t, nos dirá en qué posición se encuentra el cuerpo respecto de su posición de equilibrio). Observe ademas que se tienen las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = -x_o$ y $x'(0) = 0$.

Introduzcamos ahora la terminología que usaremos para ecuaciones del tipo (**A**).

Si $R(x) \equiv 0$, diremos que la ecuación (**A**) es una ecuación (lineal de orden n) *homogénea*. Caso contrario diremos que la ecuación es *no homogénea*. Hablaremos también de la ecuación *homogénea asociada* a la ecuación (A), que será

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0$$

A las funciones $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ se les llama *coeficientes* de la ecuación (**A**). Si estas funciones son funciones constantes, diremos entonces que (**A**) es una *ecuación* (lineal de orden n) *con coeficientes constantes*, en caso contrario diremos que es una ecuación con *coeficientes variables*.

Así, por ejemplo, la ecuación resultante del estudio del movimiento del sistema masa-resorte, presentado anteriormente, es una ecuación lineal de 2o. orden homogénea con coeficientes constantes.

Cuando estudiamos, en el capítulo 2, ecuaciones lineales de orden 1, obtuvimos una *fórmula* para la solución general de esta ecuación. Desgraciadamente esto no puede hacerse en ecuaciones lineales de orden n. Sin embargo, sí podemos decir bajo qué condiciones podemos hablar de existencia (y unicidad) de soluciones para la ecuación (**A**).

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA ECUACIONES LINEALES DE ORDEN *n*

Sea la ecuación (**A**), donde $P_1, \ldots, P_n, R\colon I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Sea $x_o \in I$. Entonces, existe una única solución de (**A**) que satisface las condiciones iniciales dadas $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o, \ldots, y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$

Demostración

Tenemos entonces nuestra ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R(x)$$

Introduzcamos las nuevas variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ definidas como $Y_1 = y$, $Y_2 = y', \ldots, Y_n = y^{(n-1)}$, de modo que la ecuación (**A**) puede escribirse en términos de estas nuevas variables como

$$\begin{aligned}
Y_1' &= Y_2 \\
Y_2' &= Y_3 \\
&\ \vdots \\
Y_{n-1}' &= Y_n \\
Y_n' &= -P_1(x)\,Y_n - \ldots - \qquad P_{n-1}(x)\,Y_2 + R(x)
\end{aligned}$$

Además $Y_1, \ldots, Y_n$ deben satisfacer las condiciones

$$Y_1(x_0) = y_0,\ Y_2(x_0) = y_0', \ldots, Y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-2)}$$

$$Y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Sea $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces la ecuación (**A**) puede escribirse como

$$Y' = f(x, Y)$$

donde $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ es una función definida en $I \times V$, donde V es algún abierto de $\mathbb{R}^n$, y si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$; tenemos que

$$\begin{aligned}
&(x, Y) \xrightarrow{f_1} Y_2\\
&(x, Y) \xrightarrow{f_2} Y_3\\
&\quad\vdots\\
&(x, Y) \xrightarrow{f_n} -P_1(x)Y_n - \ldots - P_{n-1}(x)Y_2 + R(x)
\end{aligned}$$

Debido a la hipótesis de continuidad de las funciones $P_1, \ldots, P_n, R$, se puede verificar de inmediato que la ecuación diferencial vectorial

$$Y' = f(x, Y)$$

satisface *todas* las condiciones establecidas en el teorema de existencia y unicidad estudiado en el apéndice del capítulo 2.

Entonces, por el punto $(x_o, y_o, y_o', \ldots, y_o^{(n-1)}) \in I \times V$ pasa una única solución definida en algún intervalo $J \subset I$.

Q.E.D.

Observación. Lo que pudimos concluir con el teorema de existencia y unicidad del apéndice del capítulo 2, es la existencia de una solución única definida en un intervalo $J \subset I$. En realidad se puede demostrar que esta solución es *prolongable* a todo el intervalo I. Por lo tanto, la solución que asegura el teorema que existe (y que es única) está definida en todo el intervalo I, en donde están definidas las funciones $P_1, \ldots, P_n, R$. La demostración de este hecho puede consultarse en Pontryaguin. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Ed. Aguilar.

El teorema establecido anteriormente será usado en la demostración de algunos resultados básicos que estudiaremos en el transcurso de este capítulo. Comenzaremos a estudiar lo relacionado a las soluciones ''en abstracto'' de la ecuación (**A**) y posteriormente estudiaremos algunos métodos que nos permitan explicitar (cuando es posible hacerlo) estas soluciones.

Más concretamente, estaremos interesados en descubrir propiedades de las soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas, pues, como ya se mencionó en el capítulo 2, demostraremos aquí que la solución general de una ecuación como (**A**) es la suma de la solución general de la homogénea asociada más una solución particular de la ecuación no homogénea. Por lo tanto, comenzaremos por centrar nuestra atención en ecuaciones lineales homogéneas hasta que lleguemos a establecer métodos para obtener soluciones de este tipo de ecuaciones y, posteriormente, nos concentraremos en estudiar métodos para obtener soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. INTRODUCCIÓN)

1. Clasifique las ecuaciones diferenciales según sean lineales, homogéneas, con coeficientes constantes, e indique el orden de las mismas.

   a) $(y'')^2 + 2y' + 3y = e^{2x}$
   b) $y'' + 2(y')^2 + 3y = \cos 2x$
   c) $y'' + 2y' + 3y = \operatorname{sen} x$
   e) $xy^{v} + y = 0$
   f) $y''' + 2y' + (1 - x^2)\, y = 2x + 1$
   g) $x^4\, y'' + (xy')^2 + y = 2$

   h) $xy''' + \dfrac{d^2}{dx^2}(xy) = \operatorname{sen} x$

   i) $x^2\, y'' + xy' + y = 0$
   j) $(x^2 - 1)\, y''' + (2x + 1)\, y = 0$

2. Considere el siguiente fenómeno de vibraciones amortiguadas. Se tiene una masa m pendiendo de un resorte. A $t = 0$ se desplaza la masa m una distancia x_0 hacia arriba de su posición de equilibrio. Se sabe que, además de la fuerza restauradora del resorte, habrá una fuerza amortiguadora (por rozamiento) la cual es porporcional a la velocidad instantánea de la masa m, siendo "c" la constante de proporcionalidad (positiva). Si $x(t)$ es la posición del cuerpo al tiempo t, medida desde su posición de equilibrio, demuestre que la ecuación diferencial que rige al movimiento de la masa m es

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + k\,x = 0$$

   donde k es la constante de proporcionalidad de la Ley de Hooke. Se tienen además las condiciones iniciales $x\,(0) = x_0$ y $x'\,(0) = 0$

3. En relación al problema anterior, suponga que existe además una fuerza vertical adicional, por ejemplo, aplicada al soporte del resorte (que se supone no fijo), la cual depende del tiempo y la denotamos por $F\,(t)$

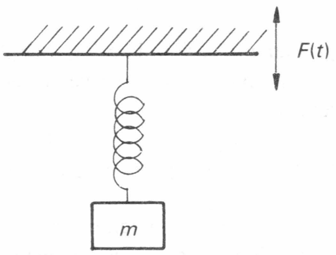


Figura 3. Sistema masa-resorte excitado.

Demuestre entonces que la ecuación diferencial que rige al movimiento de la masa m es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k x = F(t)$$

bajo las condiciones iniciales $x(0) = x_o$ y $x'(0) = 0$

4. Considere el movimiento de un péndulo

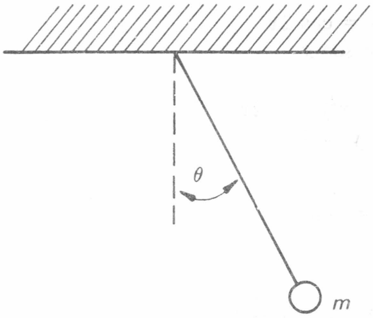


Figura 4. Péndulo simple.

Sea $\theta(t)$ el valor del ángulo que describe la posición de la masa m a un tiempo t tal como se muestra en la figura anterior. Suponga que la única fuerza que interviene para el movimiento del péndulo es el peso de la masa m. Suponga que a $t = 0$ se tiene $\theta = \theta_o$, y que en ese momento se suelta el cuerpo.

Demuestre entonces que la ecuación que rige al movimiento de m es

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \operatorname{sen} \theta = 0$$

donde L es la longitud del hilo. Las condiciones iniciales son $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$.

Observe que ésta es una ecuación no lineal. Sin embargo, si nos limitamos a considerar oscilaciones ''pequeñas'', tendremos sen $\theta \simeq \theta$ y el movimiento quedaría descrito por la ecuación lineal homogénea de 2° orden con coeficientes constantes

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \theta = 0$$

5. ¿En qué se altera el problema anterior si en lugar de decir que a $t = 0$ soltamos la masa m, decimos que a $t = 0$ le imprimimos una velocidad angular inicial de ω_0 rad/seg?
6. Demuestre: sea la ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0$$

donde $P_1, P_2, \ldots, P_n$: I $\rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales continuas definidas en I. Sea $x_0 \in I$. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución de esta ecuación que se anula en x_0, junto con sus derivadas hasta de orden $(n - 1)$ inclusive, entonces $f(x) = 0 \ \forall \ x \in I$.

1. ESTUDIO DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA DE ORDEN n

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas poseen una importante propiedad: ellas presentan un ''comportamiento lineal'' respecto de la ecuación, en el sentido de que si $y_1. \ldots, y_n$ son soluciones de una ecuación de este tipo, entonces cualquier combinación lineal de ellas también será solución. Más concretamente, establezcamos el siguiente resultado:

Teorema (1) (Principio de superposición)

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0$$

Si $y_1, \ldots, y_m$ son soluciones de esta ecuación, entonces la combinación lineal

$\sum_{i=1}^{m} c_i\, y_i$ será también solución.

Demostración

Tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i\right)^{(n)} + P_1(x)\left(\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i\right)^{(n-1)} + \ldots +$$

$$P_{n-1}(x)\left(\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i\right) + P_n(x)\left(\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i^{(n)} + P_1(x)\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i^{(n-1)} + \ldots +$$

$$P_{n-1}(x)\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i' + P_n(x)\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i =$$

$$\sum_{i=1}^{m} C_i\,[y_i^{(n)} + P_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y_i' + P_n(x)\, y_i] = 0$$

Q.E.D.

El teorema (1) nos conduce a pensar que si de alguna manera llegásemos a conocer n soluciones *distintas* de la ecuación lineal homogénea de orden n, entonces con ellas podríamos construir *la solución general* de esta ecuación formando la combinación lineal de estas n soluciones.

Sin embargo, el siguiente ejemplo nos hará desistir de tal idea.

Consideremos la ecuación

$$y'' - 3y' = 2y = 0$$

Es fácil probar que $y_1 = e^x$ y $y_2 = 3e^x$ son soluciones de esta ecuación (además, son soluciones *distintas*).

¿Será que $y = C_1 e^x + C_2 3e^x$ es la solución general de esta ecuación?

La respuesta es *NO,* pues y puede escribirse como

$$y = (C_1 + 3C_2) e^x = Ke^x$$

y vemos entonces que esta solución posee sólo *una* constante arbitraria, por lo que no puede ser la solución general de la ecuación (que es de 2o. orden).

Entonces, tal parece que la condición de ser $y_1, \ldots, y_n$ soluciones *distintas* no es suficiente para, a partir de ellas, construir la solución general de la ecuación.

Antes de concretar la condición que deban satisfacer estas soluciones para que con ellas podamos construir la solución general, recordemos el concepto de dependencia e independencia lineal de funciones.

1.1 Dependencia e independencia lineal de funciones. Wronskianos

Definición

Consideremos las n funciones reales $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon I \rightarrow \mathcal{R}$ definidas en algún intervalo

I. Decimos que estas funciones son linealmente independientes (en I) si

$$C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n = 0 \Rightarrow C_1 = \ldots = C_n = 0$$

Caso contrario diremos que son *linealmente dependientes* (o sea, si existen n constantes $C_1, \ldots, C_n$, al menos una de ellas diferentes a cero, tal que $C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n = 0$).

Por ejemplo, las funciones $f_1, \ldots, f_{n+1}\colon \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ dadas por $f_i(x) = x^{i-1}$ ($i = 1, \ldots, n, n+1$) son linealmente independientes en $\mathcal{R}$, pues la combinación lineal $C_1 + C_2 x + \ldots + C_{n+1} x^n = 0$ (que debe satisfacerse para toda x real) implica que $C_1 = \ldots = C_{n+1} = 0$, así como las funciones $g_1, g_2\colon \mathcal{R}$ dadas por $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = -x^2$ si $x \leq 0$, $g_2(x) = x^2$ si $x > 0$, son también linealmente independientes en $\mathcal{R}$, pues, si formamos la combinación lineal

$$C_1 g_1 + C_2 g_2 = 0$$

o

$$C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) = 0$$

Vemos que si $x > 0$, nos queda $C_1 x^2 + C_2 x^2 = 0$ lo cual implica que $C_1 + C_2 = 0$, mientras que si $x \leq 0$, nos queda $C_1 x^2 - C_2 x^2 = 0$, lo que implica que $C_1 - C_2 = 0$.

Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, debe cumplirse a la vez que $C_1 + C_2 = 0$ y $C_1 - C_2 = 0$, lo cual se cumple si y sólo si $C_1 = C_2 = 0$.

Por otra parte, las funciones f_1, f_2, f_3: $\mathbb{R} \to$ dadas por $f_i(x) = x + i$, $i = 1, 2, 3$ son linealmente dependientes con $\mathbb{R}$ (y en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$) pues

$$C_1 (x + 1) + C_2 (x + 2) + C_3 (x + 3) = 0$$

o bien

$$(C_1 + C_2 + C_3) x + C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0$$

se cumple, para toda x, si

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0$$

que es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones, por lo que posee soluciones *no* triviales (no todas nulas) y entonces se cumple que $C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 = 0$ con C_1, C_2, C_3 no todas iguales a cero.

Definición

Sean $f_1, \ldots f_n$: $I \to \mathbb{R}$ funciones reales definidas en el intervalo I, tales que poseen derivadas hasta el orden $(n - 1)$ (inclusive).

Definimos al *wronskiano* de estas funciones en I como el determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ & & \ldots & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} (x)$$

al cual denotamos por $W(f_1, \ldots f_n)(x)$.

Nota: en realidad el wronskiano es una función del tipo

$$W(f_1, \ldots, f_n) \colon I \to \mathbb{R}$$

Establezcamos el siguiente resultado que nos dice cuál es la relación entre el wronskiano de ciertas funciones con su dependencia o independencia lineal.

Teorema (2)

Si las funciones $f_1, \ldots f_n: I \to \mathcal{R}$ son las linealmente dependientes (en I), y si estas funciones son derivables hasta el orden $(n - 1)$, entonces $W(f_1, \ldots f_n) \equiv 0$.

Demostración

Sea la combinación lineal

$$C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n = 0$$

Como $f_1, \ldots f_n$ poseen derivadas hasta el orden $n - 1$ podemos obtener las siguientes relaciones (derivando)

$$C_1 f_1' + \ldots + C_n f_n' = 0$$

$$C_1 f_1'' + \ldots + C_n f_n'' = 0$$

$$\ldots$$

$$C_1 f_1^{(n-1)} + \ldots + C_n f_n^{(n-1)} = 0$$

La combinación lineal original, junto con las últimas $(n - 1)$ relaciones nos da un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n indeterminadas $C_1, \ldots C_n$. Como las funciones $f_1, \ldots f_n$ son linealmente dependientes (en I), el sistema posee soluciones no triviales para $C_1, \ldots C_n$.

Esto implica que el determinante del sistema es cero, o sea $W(f_1 \ldots f_n) \equiv 0$, como queríamos probar.

Q.E.D.

Observe que el teorema anterior establece que una condición *necesaria* para la dependencia lineal de las funciones $f_1, \ldots f_n: I \to \mathcal{R}$ es que su wronskiano sea idénticamente nulo en I. Sin embargo, esta condición *no es suficiente*, pues ya vimos que las funciones $g_1, g_2: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ dadas por $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = -x^2$ si $x \leq 0$ y $g_2(x) = x_2$ si $x > 0$ son linealmente independientes en R, pero

$$W(g_1, g_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } x > 0$$

$$W(g_1, g_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } x \leq 0$$

i.e. $W(g_1, g_2) \equiv 0$ en $\mathbb{R}$
Un corolario inmediato del teorema (2) es el siguiente

Corolario

Si $W(f_1, \ldots, f_n) \not\equiv 0$ en I, entonces $f_1, \ldots f_n$: $I \to \mathbb{R}$ son linealmente independientes en I.

Por ejemplo, ya vimos que las funciones $f_1 \ldots f_{n+1}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x) = x^{i-1}$ $(i = 1 \ldots . n + 1)$ eran linealmente independientes en $\mathbb{R}$, conclusión a la que también podemos llegar de observar que

$$W(f_1 \ldots f_{n+1})(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & 2x & \ldots (n-1)x^{n-2} & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots (n-1)(n-2)x^{n-3} & n(n-1)x^{n-2} \\ & & & \ldots . & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \quad 0 & n! \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2!)(3!) \ldots (n!) \neq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$$

En el caso $n = 2$ tenemos una versión simple de una especie de recíproco del teorema (2) que se enuncia y demuestra enseguida.

Teorema (3)

Sean f_1, f_2: $I \to \mathbb{R}$ tales que $W(f_1, f_2) \equiv 0$. Si f_i $(i = 1$ ó $2)$ es tal que $f_i(x) \neq 0 \; \forall \, x \in I$, entonces f_1 y f_2 son linealmente dependientes en I.

Demostración

Suponga que $f_1(x) \neq 0 \; \forall \, x \in I$. Formemos la función g: $I \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

Observe que

$$g'(x) = \frac{f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)}{(f_1(x))^2} = 0 \qquad \forall \, x \in I$$

por lo que $g(x) = C$ (en I), i.e.

$$f_2(x) = C f_1(x) \qquad \forall\, x \in I$$

o sea que f_1 y f_2 son linealmente dependientes en I.

Q.E.D.

1.2 Independencia lineal de soluciones

En 1.1. hemos recordado los conceptos de dependencia e independencia lineal para funciones cualesquiera.

Veamos ahora qué sucede con los resultados que obtuvimos si nuestras funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Teorema (4)

Sea la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

donde $P_1, \ldots, P_n: I \rightarrow \mathcal{R}$ son funciones continuas.

Sean $f_1, \ldots, f_n: I \rightarrow \mathcal{R}$ funciones tales que $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial dada. Si $W(f_1, \ldots, f_n)(x) = 0$ para alguna $x \in I$, entonces $f_1 \ldots f_n$ son linealmente dependientes en I.

Demostración

Sea $x = a \in I$ tal que $W(f_1. \ldots, f_n)(a) = 0$.

Formemos el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales para las indeterminadas $C_1, \ldots, C_n$

$$C_1 f_1(a) + \ldots + C_n f_n(a) = 0$$

$$C_1 f_1'(a) + \ldots + C_n f_n'(a) = 0$$

$$C_1 f^{(n-1)}(a) + \ldots + C_n f_n^{(n-1)}(a) = 0$$

Por hipótesis, el determinante de este sistema es cero (pues el determinante del sistema es $W(f_1 \ldots f_n)(a)$), por lo que el sistema posee soluciones no triviales.

Sea $\{\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_n\}$ el conjunto solución del sistema (que no está formado exclusivamente por ceros).

Sea $f: I \rightarrow \mathcal{R}$ definida como

$$f(x) = \tilde{C}_1 f_1(x) + \ldots + \tilde{C}_n f_n(x)$$

Según el teorema (1), $y = f(x)$ también es solución de la ecuación dada. Observe además que esta solución satisface que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

Ciertamente la función g idénticamente nula (en I) satisface la ecuación homogénea dada junto con todas las condiciones iniciales establecidas.

Entonces, según el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden n, la función g debe ser la solución de la ecuación dada, esto es, la función $f = I \rightarrow \mathcal{R}$ dada por $f(x) = \tilde{C}_1 f_1(x) + \ldots + \tilde{C}_n f_n(x)$ es tal que $f(x) = 0$ para toda x en I.

Hemos entonces conseguido probar que

$$\tilde{C}_1 f_1(x) + \ldots + \tilde{C}_n f_n(x) = 0 \qquad \forall\, x \in I$$

en donde $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_n$ no son todos nulos. Esto es precisamente lo que queríamos probar.

Q.E.D.

Observe entonces que si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, se tiene un comportamiento ''más rígido'' en la relación entre el wronskiano de estas funciones y su dependencia lineal, pues basta con que éste se anule en un solo punto del intervalo en donde ellas están definidas para poder concluir que tales funciones son linealmente dependientes, mientras que si estas funciones fuesen funciones cualesquiera (no necesariamente soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea), el wronskiano podría anularse en todo el intervalo y aún así no podríamos concluir la dependencia lineal de ellas.

1.3 Una fórmula para el wronskiano: la fórmula de Abel

Teorema (5)

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0$$

donde $P_1, \ldots, P_n \colon I \rightarrow \mathcal{R}$ son funciones continuas.

Entonces, si $y_1, \ldots, y_n \colon I \rightarrow \mathcal{R}$ son funciones tales que $y_i = y_i(x)$ es solución de la ecuación dada ($i = 1, \ldots n$), entonces

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = Ke^{-\int P_1(x)\,dx} \qquad \forall\, x \in I$$

para alguna constante K.

A esta fórmula se le conoce como *fórmula de Abel.*

Demostración

Por razones de carácter técnico * sólo haremos la demostración del caso $n = 3$.

Como $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $y_3 = f_3(x)$ son soluciones de la ecuación

$$y''' + P_1(x)\, y'' + P_2(x)\, y' + P_3(x)\, y = 0$$

tenemos que

$$P_1(x)\, y_1'' + P_2(x)\, y_1' + P_3(x)\, y_1 = -\, y_1'''$$

$$P_1(x)\, y_2'' + P_2(x)\, y_2' + P_3(x)\, y_2 = -\, y_2'''$$

$$P_1(x)\, y_3'' + P_2(x)\, y_3' + P_3(x)\, y_3 = -\, y_3'''$$

Podemos encarar las últimas 3 ecuaciones como un sistema de 3 ecuaciones (no homogéneo) con las indeterminadas $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$.

El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_3'' & y_3'' & y_3 \end{vmatrix}$$

o bien (**)

$$-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = -\, W(y_1, y_2, y_3)$$

Si existiera $x_o \in I$ tal que $W(y_1, y_2, y_3)(x_o) = 0$, entonces por el teorema (4), las soluciones y_1, y_2, y_3 serían linealmente dependientes y entonces, por el teorema (2), $W(y_1, y_2, y_3)(x) = 0 \ \forall\, x \in I$. En tal caso la fórmula de Abel se satisface con $K = 0$.

Supongamos entonces que $W(y_1, y_2, y_3)(x) \neq 0 \ \forall\, x \in I$.

---

* Si el lector está interesado en demostrar el caso general, es ampliamente recomendable que antes de aventurarse con la demostración vea cómo se deriva la función determinante, viendo ésta como función multilineal alternada de sus columnas.

** Si A es una matriz nxn, det A = det A^t, donde A^t denota la transpuesta de A. Además, recuerde que el determinante es una función alternada de sus líneas.

Entonces, resolviendo el sistema para $P_1(x)$ obtenemos que

$$P_1(x) = \frac{-1}{W(y_1, y_2, y_3)(x)} \begin{vmatrix} -y_1''' & y_1' & y_1 \\ -y_2''' & y_2' & y_2 \\ -y_3''' & y_3' & y_3 \end{vmatrix}$$

Pero

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -y_1''' & y_1' & y_1 \\ -y_2''' & y_2' & y_2 \\ -y_3''' & y_3' & y_3 \end{vmatrix} &= -y_1'''(y_2'y_3 - y_3'y_2) + y_2'''(y_1'y_3 - y_3'y_1) \\ &\quad - y_3'''(y_1'y_2 - y_2'y_1) \\ &= \frac{d}{dx} W(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{d}{dx} W(y_1, y_2, y_3) + P_1(x)\, W(y_1, y_2, y_3) = 0$$

que es una ecuación de variables separables para $W(y_1, y_2, y_3)$, de donde se obtiene efectivamente que

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = K e^{-\int P_1(x)dx}$$

Q.E.D.

Un importantísimo corolario del teorema (5) es el siguiente

Corolario

Sea la ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0$$

donde $P_1. \ldots P_n: I \rightarrow \mathcal{R}$ son funciones continuas. Si $y_1, \ldots, y_n: I \rightarrow \mathcal{R}$, $y_i = y_i(x)$ $i = 1, \ldots, n$ son n soluciones de esta ecuación, entonces

i) $$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0 \qquad \forall\, x \in I$$

o

ii) $$W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in I$$

En el primer caso las soluciones son linealmente dependientes en I y en el segundo son linealmente independientes en I.

Demostración

De la fórmula de Abel vemos que si $K = 0$, entonces se cumple (*i*), y si $K \neq 0$ entonces se cumple (*ii*) (pues la función exponencial es siempre diferente de cero).

Q.E.D.

Veamos un ejemplo.

Es de verificación inmediata que $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ $y_3 = e^{3x}$ son soluciones de la ecuación

$$y''' - 6y'' + 11\,y' - 6y = 0$$

Calculemos el wronskiano de estas soluciones

$$W\,(e^x,\, e^{2x},\, e^{3x})\,(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9x^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x}$$

Ahora, según la fórmula de Abel tenemos

$$W\,(e^x,\, e^{2x})\,(x) = Ke^{-\int P_1(x)\,dx} = Ke^{-\int -6dx} = Ke^{6x}$$

Entonces en este caso se tiene la fórmula para el wronskiano con $K = 2$, por lo que las soluciones dadas son linealmente independientes en toda la recta real (pues los coeficientes de la ecuación dada están definidos en toda la recta).

1.4 Sistema fundamental de soluciones

Retomemos la discusión original de esta sección. Procurábamos descubrir qué condiciones debían satisfacer n soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea (de orden n) para que con ellas pudiésemos formar la solución general de la ecuación. Vimos que el hecho de que estas soluciones fueran *distintas* no era suficiente para concluir que con ellas podríamos formar la solución general de la ecuación. El siguiente teorema (su corolario) nos dará la respuesta a nuestra pregunta.

Teorema (6)

Sea la ecuación

$$y^{(n)} + P_1\,(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}\,(x)\,y' + P_n\,(x)\,y = 0$$

donde $P_1, \ldots, P_n\colon I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Si $y_1, \dots, y_n: I \to \mathbb{R}$, $y_i = y_i(x)$ $i = 1 \dots n$ son soluciones linealmente independientes en I de la ecuación dada, entonces, siendo $y = y(x)$ cualquier otra solución de la ecuación, existen constantes $C_1, \dots, C_n$ tales que

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

Demostración

Según el teorema (5) tenemos que existen constantes $d_1, \dots, d_n$ tales que

$$W(y, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{n-1}, y_n) = d_1 e^{-\int P_1(x)\,dx} \tag{1}$$

$$W(y, y_1, y_3, y_4, \dots, y_{n-1}, y_n) = d_2 e^{-\int P_1(x)\,dx} \tag{2}$$

$$W(y, y_1, y_2, y_4, \dots, y_{n-1}, y_n) = d_3 e^{-\int P_1(x)\,dx} \tag{3}$$

$$W(y, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n) = d_n e^{-\int P_1(x)\,dx} \tag{n}$$

Multiplicando la expresión (i), Con i par $(1 \le i \le n)$ por $-y_i$ y la expresión (j) con j impar $(1 \le j \le n)$ por y_j y sumando las expresiones resultantes obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} y_k W(y, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \hat{y}_k, y_{k+1}, \dots, y_n) =$$

$$e^{-\int P_1(x)\,dx} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} d_k y_k \tag{B}$$

donde

$$W(y, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \hat{y}_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = W(y, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

Ahora consideremos el determinante $(n+1) \times (n+1)$ siguiente

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & \vdots & & & \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Ciertamente este determinante vale cero, pues sus dos primeras líneas son iguales.

Observe que el cofactor asociado al primer elemento de la primera línea es

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

y el cofactor asociado al $(k + 1)$ ésimo $(k = 1, 2, \ldots n)$ elemento de la primera línea es

$$(-1)^k y_k \; W(y, y_1, \ldots, y_{k-1}, \hat{y}_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$$

de modo que desarrollando por cofactores a lo largo de la primera línea obtenemos que

$$yW(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k y_k \, W(y, y_1, \ldots, y_{k-1}, \hat{y}_k, y_{k+1}, \ldots y_n) = 0$$

de donde

$$yW(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} y_k W(y, y_1, \ldots, y_{k-1}, \hat{y}_k, y_{k+1}, \ldots y_n)$$

Entonces, comparando con la expresión (**B**) obtenemos

$$yW(y_1, y_2, \ldots, y_n) = e^{-\int P_1(x)\,dx} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} d_k \, y_k$$

Ahora, según la fórmula de Abel tenemos que

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n) = d\, e^{- \quad P_1(x)\,dx}$$

donde d es una constante *diferente de cero*, pues (por el corolario del teorema (5)) las funciones $y_1, \ldots, y_n$ son, por hipótesis, linealmente independientes en I.

Entonces

$$d\, e^{-\int P_1(x)\,dx}\, y = e^{-\int P_1(x)\,dx} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} d_k \, y_k$$

o bien

$$y = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{d_k}{d} \, y_k$$

Llamando $C_k = (-1)^{k+1} \dfrac{d_k}{d}$ obtenemos finalmente que

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k$$

Q.E.D.

Del teorema anterior se desprende el siguiente corolario que nos dice cómo se constituye la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.

Corolario

Sea la ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0$$

donde $P_1, \ldots, P_n\colon I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Si $y_1, \ldots, y_n\colon I \to \mathbb{R}$, $y_1 = y_i(x)$ $i = 1, \ldots n$ son soluciones linealmente independientes en I de la ecuación dada, entonces *la solución general* de esta ecuación es

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

Definición

Al conjunto de soluciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linealmente independientes en I se le llama *conjunto o sistema fundamental de soluciones* de la ecuación lineal homogénea correspondiente.

Los resultados anteriores nos dicen entonces cómo podemos obtener la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n: basta con disponer de n soluciones (particulares) de tal ecuación linealmente independientes, y entonces la solución general será la combinación lineal de estas soluciones.

Sin embargo, queda aún un pequeño detalle sin resolver en esta discusión: ¿quién nos asegura que podremos efectivamente disponer de n soluciones de la ecuación dada que sean linealmente independientes? Hemos visto que, teniendo estas soluciones, construimos la solución general formando una combinación lineal de ellas. Pero, ¿será que estas n soluciones *existen*? La respuesta es (afortunadamente) afirmativa y además estas n soluciones linealmente independientes quedan determinadas por completo por la ecuación, tal como veremos enseguida.

Tenemos entonces nuestra ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0$$

donde $P_1, \ldots, P_n\colon I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Sea $x_o \in I$. Según el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales, existe una única solución $y_1 = y_1(x)$ de esta ecuación, tal que

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_o) = y_1''(x_o) = \ldots = y_1^{(n-1)}(x_o) = 0$$

Similarmente existe una única solución $y_2 = y_2(x)$ tal que

$$y_2(x_o) = 0,\ y_2'(x_o) = 1,\ y_2''(x_o) = y_2'''(x_o) = \ldots = y_2^{(n-1)}(x_o) = 0$$

En general, existe una única solución $y_i = y_i(x)$, tal que

$$y_i(x_o) = y_i'(x_o) = y_i''(x_o) = \ldots = y_i^{(i-2)}(x_0) = y_i^{(i)}(x_o) = y_i^{(i+1)}(x_0) =$$

$$\ldots = y_i^{(n-1)}(x_0) = 0$$

y

$$y_i^{(i-1)}(x_0) = 1$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora, observe que el wronskiano de estas n soluciones en x_o vale

$$W(y_1, \dots y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_o) & y_2'(x_o) & \dots & y_n'(x_o) \\ & \dots & & \\ y_1^{(n-1)}(x_o) & y_2^{(n-1)}(x_o) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_o) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

O sea $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 1 \neq 0$, y, por el corolario del teorema (5) tenemos $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0 \ \forall x \in I$. Entonces, $y_1, \dots, y_n$ son soluciones linealmente independientes en I, y con ellas podremos construir la solución general de la ecuación original dada.

1.5 Construcción de la ecuación lineal homogénea de orden n dado su conjunto fundamental de soluciones

Hemos visto que, dada la ecuación lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0$$

con $P_1, \dots, P_n\colon I \to \mathbb{R}$ funciones continuas, existen n funciones $y_1, \dots, y_n\colon I \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación y que tienen la propiedad de ser linealmente independientes (en I).

Consideremos ahora el problema contrario: sean dadas n funciones $y_1, \dots, y_n\colon I \to \mathbb{R}$ linealmente independientes en I.

¿Será que ellas constituyen el conjunto fundamental de soluciones de alguna ecuación diferencial lineal homogénea de orden n?

La respuesta la da el siguiente teorema.

Teorema (7)

Sean $y_1, \dots, y_n\colon I \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas continuas hasta orden de n inclusive, linealmente independientes en I. Entonces estas funciones constituyen el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ & & \dots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(C)}$$

Demostración

Ciertamente $y_j\colon I \to \mathcal{R}\ j = 1; \dots, n$ satisface la ecuación dada, pues el determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_j \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y_j' \\ \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y_j^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} & y_j^{(n)} \end{vmatrix}$$

es igual a cero por tener 2 columnas iguales (la j-ésima y la $(n + 1)$-ésima).

Observe además que, desarrollando el determinante que aparece en el lado izquierdo de (**C**) por su última columna obtenemos

$$a_o(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0$$

donde $a_o(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x)$ y $a_1, \dots, a_n\colon I \to \mathcal{R}$ son ciertas funciones (*) de la variable x.

Entonces podemos escribir esta última expresión como

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0 \qquad \textbf{(D)}$$

donde

$$P_i(x) = \frac{a_i(x)}{W(y_1, \dots, y_n)(x)}$$

Por hipótesis, $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0\ \forall\ x \in I$, por lo que $P_1, \dots, P_n\colon I \to \mathcal{R}$ son funciones continuas en I.

Tenemos entonces que $y_1, \dots, y_n\colon I \to \mathcal{R}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (**D**), la cual tiene sus coeficientes continuos en I. Esto implica, según el corolario del teorema (6), que $y_1, \dots, y_n$ constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (**C**).

Q.E.D.

Por ejemplo, dadas las funciones $y_1 = x$, $y_2 = e^{\frac{x^2}{2}}$, tenemos que

$$\begin{vmatrix} x & e^{\frac{x^2}{2}} & y \\ 1 & xe^{\frac{x^2}{2}} & y' \\ 0 & e^{\frac{x^2}{2}}(x^2 + 1) & y'' \end{vmatrix} = 0$$

---

* $a_i(x) i = 1, \dots, n$ está formada por productos y sumas de funciones continuas en I, por lo que es continua en I.

es la ecuación diferencial de la cual y_1, y_2 constituyen un conjunto fundamental de soluciones.

Esta ecuación puede escribirse como

$$(x^2 - 1)y'' - x(x^2 + 1)y' + (x^2 + 1)y = 0$$

Observe que el wronskiano de x y $e^{\frac{x^2}{2}}$ es

$$W\left(x, e^{\frac{x^2}{2}}\right) = (x^2 - 1)\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

el cual se anula en $x = 1$ y $x = -1$. Esto no contradice la teoría que hemos desarrollado (corolario del teorema (5)), pues, escribiendo la ecuación en la forma

$$y' + P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y = 0$$

tenemos que:

$$P_1(x) = -\frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

$$P_2(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

y tenemos entonces que P_1 y P_2 son funciones discontinuas en ± 1.

De modo que, restringiendo el dominio de P_1 y P_2 a I, (donde estas funciones sean continuas) $I = (-\infty, -1)$ ó $I = (-1, 1)$ ó $I = (1, \infty)$, vemos que $W\left(x, e^{\frac{x^2}{2}}\right) \neq 0 \ \forall\, x \in I$, tal como tenía que ocurrir.

1.6 Algunas propiedades de las soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden

En el teorema (6) (su corolario) se vio que dada una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes continuos en algún intervalo I (que puede ser toda la recta), *existen* (en I) n soluciones particulares linealmente independientes para esta ecuación y que con ellas podemos formar la solución general de la ecuación, la cual estaba constituida por la combinación lineal de las n soluciones particulares.

Así, por ejemplo, sabemos que para la ecuación

$$y'' + \sqrt{x^2 + 2}\ \mathrm{sen}\, x\ y' + \left(\frac{x^4 + 3}{x^2 + 1} \cos^2 x\right) y = 0$$

existen dos soluciones $y_1, y_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linealmente independientes, y que la solución general de esta ecuación es entonces $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Aunque aún no hemos visto *cómo determinar* estas soluciones, pues la discusión de esta sección se ha centrado fundamentalmente en la problemática relacionada con la existencia de ellas, veremos que, para el caso de una ecuación de orden 2 (*) (lineal homogénea) podemos establecer algunas propiedades generales del comportamiento de estas soluciones.

Sea entonces la ecuación

$$y'' + P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y = 0$$

con P_1, P_2: $I \rightarrow \mathcal{R}$ funciones continuas y sean y_1, y_2: $I \rightarrow \mathcal{R}$ dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación.

Comencemos por observar que *no existe punto en **I** en el cual* y_1 y y_2 *se anulan simultáneamente.*

En efecto, suponga, que existe $x_o \in I$ tal que $y_1(x_o) = y_2(x_o) = 0$. Tenemos entonces que

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(x_o) & y_2'(x_o) \end{vmatrix} = 0$$

y entonces $W(y_1, y_2)(x) = 0 \ \forall\, x \in I$, lo cual contradice el hecho de que las soluciones y_1, y_2 son linealmente independientes.

Similarmente podemos ver que *no existe punto en **I** en el cual* y_1, y_2 *alcancen simultáneamente un extremo relativo*, pues, si existiera tal $x_o \in I$, tendríamos

$$W(y_1, y_2)(x_o) = \begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y llegamos nuevamente a la misma contradicción anterior.

Podemos inclusive ser más precisos respecto al comportamiento de los ceros de las soluciones y_1 y y_2. Vamos a demostrar que entre dos ceros consecutivos de y_1 (ó y_2) existe uno y solamente un cero de y_2 (ó y_1), es decir, los ceros de y_1 y y_2 se distribuyen (en I) *alternadamente*, presentando las soluciones y_1, y_2 entonces un comportamiento como el que se muestra en la siguiente figura.

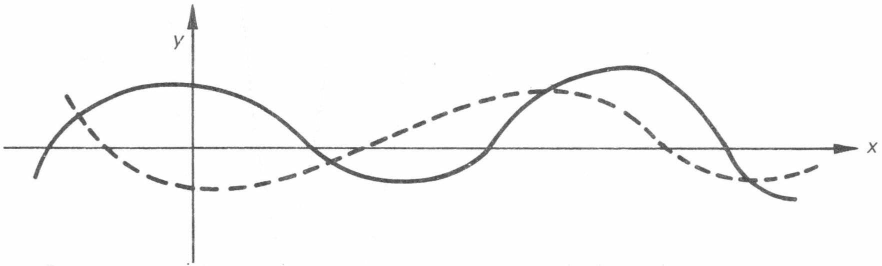


Figura 5. Comportamiento de los ceros de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $y'' + P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y = 0$.

---

* En realidad la discusión aquí presentada puede generalizarse fácilmente para una ecuación de orden n. Sin embargo, se hará sólo para ecuaciones de 2° orden para no envolver con una notación cargada las propiedades a las que nos vamos a referir.

En efecto, sean $x_1, x_2 \in I$ dos ceros consecutivos de y_1, o sea $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$. Vamos a probar que existe un único $x_3 \in (x_1, x_2)$ tal que $y_2(x_3) = 0$.

Suponga lo contrario, es decir, que no existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $y_2(x) = 0$

Construimos entonces la función $g: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$

Observe que $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Entonces, por el teorema de Rolle debe existir $x_o \in (x_1, x_2)$ tal que $g'(x_o) = 0$.

Pero

$$g'(x) = \frac{y_2(x)\, y_1'(x) - y_2'(x)\, y_1(x)}{(y_2(x))^2} = \frac{-W(y_1, y_2)(x)}{(y_2(x))^2}$$

Como y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes en I, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0\ \forall x \in I$. Una contradicción.

Entonces, existe $x_3 \in (x_1, x_2)$ tal que $y_2(x_3) = 0$.

Ahora este x_3 es único. En efecto, suponga que existe $x_3' \in (x_1, x_2)$, $x_3' \neq x_3$, tal que $y_2(x_3) = y_2(x_3') = 0$.

Un razonamiento análogo al anterior nos permite demostrar la existencia de $x_4 \in (x_3, x_3')$ (ó $\in (x_3', x_3)$) tal que $y_1(x_4) = 0$, lo cual contradice el hecho de que x_1, x_2 eran ceros *consecutivos* de y_1.

Las propiedades anteriores pueden verse verificadas en las soluciones $y_1 = \operatorname{sen} x$ y $y_2 = \cos x$ de la ecuación $y'' + y = 0$.

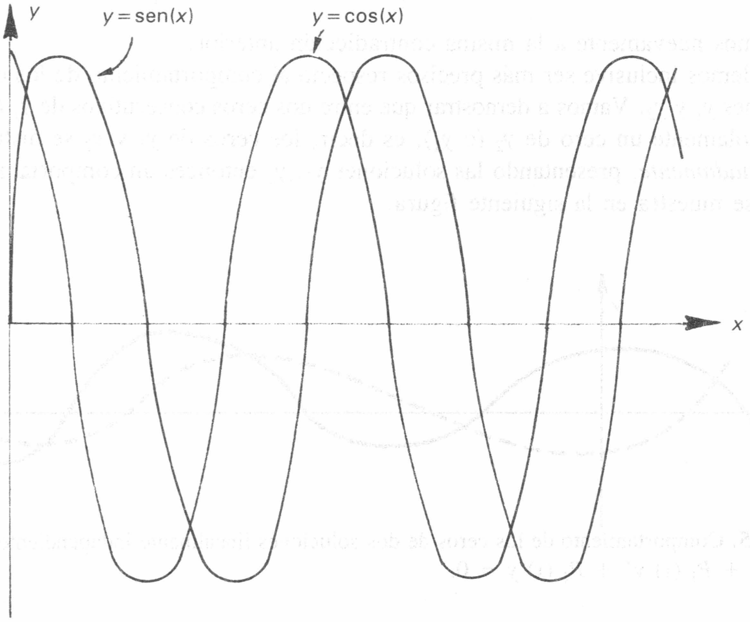


Figura 6. Funciones seno y coseno.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 1)

1. Compruebe que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes y verifique que se cumple el principio de superposición de soluciones.

   a) $y'' - y = 0,\ y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}$
   b) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y_1 = e^x,\ y_2 = e^{3x}$
   c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0,\ y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\ y_2 = e^{-2x}$
   d) $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$
   $y_1 = e^x\ y_2 = e^{-2x},\ y_3 = e^{-x},\ y_4 = (\cos x)\, e^{-x},\ y_5 = (\operatorname{sen} x)\, e^{-x}$

   e) $x^2 y'' + xy' - y = 0,\ y_1 = x,\ y_2 = \dfrac{1}{x}$

   f) $x^2 (\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0,\ y_1 = x,\ y_2 = \ln x$
   g) $y'' + (\tan x)\, y' + (\cos^2 x)\, y = 0,\ y_1 = \cos \operatorname{sen} x,\ y_2 = \operatorname{sen} \operatorname{sen} x$

2. Las funciones $y_1 = \dfrac{1 + x^5}{x}$, $y_2 = x^2 (x^2 + 1)$ son soluciones de la ecuación $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4$. ¿Es la combinación lineal $c_1 y_1 + c_2 y_2$ también solución de esta ecuación?
3. Usando directamente la definición dada en el libro, diga si las siguientes funciones son linealmente dependientes o independientes en $\mathbb{R}$.

   a) $x,\ 2x$
   b) $x^2,\ x^2 + 1$
   c) $\operatorname{sen}^2 x,\ \cos^2 x,\ 1$
   d) $\operatorname{sen}^2 x,\ \cos^2 x,\ \cos 2x$
   c) $1,\ \operatorname{sen} 2x,\ (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$
   f) $e^x,\ e^{2x}$
   g) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$
   h) $e^{kx},\ k = 1, 2, \ldots, n$
   i) $e^x,\ xe^x$
   j) $e^x,\ xe^x,\ x^2 e^x$
   k) $e^x,\ xe^x,\ x^2 e^x,\ x^3 e^x$
   l) $x^3,\ x^2 |x|$
   m) $x^2,\ 2(|x|)^2$
   n)
   $$\begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ -x^2 & \text{si } x \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$
   o)
   $$\begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ -x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

4. Calcule el wronskiano de cada uno de los conjuntos de funciones dadas en el ejercicio 3.
5. Use el resultado del problema anterior para decidir cuáles de los conjuntos de funciones dados en (3) son linealmente independientes. ¿Puede hacer lo mismo para decidir cuáles son linealmente dependientes?
6. Demuestre o dé un contraejemplo: si y_1, y_2: $I \rightarrow \mathcal{R}$ son dos funciones linealmente independientes en I, entonces las restricciones $y_1|_J$, $y_2|_J$: $J \subset I \rightarrow \mathcal{R}$ son linealmente independientes en J.
7. Demuestre o dé un contraejemplo: si y_1, y_2: $I \rightarrow \mathcal{R}$ son dos funciones linealmente dependientes en I, entonces las restricciones $y_1|_J$, $y_2|_J$: $J \subset I \rightarrow \mathcal{R}$ son linealmente dependientes en J.
8. Calcule $W(e^x, 2e^x)$. ¿Puede concluir la dependencia lineal de estas funciones del valor que obtuvo de su wronskiano? (Sugerencia: ver teorema 3).
9. Calcule $W(e^x - 1, 1 - e^x)$. ¿Puede concluir la dependencia lineal de estas funciones del valor que obtuvo de su wronskiano?
10. En este problema se genera una herramienta más poderosa que el wronskiano, conocida como determinante de gram, para detectar la dependencia o independencia lineal de funciones.

    Comencemos por considerar el caso de dos vectores.

    Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sea v_1, $v_2 \in V$. Denotemos por (v_1, v_2) el producto interno de los vectores v_1, v_2. Definimos el determinante de gram de v_1, v_2, denotado por $\Gamma\,(v_1, v_2)$ como

$$\Gamma\,(v_I, v_2) = \begin{vmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ (v_1, v_1) & (v_2, v_2) \end{vmatrix}$$

a) Demuestre que si los vectores v_1 y v_2 son linealmente dependientes, entonces $\Gamma\,(v_1, v_2) = 0$

b) Demuestre que si $\Gamma\,(v_1, v_2) = 0$ entonces los vectores son linealmente dependientes (sugerencia: en la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene la igualdad si y sólo si los vectores son linealmente dependientes).

Consideremos ahora el caso general. Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores del espacio vectorial V con producto interno.

Definimos el determinante de gram de los vectores $v_1, \ldots, v_n$, denotado por $\Gamma\,(v_1, \ldots, v_n)$, como el determinante de la matriz $((v_i, v_j))_{i,\,j\,=\,1,\,\ldots,\,n}$

Pretendemos probar que $\Gamma\,(v_2, \ldots, v_n) = 0$ si y sólo si los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes.

c) Sean $u_1, \ldots, u_k \in V$. Si u es un vector en V que es ortogonal a todos y cada uno de los vectores $u_1, \ldots, u_k$, entonces u es ortogonal a todos y cada uno de los vectores del espacio generado por $u_1, \ldots, u_k$.

d) Si u es un vector del espacio generado por $u_1, \ldots, u_k$, y si u es ortogonal a todos y cada uno de los vectores $u_1, \ldots, u_k$, entonces $u = 0$ (sugerencia: use (*c*)).

e) Considere el sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, $AX = 0$, donde $A = ((v_i, v_j))_{i,j\,=\,1,\,\ldots,\,n}$. Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que este sistema tenga soluciones no triviales y concluya entonces: $\Gamma\,(v_1, \ldots, v_n) = 0$ si y sólo si $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes (sugerencia: use (*d*)).

f) Sea V el espacio de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, con el producto interno

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Entonces $\Gamma\ (f_1, \ldots, f_n) = 0$ si y sólo si las funciones $f_1, \ldots f_n$: $[a, b] \to \mathcal{R}$ son linealmente dependientes en $[a, b]$.

11. Considere las funciones f_1, f_2: $[-1, 1] \to \mathcal{R}$ dadas por:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

a) Demuestre que f_1 y f_2 son linealmente independientes en $[-1, 1]$.
b) Calcule $W(f_1, f_2)$. ¿Puede concluir la independencia lineal de f_1 y f_2 del valor de $W(f_1, f_2)$?
c) Calcule $\Gamma\ (f_1, f_2)$. ¿Puede concluir la independencia lineal de f_1 y f_2 del valor de $\Gamma\ (f_1, f_2)$?

12. Lo mismo que el ejercicio anterior para las funciones g_1, g_2: $[-2, 2] \to \mathcal{R}$ dadas por

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

13. Demuestre o dé un contraejemplo: si y_1, y_2: $I \to \mathcal{R}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $y'' + P_1(x)\,y' + P_2(x)\,y = 0$, donde P_1, P_2: $I \to \mathcal{R}$ son funciones continuas, entonces las restricciones y_1, y_2: $J \subset I \to \mathcal{R}$ son linealmente independientes.
14. Lo mismo que el problema anterior, cambiando independiente por dependiente.
15. Considere la ecuación

$$(2x + 1)\,y'' + (4x - 2)\,y' - 8y = 0$$

a) Demuestre que $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = 4x^2 + 1$ son dos soluciones de la ecuación.
b) Demuestre que estas dos soluciones son linealmente independientes en $\mathcal{R}$.
c) Calcule $W(e^{-2x}, 4x^2 + 1)$
d) Calcule $W(e^{-2x}, 4x^2 + 1)\,(½)$
e) ¿Contradice este ejercicio al teorema (4)? Explique.

16. Considere la ecuación

$$x^2\,(ln\,x - 1)\,y'' - xy' + y = 0$$

a) Demuestre que $y_1 = ln\,x$ y $y_2 = x$ son dos soluciones de la ecuación.
b) Demuestre que $W(ln\,x, x) = ln\,x - 1$

c) Después de observar que $W(\ln x, x)\,(e) = 0$, diga por qué no hay contradicción con el corolario del teorema (5).

17. Verifique que se cumple el corolario del teorema (5) con las ecuaciones siguientes y sus respectivas soluciones.

a) $(x^2 - x)y'' + (2x - 3)y' - 2y = 0,\ y_1 = x^{-2},\ y_2 = 2x - 3$
b) $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0,\ y_1 = x,\ y_2 = 1 + x^2$
c) $y''' - y'' + y' - y = 0,\ y_1 = e^x,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \operatorname{sen} x$
d) $y^{V} + 4y''' = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = \operatorname{sen} 2x,\ y_5 = \cos 2x$

18. Formar las ecuaciones diferenciales cuyo conjunto fundamental de soluciones es

a) $y_1 = x^{-2},\ y_2 = 2x - 3$
b) $y_1 = x,\ y_2 = \sqrt{1 + x^2}$
c) $y_1 = e^x,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \operatorname{sen} x$
d) $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = \operatorname{sen} 2x,\ y_5 = \cos 2x$

19. En este problema se pretende demostrar el siguiente resultado: ''Las soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n: $y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)\,y' + P_n(x)\,y = 0$ donde $P_1, \dots, P_n : I \to \mathcal{R}$ son funciones continuas, forman un espacio vectorial de dimensión n, subespacio del espacio $C(I, \mathcal{R})$ de las funciones reales continuas definidas en I.

a) Primero demuestre que el conjunto de soluciones y_i forman de hecho un espacio vectorial (en realidad no tiene que hacer nada: Recuerde el Principio de Superposición de Soluciones).

b) Tome $x_o \in I$. Según el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones, existen n soluciones $y_i : I \to \mathcal{R}$ tales que $y_i^{(j-1)}(x_o) = \delta_{ij}$ (donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ — la función delta de Kronecker). Vamos a probar que estas n funciones forman una base del espacio de soluciones de la ecuación dada. Tendremos que probar dos cosas: (1) estas n soluciones son linealmente independientes (en I), (2) estas n soluciones generan el espacio de soluciones.

*b*1) Considere la combinación lineal $c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) = 0\ \forall\, x \in I$. Demuestre que $c_1 = \dots = c_n = 0$, i. e. que las n soluciones son linealmente independientes en I (sugerencia: derive $n - 1$ veces y haga $x = x_0$).

*b*2) Sea $y : I \to \mathcal{R}$ una solución de la ecuación que satisface $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y_0'$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_o^{(n-1)}$.

Demuestre entonces que

$$y(x) = y_oy_1(x) + y_o'y_2(x) + \dots + y_0^{(n-1)}y_n(x)$$

i. e. que las n soluciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ generan el espacio de las soluciones de la ecuación (sugerencia: considere la función $g(x) = y_0y_1(x) + \dots + y_o^{(n-1)}y_n(x)$ y demuestre que esta es una solución de la ecuación diferencial satisfaciendo $g(x_o) = y_o, \dots, g^{(n-1)}(x_o) = y_0^{(n-1)}$. Use entonces el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones para concluir que $g(x) = y(x)\ \forall\, x \in I$).

2. REDUCCIÓN DEL ORDEN

Sea la ecuación lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

con los coeficientes $P_1, \dots, P_n\colon I \to \Re$ continuos.

Suponga que se conoce una solución particular de esta ecuación, digamos y_1 (distinta de la trivial, o sea $y = 0$).

Hagamos la sustitución $y = y_1 \phi$, donde ϕ es una nueva función que queda por determinar.

Según la fórmula para la derivada n-ésima de un producto de funciones tenemos que

$$y^{(n)} = (y_1\phi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_1^{(k)} \phi^{(n-k)}$$

donde $\binom{n}{k}$ denota al coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original nos queda

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_1^{(k)}\phi^{(n-k)} + P_1(x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y_1^{(k)} \phi^{(n-k-1)} + \dots$$
$$+ P_{n-1}(x) \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} y_1^{(k)} \phi^{(1-k)} + P_n(x)y_1\phi = 0$$

o bien (tomando el último sumando de cada sumatoria)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y_1^{(k)} \phi^{(n-k)} + P_1(x) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} y_1^{(k)} \phi^{(n-k-1)} + \dots$$
$$+ P_{n-1}(x)y_1\phi' + [y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y_1' + P_n(x)y_1]\phi = 0$$

Ahora bien, el corchete que aparece en esta última expresión es, por hipótesis, cero, de modo que la expresión resultante es

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y_1^{(k)} (\phi')^{(n-k-1)} + P_1(x) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} y_1^{(k)} (\phi')^{(n-k-2)}$$
$$+ \dots + P_{n-1}(x)y_1\phi' = 0$$

que es una ecuación diferencial (lineal homogénea) de orden $n-1$ para ϕ'.

A la estrategia expuesta anteriormente se le llama *reducción del orden*, y consiste pues en, conociendo una solución particular (y_1) de la ecuación lineal homogénea de orden n, por medio de la sustitución $y = y_1 \phi$, reducir el orden de la ecuación en una unidad obteniendo una ecuación diferencial de orden $n-1$ para la variable ϕ'.

Este método es particularmente importante para ecuaciones de orden 2, pues, conociendo una solución particular y_1 de la ecuación, con la sustitución $y = y_1 \phi$ podemos obtener una ecuación de primer orden (para ϕ') que ya sabemos cómo resolver.

Centraremos nuestra atención entonces en ecuaciones de orden 2.

Sea entonces la ecuación

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

y sea y_1 una solución particular de ella.

Hagamos $y = y_1 \phi$

Entonces

$$y' = y_1 \phi' + y_1' \phi$$

$$y'' = y_1 \phi'' + 2 \phi' y_1' + y_1'' \phi$$

Sustituyendo en la ecuación nos queda

$$y_1 \phi'' + 2 \phi' y_1' + \phi y_1'' + P_1(x) [y_1 \phi' + \phi y_1'] + P_2(x) y_1 \phi = 0$$

o bien

$$y_1 \phi'' + [2y_1' + P_1(x)y_1] (\phi') = 0$$

que es una ecuación lineal de primer orden (homogénea) para ϕ', o bien, una ecuación de variables separables para ϕ'.

Resolvamos esta ecuación.

Separando variables e integrando nos queda

$$\int \frac{d\phi'}{\phi'} = -\frac{2 y_1' + P_1(x) y_1}{y_1} dx$$

de donde

$$ln|\phi'| = -2 \, ln y_1 - \int P_1(x)dx$$

o bien

$$\phi' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx}$$

y finalmente

$$\phi = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx$$

Observe que hemos hecho caso omiso de las constantes de integración, pues no estamos interesados por *todas* las ϕ tales que ϕ' satisfaga la ecuación correspondiente, sino sólo en *alguna* de ellas, por lo que, por simplicidad, hemos tomado las dos constantes de integración iguales a cero.

Hemos logrado obtener entonces *otra* solución de la ecuación original, a saber

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx$$

¿Será que y_1 y y_2 constituyen el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación original?

Observe que

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx \\ y_1' & \frac{1}{y_1} e^{-\int P_1(x)dx} + y_1' \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx \end{vmatrix}$$

$$= e^{-\int P_1(x)dx} \neq 0$$

por lo que y_1 y y_2 constituyen de hecho el sistema fundamental de soluciones de la ecuación dada, siendo entonces la solución general de esta ecuación

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\,y' + \frac{2}{1-x^2}\,y = 0$$

Sabiendo que $y_1 = x$ es una solución particular de ella.

Solución

Según la discusión presentada anteriormente vemos que

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P_1(x)\,dx}\, dx$$

es otra solución linealmente independiente respecto de y_1, por lo que la solución general buscada sería $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Tenemos entonces que

$$y_2 = x \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\int -\frac{2x}{1-x^2}\,dx}\, dx$$

$$= x \int \frac{1}{x^2}\, e^{-ln(1-x^2)}\, dx = x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}\, dx$$

Desarrollando en fracciones parciales e integrando en la última expresión nos queda

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$$

y entonces

$$y_2 = x\left[\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x}\right]$$

$$= x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

$$= -1 + \frac{x}{2}\,ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

por lo que la solución general buscada es

$$y = C_1x + C_2\left(-1 + ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)^{*}$$

---

* Nuevamente observamos que esta solución tiene validez si $x \neq \pm 1$, que es precisamente en donde los coeficientes $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son continuos.

Ejemplo 2

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{9}{1-x^2}y = 0$$

sabiendo que una solución particular de ella es un polinomio de 3er. grado.

Solución

Sea $y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ la solución particular de la ecuación.

Deberá entonces cumplirse que

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)'' - \frac{x}{1-x^2}(ax^3 + bx^2 + cx + d)' +$$

$$\frac{9}{1-x^2}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$$

o sea

$$6ax + 2b - \frac{x}{1-x^2}(3ax^2 + 2bx + c) + \frac{9}{1-x^2}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$$

o

$$5bx^2 + (6a + 8c)x + 2b + 9d = 0$$

de donde $b = 0$, $d = 0$, $3a + 4c = 0$.

Entonces, nuestra solución particular en cuestión puede ser

$$y_1 = 4x^3 - 3x$$

(o cualquier múltiplo de ella).

Entonces, la segunda solución de la ecuación original es

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)dx}\, dx$$

$$= (4x^3 - 3x) \int \frac{1}{(4x^3 - 3x)^2} e^{-\int \frac{-x}{1-x^2}dx}\, dx$$

$$= (4x^3 - 3x) \int \frac{dx}{x^2(4x^2 - 3)^2\sqrt{1-x^2}}$$

El procedimiento para resolver la integral que aparece en la última expresión es muy largo como para exponerlo por completo aquí (además de que no forma parte esencial del problema). En seguida se marcan algunas etapas de este procedimiento.

$$\int \frac{dx}{x^2(4x^2-3)^2\sqrt{1-x^2}} = \xrightarrow{x\,=\,1/t} = -\int \frac{t^5dt}{(4-3t^2)\sqrt{t^2-1}}$$

$$= \xrightarrow{t^2-1\,=\,u^2} = -\int\left(\frac{4/3}{1-3u^2}-\frac{1}{3}\right)^2 du =$$

$$= -\frac{16}{9}\int\frac{du}{(1-3u^2)^2}+\frac{8}{9}\int\frac{du}{1-3u^2}-\frac{1}{9}u = \xrightarrow[\text{parciales}]{\text{fracciones}}$$

$$= -\frac{4}{9}\left[\int\frac{du}{(1-\sqrt{3}u)^2}+\int\frac{du}{(1+\sqrt{3}u)^2}\right]-\frac{1}{9}u$$

$$= -\frac{8}{9}\,\frac{u}{1-3u^2}-\frac{1}{9}u = \xrightarrow[\text{la variable } x]{\text{Regresando a}} = \frac{\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)}{-3x\,(4x^2-3)}$$

Entonces la segunda solución es

$$y_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)$$

y la solución general buscada será

$$y = C_1(4x^3-3x)+C_2\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 2)

Conociendo una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones encuentre su solución general (1 — 14).

1. $y'' + 2x^{-1}y' - y = 0 \qquad y_1 = x^{-1}e^x$
2. $y'' - 2y' + y = 0 \qquad y_1 = e^x$
3. $(x^2-2x)y'' + (2-x^2)y' - 2(1-x)y = 0 \qquad y_1 = x^2$

4. $(\cos x - \operatorname{sen} x)y'' + (2\operatorname{sen} x)y' - (\operatorname{sen} x + \cos x)y = 0 \qquad y_1 = e^x$

5. $(1 - \ln x)y'' - x^{-1}y' - x^{-2}y = 0 \qquad y_1 = x$

6. $2x^3y'' - (x^4 + 3x^2)y' + 2x^3y = 0 \qquad$ y_1 es un polinomio cuadrático

7. $[\cos x(\operatorname{sen} x + 1)]y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\operatorname{sen} x \cos x)y = 0 \qquad y_1 = \operatorname{sen} x$

8. $(2x^2 + 1)y'' + x(4x^2 - 2)y - (4x^2 - 2)y = 0 \qquad y_1 = e^{-x^2}$

9. $(y'')^2 + 2x^{-1}y'y'' + x^{-2}(y')^2 = 0 \qquad y_1 = \ln x^2$

10. $(x^2 - x - 1)y'' - (x^2 + x - 2)y' + (2x - 1)y = 0$

    y_1 es un polinomio de grado 2 sin término constante

11. $(x^3 \ln x - x^3)y'' - x^2y' + xy = 0 \qquad y_1 = \ln x$

12. $(x\cos x - \operatorname{sen} x)y'' + (x\operatorname{sen} x)y' - (\operatorname{sen} x)y = 0 \qquad y_1 = x$

13. $(x + r)^2y'' + p(x - r)y' - py = 0 \qquad y_1 = x - r$

14. $(x^2 - 1)y'' = 6y \qquad$ y_1 es un polinomio

15. Considere la ecuación diferencial $y''' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$. Si y_1 es una solución particular de esta ecuación, demuestre que

$$y_2 = y_1 \int [C_1u_1 + C_2u_1 \int \frac{dx}{u_1^2y_1^3}]\, dx$$

es otra solución, donde C_1 y C_2 son constantes y

$$y_1u_1'' + 3y_1'u_1' + [3y_1'' + P_2(x)y_1]u_1 = 0$$

▲ 16. Es fácil descubrir una solución particular de la ecuación

$$xy'' + (1 - x)y' = 0$$

Demuestre que la solución general de esta ecuación se puede escribir como

$$y = C_1 + C_2[\ln x + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}]$$

▲ 17. Encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2y'' - (x^2 + x)y' + (x + 1)y = 0$$

18. Sea y_1 una solución particular de la ecuación

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

Explique cómo podría usar la fórmula de Abel para descubrir una segunda solución de esta ecuación.

3. VARIACIÓN DE PARÁMETROS*

Una extensión natural de la problemática estudiada en la sección anterior es la siguiente:

Sea dada la ecuación lineal *no homogénea* de 2o. orden

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x) \qquad \textbf{(E)}$$

Con P_1, P_2, R: $I \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

Supongamos que conocemos una solución particular y_1 de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \qquad \textbf{(F)}$$

Se trata de construir la *solución general* de la ecuación inicial (la no homogénea) a partir de la solución dada.

Antes de entrar en detalles acerca de cómo encontraremos la solución a este problema, veamos cómo está constituida la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n.

Teorema (1) (Estructura de la solución general de una ecuación lineal no homogénea de orden n)

Sea la ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R(x)$$

Con $P_1, \ldots, P_n$, R: $I \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Sea y_h la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación inicial

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

(entonces $y_h = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, donde $y_1, \ldots, y_n$ son n soluciones particulares que constituyen un sistema fundamental de soluciones de esta ecuación homogénea).

Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea.

Entonces, la solución general de esta ecuación es

$$y = y_h + y_p \qquad (^{**})$$

Demostración

Ciertamente $y = y_h + y_p$ posee n constantes arbitrarias.

Además

$$(y_n + y_p)^{(n)} + P_1(x)(y_h + y_p)^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)(y_h + y_p)' +$$

---

*Se hará la discusión del método de variación de parámetros para el caso de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de 2o. orden.

** Es el análogo del presentado anteriormente, donde se estudió el caso para ecuaciones de 1er. orden.

$$P_n(x)(y_n + y_p) =$$

$$[y_h^{(n)} + P_1(x)y_h^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y_h' + P_n(x)y_h] +$$

$$[y_p^{(n)} + P_1(x)y_p^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_p' + P_n(x)y_p]$$

El primer corchete de esta última expresión es cero, pues y_h es solución de la ecuación homogénea asociada, y el segundo corchete es $R(x)$, pues y_p es solución particular de la no homogénea.

Con esto queda probado que $y = y_h + y_p$ satisface a la ecuación y posee n constantes arbitrarias. Entonces es la solución general de la ecuación inicial.

Q.E.D.

Retomando nuestra discusión original queremos, a partir de y_1, solución (particular) de (**F**), construir la solución general de (**E**).

Según el teorema anterior, para construir la solución general de (**E**) necesitamos establecer la solución general de (**F**) y además conocer una solución particular de (**E**).

Para conocer la solución general de (**F**) no tenemos ningún problema, pues en la sección anterior vimos cómo construirla (a partir de y_1).

Tenemos entonces a la disposición la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

donde

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int P_1(x)dx} dx$$

El método de variación de parámetros es una extensión natural del método (que llamamos "variación del parámetro") considerado en la página 59 para el caso de ecuaciones lineales de primer orden, y consiste en suponer que la solución particular de (**E**) que necesitamos para construir la solución general de esta ecuación es de la forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

donde u_1 y u_2 son funciones por determinar.

Para lograr la determinación de u_1 y u_2 tendremos que "generar un par de ecuaciones" cuya solución nos dé precisamente estas funciones.

Podemos proceder como sigue:

Tenemos que

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2$$

Pediremos primeramente que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

Obtengamos y_p''

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'$$

Ahora, como $y_p'' + P_1(x) y_p' + P_2(x) y_p = R(x)$ tenemos

$$u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + P_1(x)\,(u_1 y_1' + u_2 y_2') + P_2(x)(u_1 y_1 + u_2 y_2)$$

$$= R(x)$$

o

$$u_1[y_1'' + P_1\,(x) y_1' + P_2(x) y_1] + u_2[y_2'' + P_1\,(x) y_2' + P_2(x) y_2]$$

$$+ u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x)$$

Los dos corchetes que aparecen en la última expresión son, por hipótesis, cero, teniendo entonces que la segunda condición por satisfacer u_1 y u_2 es que

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x)$$

Tenemos entonces el par de condiciones a satisfacerse

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x)$$

Observe que el determinante de este sistema es

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int P_1\,(x)\,dx}$$

(según lo mostrado en la sección anterior)

Entonces, resolviendo para u_1' y u_2' tenemos

$$u_1' = e^{\int P_1\,(x)\,dx} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix} = -\,e^{\int P_1\,(x)\,dx}\, y_2 R(x)$$

$$u_2' = e^{\int P_1(x)dx} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix} = e^{\int P_1(x)dx}\, y_1 R(x)$$

de donde

$$u_1 = -\int e^{\int P_1(x)dx}\, y_2 R(x)dx$$

$$u_2 = \int e^{\int P_1(x)dx}\, y_1 R(x)dx$$

y entonces la solución particular buscada es

$$\boxed{y_p = -y_1 \int e^{\int P_1(x)\,dx}\, y_2 R(x)dx + y_2 \int e^{\int P_1(x)\,dx}\, y_1 R(x)dx}$$

Ejemplo 1

Hallar la solución general de

$$(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y' - y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

sabiendo que $y_1 = \dfrac{1}{x}$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada (considere el intervalo $(1, +\infty)$).

Solución

Construyamos primeramente la segunda solución de la ecuación homogénea asociada. Tenemos

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P_1(x)\,dx}\, dx$$

En nuestro caso

$$P_1(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - x}{x^4 - x^3}$$

(que es continua en $(1, +\infty)$), de modo que

$$\int P_1(x)\,dx = \int \frac{2x^3 + 2x^2 - x}{x^3(x-1)}\,dx$$

$$= 3\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{1}{x}$$

por lo que

$$y_2 = \frac{1}{x}\int x^2\,\frac{x-1}{x^3}\,e^{1/x}\,dx = \frac{1}{x}\int e^{1/x}\,\frac{x-1}{x}\,dx$$

Resolvamos la integral que aparece en la última expresión

$$\int e^{1/x}\,\frac{x-1}{x}\,dx = \xrightarrow{x\,=\,1/t} = \int e^t\,\frac{1-t}{t^2}\,dt =$$

$$= \int t^{-2}e^t dt - \int t^{-1}e^t dt = \xrightarrow[\text{integral}]{\text{por partes la primera}}$$

$$= t^{-1}e^t = xe^{1/x}$$

de modo que

$$y_2 = e^{1/x}$$

Calculemos ahora la solución particular de la no homogénea.

Tenemos que

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$

con

$$u_1 = -\int e^{\int P_1(x)\,dx}\,y_2R(x)dx$$

$$= -\int \frac{x^3}{x-1}\,e^{-1/x}e^{1/x}\,\frac{(x-1)^2}{x(x^4-x^3)}\,dx$$

$$= -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x|$$

$$u_2 = \int e^{\int P_1(x)dx}\, y_1 R(x)dx$$

$$= \int \frac{x^3}{x-1}\, e^{-1/x}\, \frac{1}{x}\, \frac{(x-1)^2}{x(x^4 - x^3)}\, dx$$

$$= \int e^{-1/x}\, \frac{dx}{x^2} = e^{-1/x}$$

de modo que

$$y_p = -\frac{1}{x}\, ln\ |x| + e^{-1/x}\, e^{1/x} = 1 - \frac{ln\ |x|}{x}$$

y entonces la solución general buscada es

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 e^{1/x} + 1 - \frac{ln\ |x|}{x}$$

Ejemplo 2

Encontrar la solución general de la ecuación

$$(3x + 2x^2)y'' - 6(1 + x)y' + 6y = 6$$

sabiendo que una solución particular de la ecuación homogénea asociada es un polinomio (considere el intervalo $(0, +\infty)$).

Solución

Sea $y_1 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . + a_1 x + a_o = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

la solución particular de la homogénea asociada.

Entonces deberá cumplirse que

$$(3x + 2x^2)\ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)'' - 6(1 + x)\ (\sum_{i=0}^{n} a_i x_i)' + 6 \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

o sea

$$(3x + 2x^2)\ (\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2}) - 6(1 + x)\ (\sum_{i=1}^{n} ia_i x^{i-1}) +$$

$$6 \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

Haciendo las operaciones indicadas nos queda

$$3\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-1} + 2\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^i - 6\sum_{i=1}^{n} ia_i x^{i-1}$$

$$-6\sum_{i=1}^{n} ia_i x^i + 6\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

Expresión que puede escribirse como

$$3\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)\,i\,a_{i+1}x^i + 2\sum_{i=2}^{n} i(i-1)\,a_i x^i - 6\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\,a_{i+1}x^i$$

$$-6\sum_{i=1}^{n} i\,a_i x^i + 6\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

o bien, reacomodando términos:

$$\sum_{i=2}^{n-1}[(i+1)(i-6)a_{i+1} + 2(i-1)(i-3)a_i]x^i - 6a_2 x$$

$$-6a_1 + 6a_0 + 2(n-1)(n-3)\,a_n x^n = 0$$

Vemos entonces que podría tratarse de un polinomio de grado 1 ó 3, en el cual

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = a_0$$

$$3(-4)a_3 + 2(1)(-1)a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

(o sea que en realidad se trata de un polinomio de grado 1).

Por lo que el polinomio que es solución particular de la ecuación homogénea asociada es

$$y_1 = a_0(1+x)$$

Tomemos $a_o = 1$ por comodidad, quedándonos entonces que

$$y_1 = 1 + x$$

Construyamos ahora la segunda solución de la ecuación homogénea asociada.
En nuestra ecuación tenemos

$$P_1(x) = -\frac{6\,(1+x)}{3x+2x^2}$$

de modo que

$$e^{\int P_1(x)\,dx} = e^{-6\int \frac{1+x}{x(3+2x)}\,dx} = \frac{1}{x^2(3+2x)}$$

Entonces

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x)\,dx} dx = (1+x) \int \frac{1}{(1-x)^2} x^2(3+2x)dx$$

$$= (1+x)\left[(1+x)^2 - 3\,(1+x) - \frac{1}{1+x}\right]$$

$$= x^3 - 3(x+1)$$

Observe que, como obtuvimos $y_2 = x^3 - 3y_1$, podemos tomar como y_2 simplemente $y_2 = x^3$, pues en la solución general de la ecuación homogénea aparecerá

$$\widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2\,(x^3 - 3y_1) = (\widetilde{C}_1 - 3\,\widetilde{C}_2)y_1 +$$

$$+ \widetilde{C}_2 x^3 = C_1 y_1 + C_2 x^3$$

Calculemos ahora la solución particular de la ecuación no homogénea. Ésta es de la forma $y = y_1 u_1 + y_2 u_2$, donde

$$u_1 = -\int e^{\int P_1(x)\,dx}\, y_2\, R(x)dx$$

$$= -\int \frac{1}{x^2(3+2x)}\, x^3\, \frac{6}{x(3+2x)}\, dx = -\int \frac{6\,dx}{(3+2x)^2}$$

$$= \frac{3}{3+2x}$$

$$u_2 = \int e^{\int P_1(x)\,dx}\, y_1 R(x)dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2(3+2x)}\,(x+1)\,\frac{6}{x(3+2x)}\, dx = \int \frac{6(x+1)}{x^3(3+2x)^2}\, dx$$

$$= -\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3}+\frac{8}{9}\int\frac{dx}{(3+2x)^2}$$

$$= \frac{2}{9}\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}-\frac{4}{9}\frac{1}{3+2x}$$

De modo que la solución particular buscada es

$$y_p = (x+1)\frac{3}{3+2x}+x^3\left(\frac{2}{9}\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}-\frac{4}{9}\frac{1}{3+2x}\right)$$

$$= \frac{3(x+1)}{3+2x}+\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4x^3}{9(3+2x)}$$

$$= 1$$

Y entonces la solución general de la ecuación original es

$$y = C_1\,(x+1)+C_2x^3+1$$

NOTA: Observe que $y = -x$ es otra solución particular de la ecuación no homogénea, que se obtiene haciendo $C_1 = -1$ y $C_2 = 0$.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 3)

1. Hallar la solución general de la ecuación

$$(1-\cos x)y''-(\operatorname{sen}x-\cos^2x)y'-y(\cos^2x-\operatorname{sen}x)=\cos 2x$$

después de comprobar que

$$(1-\cos x)\frac{d^2}{dx^2}(e^{\operatorname{sen}x})-(\operatorname{sen}x-\cos^2x)\frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen}x})-(\cos^2x-\operatorname{sen}x)e^{\operatorname{sen}x}=0$$

2. Demuestre que

$$(1+\operatorname{sen}x)(e^x)''+(\operatorname{sen}^2x-\cos x-1)(e^x)'-(\operatorname{sen}^2x-\cos x+\operatorname{sen}x)e^x=0$$

y halle entonces la solución general de

$$(1+\operatorname{sen}x)y''+(\operatorname{sen}^2x-\cos x-1)y'-(\operatorname{sen}^2x-\cos x+\operatorname{sen}x)y=x^2$$

3. Demuestre que existe un polinomio de primer grado $P(x)$ tal que

$$P''(x)-6(1+x)P'(x)+6P(x)=0$$

y encuentre entonces la solución general de la ecuación

$$y'' - 6(1 + x)y + 6y = e^{4x}$$

4. Halle la solución de la ecuación

$$(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y' - y = \frac{(x - 1)^2}{2}$$

tal que $y(1) = y'(1) = 0$,

sabiendo que $y_1 = x^{-1}$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

5. Encuentre la solución de la ecuación

$$4(x^2 + x)y'' + 2(2x + 1)y' - y = 2(x^2 + x)^{1/2}$$

tal que $y(1) = \frac{2^{3/2}}{3}\ y'(1) = 2^{-1/2}$, sabiendo que $y_1 = (x + 1)^{1/2}$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

6. Halle la solución de la ecuación

$$y'' + 2x^{-1}y' - y = 4e^x$$

tal que $\lim_{x \to -\infty} y = 0$ y $y'(-1) = e^{-1}$, sabiendo que $y_1 = xe^{-x}$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

7. Es fácil descubrir una solución particular de la ecuación

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Halle entonces la solución general de la ecuación

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3e^x$$

8. Considere la ecuación diferencial

$$y''' + P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = R(x)$$

Sean y_1, y_2, y_3, 3 soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada. Es decir, sea

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$$

la solución general de tal ecuación. Procure una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$$

donde las funciones u_1, u_2, u_3 las determinamos a continuación.

Imponga las condiciones (sobre u_1, u_2, u_3) siguientes

$$y_1u_1' + y_2u_2' + y_3u_3' = 0$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + y_3'u_3' = 0$$

Demuestre entonces que debe tenerse que

$$y_1''u_1' + y_2''u_2' + y_3''u_3' = R(x)$$

Considere las últimas 3 expresiones como un sistema de ecuaciones en las indeterminadas u_1', u_2', u_3'. Demuestre que el determinante del sistema es $W(y_1, y_2, y_3)$. ¿Puede concluir entonces que existe solución única para el sistema? Explique. Demuestre entonces que una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p = y_1 \int \frac{W(y_2, y_3)R(x)}{W(y_1,y_2,y_3)}\,dx - y_2 \int \frac{W(y_1, y_3)R(x)}{W(y_1, y_2, y_3)}\,dx + y_3 \int \frac{W(y_1, y_2)R(x)}{W(y_1, y_2, y_3)}\,dx$$

9. Sabiendo que $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^{-1}$ son soluciones de la ecuación

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

encuentre la solución general de la ecuación

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^6$$

10. Considere la ecuación $y''' -4y' = 0$. Es fácil descubrir una solución particular de esta ecuación. Otras dos soluciones son $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{-2x}$. Encuentre la solución general de $y''' --4y' = x^3$.

11. Generalice el problema 8 y demuestre que una solución particular de la ecuación

$$y^{iv} + P_1(x)y''' + P_2(x)y'' + P_3(x)y' + P_4(x)y = R(x)$$

viene dada por la fórmula

$$y_p = -y_1 \int \frac{W(y_2, y_3, y_4)R(x)}{W(y_1, y_2, y_3, y_4)}\,dx + y_2 \int \frac{W(y_1, y_3, y_4)R(x}{W(y_1, y_2, y_3, y_4)}\,dx$$

$$- y_3 \int \frac{W(y_1, y_2, y_4)R(x)}{W(y_1, y_2, y_3, y_4)}\,dx + y_4 \int \frac{W(y_1, y_2, y_3)R(x)}{W(y_1, y_2, y_3, y_4)}\,dx$$

donde y_1, y_2, y_3, y_4 forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

12. Compruebe que $y = e^{kx}$, $k = 1, 2, 3, 4$ satisface la ecuación

$$y^{iv} - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = 0$$

y halle entonces la solución general de

$$y^{iv} - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = x^3$$

4. ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

En esta sección comenzaremos a estudiar algunos métodos para explicitar la solución de ecuaciones lineales. Hasta este momento lo que hemos hecho es demostrar que, bajo ciertas condiciones (continuidad de los coeficientes de la ecuación), siempre podemos hablar de la solución general de una ecuación lineal homogénea, y hemos también estudiado cómo se constituye esta solución general (sección 1). Se ha discutido además la problemática de, a partir de una solución particular conocida, construir la solución general de la ecuación de 2o. orden, ya sea ésta homogénea (sección 2) o no homogénea (sección 3). Sin embargo, no hemos visto aún *cómo se determinan*, las soluciones de una ecuación lineal. De esto nos ocuparemos en esta y las siguientes secciones.

Se hace la aclaración de que trabajaremos preferentemente con ecuaciones lineales de 2o. orden, aunque las ideas de los métodos expuestos sean fácilmente generalizables para órdenes superiores. Eventualmente en el mismo texto se encuentran estas generalizaciones.

Si consideramos entonces la ecuación

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x)$$

con P_1, P_2, $R: I \to \mathbb{R}$ funciones continuas, y quisiéramos ver un ''método general'' que nos permitiera explicitar la solución de esta ecuación o bien escribir en una fórmula su solución en términos de sus coeficientes P_1, P_2 y R, nos llevaríamos una desagradable sorpresa al ver que esto no es posible de realizar. Sin embargo, recuerde que ya probamos que tal solución *existe* y además que esta solución está constituida por la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular de la ecuación no homogénea, pero, como dijimos anteriormente, *no existe un método general que nos permita explicitar tal solución*.

Tendremos entonces que ser menos pretensiosos y concretarnos a estudiar tipos particulares de estas ecuaciones. Nos ocuparemos en esta sección de ecuaciones homogéneas, pues, al fin, éstas constituyen ''la mitad'' del estudio de una ecuación no homogénea (la otra ''mitad'' estaría relacionada con la obtención de una solución particular de la no homogénea).

Un tipo especial de ecuaciones lineales homogéneas para las cuales *sí* podemos explicitar su solución son las ecuaciones con coeficientes constantes, que son del tipo

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0)$$

Sobre ellas trabajaremos en esta sección.

4.1 Construcción de la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$

Veremos aquí un método bastante ''natural'' de abordar la problemática de explicitar las soluciones de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0$$

que no es más que una extensión del método que, para ecuaciones de primer orden, fue presentado en la página 56.

Nuevamente, nuestra idea guía será ''generar derivadas de productos''.
Sean b_1, b_2 tales que $b = b_1 + b_2$.
Escribimos entonces la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ como

$$ay'' + b_1 y' + b_2 y' + cy = 0$$

o bien

$$a(y'' + \frac{b_1}{a} y') + b_2 y' + cy = 0$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $e^{\frac{b_1}{a}x}$, lograríamos que

$$e^{\frac{b_1}{a}x} y'' + \frac{b_1}{a} e^{\frac{b_1}{a}x} y' = \frac{d}{dx} (e^{\frac{b_1}{a}x} y')$$

quedándonos entonces que

$$a \frac{d}{dx} (e^{\frac{b_1}{a}x} y') + b_2 (y' e^{\frac{b_1}{a}x} + \frac{c}{b_2} e^{\frac{b_1}{a}x} y) = 0$$

Observe que, por provocar la derivada de un producto en los dos primeros términos de la ecuación, descompusimos los dos últimos.

Aunque esto no sería así si pedimos que

$$\frac{c}{b_2} = \frac{b_1}{a}$$

pues en ese caso

$$y' e^{\frac{b_1}{a}x} + \frac{c}{b_2} e^{\frac{b_1}{a}x} y = \frac{d}{dx} (e^{\frac{b_1}{a}x} y)$$

Sigamos viendo lo que obtendríamos en nuestra ecuación original si aconteciera todo lo que hemos pedido hasta ahora acerca de sus coeficientes, y posteriormente regresemos a ver quiénes tendrían que ser b_1 y b_2 para que cumplan con las condiciones que hemos establecido.

Tenemos entonces nuestra ecuación original convertida en

$$a \frac{d}{dx} (e^{\frac{b_1}{a}x} y') + b_2 \frac{d}{dx} (e^{\frac{b_1}{a}x} y) = 0$$

o

$$\frac{d}{dx}\, e^{\frac{b_1}{a}x}(ay' + b_2y) = 0$$

de donde

$$e^{\frac{b_1}{a}x}(ay' + b_2y) = C_1 \qquad \text{(constante)}$$

o bien

$$y' + \frac{b_2}{a}y = \frac{C_1}{a}e^{-\frac{b_1}{a}x}$$

que es una ecuación lineal de primer orden que ya sabemos resolver.

Hagámoslo con la misma idea que estamos trabajando. Multiplicando por $e^{\frac{b_2}{a}x}$ para convertir al primer miembro de esta última ecuación en la derivada del producto $e^{\frac{b_2}{a}x}\, y$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}(e^{\frac{b_2}{a}x}y) = \frac{C_1}{a}e^{-\frac{b_1}{a}x}\, e^{\frac{b_2}{a}x}$$

de donde

$$e^{\frac{b_2}{a}x}y = \frac{C_1}{a}\int e^{\frac{b_2-b_1}{a}x}\,dx + C_2$$

Aquí tendremos que estudiar dos casos:

i) $\underline{b_2 \neq b_1}$

En tal caso obtenemos que

$$e^{\frac{b_2}{a}x}y = \frac{C_1}{b_2-b_1}\, e^{\frac{b_2-b_1}{a}x} + C_2$$

o

$$\boxed{y = C_1\, e^{-\frac{b_1}{a}x} + C_2\, e^{-\frac{b_2}{a}x}} \qquad \text{- - - } (\mathbf{G})$$

La expresión anterior nos invita a pensar que $y_1 = e^{-\frac{b_1}{a}x}$ y $y_2 = e^{-\frac{b_2}{a}x}$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones para nuestra ecuación.

Esto es verdad, pues el wronskiano de y_1 y y_2 es

$$W(e^{-\frac{b_1}{a}x}, e^{-\frac{b_2}{a}x}) = \frac{b_1 - b_2}{a} e^{\frac{b_1 - b_2}{a}x}$$

que es siempre diferente de cero, pues estamos suponiendo que $b_1 \neq b_2$. Entonces, la expresión (**G**) es la solución general de nuestra ecuación original.

ii) $\underline{b_2 = b_1}$

En este caso obtendríamos que

$$e^{\frac{b_2}{a}x} y = \frac{C_1}{a} x + C_2$$

y entonces

$$\boxed{y = C_1 \, x \, e^{-\frac{b_2}{a}x} + C_2 \, e^{-\frac{b_2}{a}x}} \quad \text{- - - } (\mathbf{H})$$

Se comprueba fácilmente que $y_1 = xe^{-\frac{b_2}{a}x}$ y $y_2 = e^{-\frac{b_2}{a}x}$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones para nuestra ecuación original, por lo que en este caso (**H**) sería la solución general de la ecuación.

Veamos ahora quiénes son b_1 y b_2. Recuerde que pedimos lo siguiente

$$b_1 + b_2 = b$$

$$b_1 . \, b_2 = ac$$

es decir, deberá cumplirse que

$$b_1^2 - b\, b_1 + ac = 0$$

de donde

$$b_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

y

$$b_2 = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2}$$

Observe que $-\frac{b_1}{a}$ y $-\frac{b_2}{a}$ ($\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$ respectivamente) son precisamente las raíces de la ecuación

$$am^2 + bm + c = 0$$

Llamando entonces $m_1 = -\frac{b_1}{a}$, $m_2 = -\frac{b_2}{a}$, podemos resumir nuestra discusión anterior como sigue:

La solución general de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0$$

es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

o

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

donde m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación.

$$am^2 + bm + c = 0$$

dependiendo de si $m_1 \neq m_2$ o $m_1 = m_2 = m$ respectivamente.
Y así entonces, por increíble que parezca, para resolver una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de 2o. orden sólo hay que saber resolver . . . ¡una ecuación cuadrática!

Definición

Dada la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_o y = 0.$$

se llama *ecuación característica* de esta ecuación diferencial a la expresión

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_o = 0.$$

Discutamos ahora el caso en que las raíces de la ecuación característica sean complejas.

4.2 Caso de raíces complejas

Se vio que para resolver la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0$$

sólo había que encontrar las raíces de la ecuación característica

$$am^2 + bm + c = 0$$

Supongamos que estas raíces son complejas. Llamemos

$$m_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$$

$$m_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$$

Puesto que estas raíces son distintas, la solución general de la ecuación vendría dada por

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

Sustituyendo los valores de m_1 y m_2 correspondientes obtenemos

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\,\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\,\beta x)}$$

$$= e^{\alpha x(} C_1 e^{i\,\beta x} + C_2 e^{-i\,\beta x)}$$

Recordando la fórmula de Euler

$$e^{\pm i\,\beta x} = \cos\beta x \pm i \operatorname{sen} \beta x$$

obtenemos la siguiente expresión para la solución general de la ecuación

$$y = e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_2) \cos \beta\, x + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen} \beta\, x\right]$$

Llamando $C_1 + C_2 = \widetilde{C_1}$ y $i(C_1 - C_2) = \widetilde{C_2}$ obtenemos la solución general de la ecuación inicial como

$$\boxed{y = e^{\alpha x} (\widetilde{C_1} \cos \beta\, x + \widetilde{C_2} \operatorname{sen} \beta\, x)}$$

El lector puede objetar, con justa razón, el hecho de que hemos introducido constantes complejas en la expresión de la solución general, la cual es una función que siempre se ha supuesto toma valores reales.

Sin embargo, se trata sólo de una ''ilusión óptica'', pues en realidad tanto $\tilde{C}_1$ como $\tilde{C}_2$ son constantes reales tal como veremos en seguida.

Consideremos la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0$$

tal que su ecuación característica tenga raíces complejas. Llamamos m_1 y m_2 a estas raíces. Queremos encontrar la solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_0'$.

Según lo visto anteriormente, tenemos que la solución general de esta ecuación es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

de modo que

$$y' = C_1 m_1 e^{m_1 x} + C_2 m_2 e^{m_2 x}$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos el par de ecuaciones

$$C_1 e^{m_1 x_0} + C_2 e^{m_2 x_0} = y_0$$

$$C_1 m_1 e^{m_1 x_0} + C_2 m_2 e^{m_2 x_0} = y_0'$$

Resolviendo para C_1 y C_2 nos queda

$$C_1 = \frac{m_2 y_0 - y_0'}{(m_2 - m_1) e^{m_1 x_0}}$$

$$C_2 = \frac{y'_0 - m_1 y_0}{(m_2 - m_1) e^{m_2 x_0}}$$

Observe que tanto C_1 como C_2 son *números complejos*, tales que *

$$\overline{C_1} = \left[\frac{\overline{m_2 y_0 - y_0'}}{(m_2 - m_1) e^{m_1 x_0}} \right] = \frac{\overline{(m_2 y_0 - y_0')}}{\overline{(m_2 - m_1) e^{m_1 x_0}}} =$$

---

* Recordando que la operación de conjugación compleja $\overline{Z} = \overline{(x + iy)} = x - iy$ goza de las propiedades

i) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

ii) $\overline{Z_1 . Z_2} = \overline{Z_1 . Z_2}$

iii) $\left[\dfrac{\overline{Z_1}}{Z_2} \right] = \dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

$$= \frac{\overline{m_2}y_0 - y_0'}{(\overline{m_2} - \overline{m_1})e^{\overline{m_1x_0}}} = \frac{y_0' - m_1y_0}{(m_2 - m_1)e^{m_2x_0}} = C_2$$

donde se usó que $\overline{m_1} = m_2$ (ó $\overline{m_2} = m_1$) y $e^{\overline{m_1x_0}} = e^{m_2x_0}$

Ahora queda claro por qué $\tilde{C}_1 = C_1 + C_2$ y $\tilde{C}_2 = i(C_1 - C_2)$, las constantes arbitrarias que aparecen en la solución general de la ecuación que estamos estudiando, son contantes *reales*.

4.3 Resumiendo

Los resultados hasta ahora obtenidos en esta sección se resumen en el siguiente cuadro

<table>
<tr><td colspan="2">Ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$
Ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$</td></tr>
<tr><td><i>Tipo de raíces</i></td><td><i>Solución general</i></td></tr>
<tr><td>Reales distintas m_1, m_2</td><td>$y = C_1 e^{m_1x} + C_2 e^{m_2x}$</td></tr>
<tr><td>Reales iguales $m_1 = m_2 = m$</td><td>$y = C_1 e^{mx} + C_2 xe^{mx}$</td></tr>
<tr><td>Complejas $m_1 = \alpha + i\beta$
$m_2 = \alpha - i\beta$</td><td>$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$</td></tr>
</table>

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 0$

Solución

La ecuación característica es

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = 3$, $m_2 = 2$

Entonces la solución general de la ecuación es

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $y'' + 2y' + y = 0$

Solución

La ecuación característica es

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = m_2 = -1$.

Entonces la solución general de la ecuación es

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $y'' + y' + y = 0$

Solución

La ecuación característica es

$$m^2 + m + 1 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Entonces, la solución general de la ecuación es

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

4.4 Generalizando

Los resultados expuestos anteriormente se pueden generalizar fácilmente para una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes.

Sea la ecuación

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Veamos que $y = e^{mx}$ es solución para ''determinados'' valores de m.

Tenemos que

$$y^{(j)} = m^j e^{mx} \qquad\qquad j = 1, \ldots, n$$

de modo que, sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando por e^{mx} (que siempre es diferente de cero) obtenemos

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_o = 0$$

que es la ecuación característica de la ecuación diferencial original.

Escribiendo la ecuación característica como

$$(m - m_1)^{k_1} (m - m_2)^{k_2} \ldots (m - m_p)^{k_p} = 0$$

donde $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$, se puede demostrar que la solución general de la ecuación diferencial original es:

$$y = C_{11} e^{m_1 x} + C_{12} x e^{m_1 x} + \ldots + C_{1k_1} x^{k_1 - 1} e^{m_1 x}$$

$$+ C_{21} e^{m_2 x} + C_{22} x e^{m_2 x} + \ldots + C_{2k_2} x^{k_2 - 1} e^{m_2 x}$$

$$+ \ldots +$$

$$+ C_{p1} e^{m_p x} + C_{p2} x e^{m_p x} + \ldots + C_{pk_p} x^{k_p - 1} e^{m_p x}$$

El argumento para demostrar que la expresión anterior es en efecto la solución general de la ecuación diferencial dada, resulta muy complicado para las pretensiones de este texto (la complicación reside casi por completo en una notación demasiado cargada de subíndices).

Sin embargo, podemos dar un argumento ''parcial'' que puede ayudar al lector a comprender el por qué de tal estructura de la solución general.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (\tilde{m})^j y^{(k-j)} = 0$$

donde m es algún número real.

Entonces, la ecuación característica es

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \, (\tilde{m})^j \, (m)^{k-j} = (m - \tilde{m})^k = 0$$

Esta ecuación tiene k *raíces iguales* (a $\tilde{m}$).

Ciertamente $y_1 = e^{\tilde{m}x}$ es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

Más aún, mostraremos que $y = x^r e^{\tilde{m}x}$, donde $0 \leq r \leq k - 1$ es solución de tal ecuación.

En efecto, estudiemos la expresión

$$g(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (\tilde{m})^j (x^r e^{\tilde{m}x})^{(k-j)}$$

Recordando que (derivada q-ésima del producto de las funciones u y v)

$$(uv)^{(q)} = \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} (u)^{(s)} (v)^{(q-s)}$$

tenemos que

$$(x^r e^{\tilde{m}x})^{(k-j)} = \sum_{s=0}^{k-j} \binom{k-j}{s} (x^r)^{(s)} (e^{\tilde{m}x})^{(k-j-s)}$$

Calculando las derivadas indicadas nos queda

$$(x^r e^{\tilde{m}x})^{(k-j)} = \sum_{s=0}^{k-j} \binom{k-j}{s} r.(r-1) \ldots (r-s+1) x^{r-s} (\tilde{m})^{k-j-s} \cdot e^{\tilde{m}x}$$

de modo que

$$g(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (\tilde{m})^j \left[\sum_{s=0}^{k-j} \binom{k-j}{s} r(r-1) \ldots (r-s+1) x^{r-s} (\tilde{m})^{k-j-s} e^{\tilde{m}x} \right]$$

El lector puede verificar fácilmente que la expresión anterior se puede reescribir como

$$g(x) = e^{\tilde{m}x} \sum_{s=0}^{k-1} \left[\sum_{j=0}^{k-s} \binom{k}{j} \binom{k-j}{s} (-1)^j (\tilde{m})^{k-s} r.(r-1) \ldots (r-s+1) \right] x^{r-s}$$

Es decir, hemos escrito $g(x)$ como un polinomio de grado r en potencias decrecientes de r. Además, como

$$\binom{k}{j}\binom{k-j}{s} = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}\cdot\frac{(k-j)!}{s!\,(k-s-j)!} =$$

$$= \frac{k!}{s!\,(k-s)!}\cdot\frac{(k-s)!}{j!\,(k-s-j)!} = \binom{k}{s}\binom{k-s}{j}$$

podemos escribir $g(x)$ como

$$g(x) = e^{\widetilde{m}x}\sum_{s=0}^{k-1}\binom{k}{s}(r)(r-1)\ldots(r-s+1)\left[\sum_{j=0}^{k-s}\binom{k-s}{j}(-1)^j(\widetilde{m})^{k-s}\right]x^{r-s}$$

Ahora sabemos que $\widetilde{m}$ es una raíz de la ecuación característica, es decir que

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(\widetilde{m})^k = 0$$

Es obvio que si $\widetilde{m}$ es raíz de $(m-\widetilde{m})^k = 0$, lo será también de $(m-\widetilde{m})^{k-s} = 0$ con $s \leq k-1$.

Es decir que

$$\sum_{j=0}^{k-s}\binom{k-s}{j}(-1)^j(\widetilde{m})^{k-s} = 0 \qquad s \leq k-1$$

por lo que

$$g(x) = 0$$

Hemos probado que $y = x^r e^{\widetilde{m}x}$, $0 \leq r \leq k-1$ *satisface* la ecuación dada, con lo cual hemos obtenido un conjunto de k soluciones particulares de tal ecuación (de orden k).

Es fácil ver que estas k soluciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. En efecto

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_i x^i e^{\widetilde{m}x} = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$

$$e^{\widetilde{m}x}\sum_{i=0}^{k-1} C_i x^i = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

UNIVERSIDAD DE
BIBLIOTECA

$$\Rightarrow \qquad C_0 = C_1 = \ldots = C_{k-1} = 0$$

Entonces, la solución general de la ecuación es

$$y = C_1 e^{\tilde{m}x} + C_2 x e^{\tilde{m}x} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{\tilde{m}x}$$

que es la expresión típica para la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden k, cuya ecuación característica posee k raíces (reales) iguales.

Por último, veamos qué pasa si la ecuación diferencial posee sólo raíces complejas repetidas.

En este caso, es claro que el orden de la ecuación debe ser par. Digamos que la ecuación característica de la ecuación se escribe como

$$(m - \lambda_1)^p (m - \lambda_2)^p = 0$$

(el orden de la ecuación es entonces $2p$) con

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Se deja al lector demostrar que en este caso la solución general de la ecuación es

$$y = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_p x^{p-1}) e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$+ (C_1' + C_2' x + \ldots + C_p' x^{p-1}) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

donde (C_1, C_2 , . . . C_p, C_1' , . . . , C_p' son las $2p$ constantes arbitrarias que tenían que aparecer en la solución general).

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación

$$y^{(IV)} + 2y'' + 1 = 0$$

Solución

La ecuación característica es

$$m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$$

que posee raíces complejas i, $-i$ de multiplicidad 2. Entonces, la solución general es

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 5 Resolver la ecuación

$$y^{(V)} - 6y^{(IV)} + 13y''' - 14y'' + 13y' - 8y = 0$$

Solución

La ecuación característica es

$$m^5 - 6m^4 + 13m^3 - 14m^2 + 12m - 8 = 0$$

que se puede escribir como

$$(m^2 + 1)(m - 2)^3 = 0$$

Entonces la solución general de la ecuación es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 e^{2x} + C_4 x e^{2x} + C_5 x^2 e^{2x}$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 4)

En los ejercicios siguientes (1 — 10) se da la ecuación característica de cierta ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. Hallar la ecuación.

1. $m^2 + 3m - 2 = 0$.
2. $m^2 + 10m = 0$.
3. $m^4 + 3m^2 + 5 = 0$.
4. $m^4 + 5m^3 = -2m^2 + 1$.
5. $(m^2 + 1)^3 = 0$.
6. $(m + 1)(4m^2 + 2m + 3) = 0$.
7. $(m^3 + 2)^2 (m + 3) = 0$.
8. $m + 1 = 0$.
9. $m^2 + 1 = 0$.
10. $m^{10} = 0$.

En los ejercicios siguientes (11 — 20) se dan las raíces de la ecuación característica de cierta ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. Hallar la solución general de la ecuación.

11. $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.
12. $m_1 = 0$, $m_2 = 3$.
13. $m_1 = 1$, $m_2 = i$, $m_3 = -i$.
14. $m_1 = m_2 = 0$.
15. $m_1 = m_2 = i$, $m_3 = m_4 = -i$.
16. $m_1 = 4 + 6i$, $m_2 = 4 - 6i$.
17. $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$, $m_5 = 3$.
18. $m_1 = m_2 = 5 + 2i$, $m_3 = m_4 = 5 - 2i$, $m_5 = m_6 = 0$.
19. $m_j = j$, $j = 1,2,\ldots,n$.

20. $m_{2j-1} = (2j - 1)^2 - 3(5j + 6)^3\, i$
$m_{2j} = (2j - 1)^2 + 3(5j + 6)^3\, i$, $j = 1,2,\ldots,n$.

En los ejercicios siguientes (21 — 30) se da el sistema fundamental de soluciones de cierta ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. Hallar la ecuación.

21. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$.
22. $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$.
23. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$.
24. $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$.
25. $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = xe^{-x}$.
26. $y_1 = e^x \operatorname{sen} 3x$, $y_2 = e^x \cos 3x$, $y_3 = e^{2x}$, $y_4 = x\, e^{2x}$.
27. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x \operatorname{sen} x$, $y_3 = x\, e^x \operatorname{sen} x$, $y_4 = e^x \cos x$, $y_5 = x\, e^x \cos x$.
28. $y_{j+1} = x^j$, $j = 0,1,2,\ldots,n$.
29. $y_{j+1} = x^j e^{5x}$, $j = 0,1,2,\ldots,n$.
30. $y_{2j-1} = x^{2j-1} e^{-x} \operatorname{sen} x$, $y_{2j} = x^{2j} e^{-x} \cos x$, $j = 1,2,\ldots,n$.

En los ejercicios siguientes (31 — 45) resuelva la ecuación diferencial dada.

31. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
32. $6y'' + 10y' - 5y = 0$.
33. $8y'' - y = 0$.
34. $y'' + y' - y = 0$.
35. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
36. $y'' - 7y' + 10y = 0 \qquad y(0) = y'(0) = 2$.
37. $y'' - 8y' + 16y = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.
38. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.
39. $y^{iv} - 2y'' + y = 0 \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0\ y'''(0) = 1$.
40. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$.
41. $y^{v} + 4y''' + 4y' = 0$.
42. $y^{(12)} + 3y^{(8)} + 3y^{(4)} + y = 0$.
43. $y^{(12)} - 3y^{(8)} + 3y^{(4)} - y = 0$.
44. $y^{iv} - 7y''' + 8y'' + 7y' + 15y = 0$.
45. $y^{(9)} - 30y^{(7)} + 273y^{(5)} - 820y''' + 576y' = 0$.

    (Sugerencia: la solución es de la forma $y = \sum c_j e^{a_j x}$, donde a_j es un real para $j = 1,2,\ldots,9$).
46. Si m es una constante positiva, hallar la solución de la ecuación $y''' - my'' + m^2y' - m^3 y = 0$, tal que $y(0) = y'(0) = 0$ y $y''(0) = 1$.
47. Considere la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$, donde $b > \pm (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}$. Demuestre que si $y = y(x)$ es cualquier solución de esta ecuación, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$.
48. Considere la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$, donde $b < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$. Demuestre que si $y = y(x)$ es cualquier solución de esta ecuación, existe una constante $K > 0$ tal que $|y(x)| < K$ para toda x positiva.

▲ 49. Halle la solución general de la ecuación

$$4a^2y''' + 4a(b + a)y'' + b(4a + b)y' + b^2y = 0$$

Considere los dos casos $b = -2a$ y $b = 2a$.

50. Se sabe que $y = e^x \cos x$ es solución de una cierta ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Hallar la solución de esta ecuación que junto con su derivada valga uno para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

51. Una curva solución $u(x)$ de la ecuación $y'' - 3y' - 4y = 0$ corta a una curva solución $v(x)$ de la ecuación $y'' + 4y' - 5y = 0$ en el origen. Determinar $u(x)$ y $v(x)$ si ambas poseen la misma pendiente en el origen de coordenadas y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(v(x))^4}{u(x)} = \frac{5}{6}$$

52. Algunas ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes variables pueden reducirse, por medio de algún cambio de variable independiente adecuado, a una ecuación del mismo tipo pero con coeficientes constantes, y por lo tanto se pueden resolver explícitamente. Por ejemplo, si en la ecuación $x^2y'' + xy' + y = 0$ hacemos $x = e^t$, donde t es una nueva variable independiente, la ecuación se transforma en $y'' + y = 0$ (donde $y = y(t)$), cuya solución general es $y = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$, y entonces la solución general de la ecuación original sería $y = C_1 \cos lnx + C_2 \operatorname{sen} lnx$. En este problema se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación $y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$ pueda reducirse a una ecuación con coeficientes constantes por medio del cambio de variable independientes (de x a t) según la relación $t = h(x)$. Demuestre que la ecuación diferencial $y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$ se transforma en

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{d^2t}{dx^2} + P_1(x)\frac{dt}{dx}\right)\frac{dy}{dt} + P_2(x)\,y = 0$$

cuando se hace el cambio $t = h(x)$. Concluya entonces que una condición necesaria y suficiente para que la ecuación transformada tenga coeficientes constantes es que

$$t = h(x) = \int_a^x [P_2(u)]^{\frac{1}{2}}\,du$$

(para que el coeficiente de y sea constante) y

$$\frac{\dfrac{d^2t}{dx^2} + P_1(x)\dfrac{dt}{dx}}{P_2(x)} = \frac{P_2'(x) + 2P_1(x)P_2(x)}{[P_2(x)]^{3/2}}$$

sea una constante (para que el coeficiente de y' sea constante).

53. Diga si las siguientes ecuaciones se pueden transformar en ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. En caso afirmativo encuentre su solución general.

a) $3x^2y'' + 5xy' + 10y = 0$.
b) $y'' + xy' + y = 0$.
c) $y'' + xy' + e^{-x^2}y = 0$.
d) $(x-3)^2y'' + 3(x-3)y' + 4y = 0$.
e) $[2xln(x)]y'' - y' + [2xln^2x]y = 0$.
f) $xy'' + 3y' - \dfrac{5}{x}y = 0$.
g) $xy'' + (x^2-1)y' + x^3y = 0$.

54. Demuestre que la ecuación $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ (conocida como ecuación de Euler) siempre puede reducirse a una ecuación con coeficientes constantes (ver sección 7 de este mismo capítulo).

5. ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Queremos ahora estudiar cómo obtener soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas (con coeficientes constantes) pues con ellas y la solución general de la ecuación homogénea asociada podremos establecer la solución general de la ecuación no homogénea correspondiente.

Una alternativa para obtener tal solución particular es por medio del método de variación de parámetros discutido en la sección 3. Más concretamente, sea la ecuación

$$ay'' + by' + cy = R(x)$$

y consideremos la ecuación homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Ya vimos en la sección anterior cómo obtener y_1 y y_2 tales que $y = C_1y_1 + C_2y_2$ sea la solución general de esta ecuación.

Pensemos entonces que la solución particular de la ecuación no homogénea buscada es de la forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

donde u_1 y u_2 las determinamos a continuación. Pidiendo que

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$$

y sustituyendo y_p, junto con sus derivadas en la ecuación diferencial (no homogénea) obtenemos que

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = \frac{1}{a}R(x)$$

Resolviendo para u_1' y u_2' del sistema formado por las dos últimas expresiones obtenemos

$$u_1' = -\frac{y_2R(x)}{aW(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{y_1R(x)}{aW(y_1, y_2)}$$

por lo que la solución particular buscada será

$$\boxed{y_p = -y_1\int\frac{y_2R(x)}{aW(y_1,y_2)}dx + y_2\int\frac{y_1R(x)}{aW(y_1, y_2)}dx}$$

Veamos un ejemplo

Ejemplo 1

Obtener la solución general de

$$y'' + 2y' + 3y = e^{2x}$$

Solución

Obtengamos primeramente la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

La ecuación característica es

$$m^2 + 2m + 3 = 0$$

cuyas raíces son

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

por lo que la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x)$$

o bien, el conjunto fundamental de soluciones está formada por

$$y_1 = e^{-x} \cos \sqrt{2}x, \; y_2 = e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x$$

Calculemos el wronskiano de y_1 y y_2 para aplicar la fórmula de variación de parámetros

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} \cos \sqrt{2}\, x & e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2} \\ -e^{-x}(\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x + \cos \sqrt{2}\, x) & e^{-e}(\sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, x - \operatorname{sen} \sqrt{2} x) \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-2x}$$

Entonces, una solución particular de la ecuación no homogénea es, según la fórmula de variación de parámetros

$$y_p = -e^{-x} \cos \sqrt{2}\, x \int \frac{e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x \cdot e^{2x}}{\sqrt{2} \quad e^{-2x}}\, dx$$

$$+ \; e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x \int \frac{e^{-x} \cos \sqrt{2}\, x \cdot e^{2x}}{\sqrt{2}\, e^{-2x}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-x} \cos\sqrt{2}\, x \int e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x\, dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x \int e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x\, dx$$

Resolvamos la primera de las integrales que aparecen en la última expresión (por partes)

$$\int e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x\, dx = \xrightarrow[dV\, =\, \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x]{U\, =\, e^{3x}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x + \frac{3}{\sqrt{2}} \int e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x\, dx = \xrightarrow[dV\, =\, \cos\sqrt{2}\, x]{U\, =\, e^{3x}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x + \frac{3}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x - \frac{3}{\sqrt{2}} \int e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x\, dx \right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2}\, e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x - \frac{9}{2} \int e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x\, dx$$

de donde

$$\int e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x\, dx = \frac{2}{11} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2}\, e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x \right]$$

Para resolver la segunda de las integrales que aparecen en la expresión de y_p procedemos una vez por partes y usamos el resultado ya obtenido de la primera integral

$$\int e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x\, dx = \xrightarrow[dV\, =\, \cos\sqrt{2} x]{U\, =\, e^{3x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x - \frac{3}{\sqrt{2}} \int e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x\, dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \bullet \frac{2}{11} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2}\, e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x \right]$$

$$= \frac{2}{11} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2} e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x \right]$$

Entonces, la solución particular buscada es

$$y_p = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \cos\sqrt{2}\, x \left[\frac{2}{11} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2} e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x \right]\right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x \left[\frac{2}{11} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{3x} \operatorname{sen}\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2} e^{3x} \cos\sqrt{2}\, x \right]\right]$$

$$= \frac{1}{11} e^{2x}$$

de modo que la solución general de la ecuación original es

$$y = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x) + \frac{1}{11}e^{2x}$$

Ejemplo 2

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Solución

Resolvamos primeramente

$$y'' - y = 0$$

La ecuación característica es

$$m^2 - m = m\,(m - 1) = 0$$

que tiene por raíces $m_1 = 0$, $m_2 = 1$.
Entonces, la solución general de esta ecuación homogénea es

$$y = C_1 + C_2e^x$$

o bien, el conjunto fundamental de soluciones es

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^x$$

Calculemos $W(1, e^x)$.

$$W(1, e^x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x$$

de modo que una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p = -\int \frac{e^x\dfrac{e^x}{1 + e^x}}{e^x}\,dx + e^x\int \frac{\dfrac{e^x}{1 + e^x}}{e^x}\,dx$$

$$= -\int \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx + e^x\int \frac{dx}{(1 + e^x)}$$

$$= -\,ln(1 + e^x) + e^x\int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x} + 1}$$

$$= -\ln(1+e^x) - e^x \ln(1+e^{-x})$$

por lo que

$$y_p = -\ln(1+e^x) - e^x \ln(1+e^{-x})$$

y entonces la solución general de la ecuación original es

$$y = C_1 + C_2e^x - \ln(1+e^x) - e^x\ln(1+e^{-x})$$

Veremos ahora otro método que nos permitirá obtener soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes, conocido como *método de los coeficientes indeterminados.*

Para introducirnos al estudio de este método retomemos el ejemplo 1 anteriormente resuelto.

Tenemos entonces la ecuación

$$y'' + 2y' + 3y = e^{2x}$$

y queremos obtener una solución particular de ella.

El método de los coeficientes indeterminados se basa en hacer ''propuestas inteligentes'' como candidatos a soluciones particulares. Por ejemplo, analizando la ecuación vemos que lo que nos interesa obtener es una función y_p tal que: derivada dos veces, sumándole dos veces la función derivada una vez y sumándole por último tres veces esta función nos dé por resultado final e^{2x}.

¿Qué función tiene la propiedad de que si le sumamos múltiplos de sus derivadas de primero y segundo orden nos da por resultado e^{2x}?

No necesitaremos pensar mucho para responder que tal función tiene que ser del tipo

$$y_p = A\,e^{2x}$$

donde A es alguna constante por determinar (i.e. A es un coeficiente indeterminado).

Entonces, para hallar y_p hacemos la siguiente propuesta: y_p tiene que ser de la forma Ae^{2x}.

En tal casos tendríamos que

$$y_p' = 2\,Ae^{2x}$$

$$y_p'' = 4\,Ae^{2x}$$

de modo que, sustituyendo en la ecuación diferencial de la cual y_p es solución, obtenemos

$$4\,Ae^{2x} + 2(2\,Ae^{2x}) + 3\,Ae^{2x} = e^{2x}$$

de donde

$$A = \frac{1}{11}$$

y nuestra solución particular buscada será

$$y_p = \frac{1}{11} e^{2x}$$

que es el mismo resultado al que llegamos en el ejemplo 1. Se ha usado un ejemplo en el cual el método de coeficientes indeterminados resulta sumamente más ventajoso que cualquier otro procedimiento que nos permita obtener la solución particular deseada, pues basta ver que con este método *no hicimos ninguna integral* y además no tuvimos que resolver primeramente la ecuación homogénea asociada para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea*, en contraste con el método de variación de parámetros usado en el ejemplo (1), en el cual tuvimos que hacer dos integrales y además resolver previamente la ecuación homogénea asociada.

Sin embargo, el método de los coeficientes indeterminados se aplica en un número sumamente limitado de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes (sólo en aquéllas para las cuales el término $R(x)$ permita hacer ''propuestas inteligentes'' de la forma de la solución particular, tal como se hizo en el ejemplo anterior), aunque, como ya se vio con el ejemplo 1 resuelto por este método y se seguirá viendo en los ejemplos subsecuentes, cuando el método de los coeficientes indeterminados es aplicable resultará una tarea muy simple obtener soluciones particulares de las ecuaciones no homogéneas correspondientes.

Así, por ejemplo, mientras en el ejemplo 1 tenemos la alternativa de usar el método de los coeficientes indeterminados en lugar de variación de parámetros, en el ejemplo 2 no existe tal alternativa; en este caso el método de los coeficientes indeterminados *no* es aplicable y habrá entonces que proceder por el método de variación de parámetros, tal como se hizo en la solución de tal ejemplo.

Concretemos ahora los casos en los que es posible aplicar el método de los coeficientes indeterminados.

Si tenemos la ecuación

$$ay'' + by' + cy = R(x)$$

y queremos obtener una solución particular de ella, el método de los coeficientes indeterminados se puede aplicar cuando $R(x)$ es del tipo

i) $Ke^{\alpha x}$, $K, \alpha \in \mathcal{R}$
ii) $C \cos \beta x$, $C, \beta \in \mathcal{R}$
iii) $C \operatorname{sen} \beta x$
iv) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
v) Sumas y/o productos de *i*), *ii*), *iii*), y *iv*)

---

* En general sí tendremos que resolver primeramente la ecuación homogénea asociada antes de proceder con este método a obtener soluciones particulares de la no homogénea. Aunque esto será sólo para hacer una buena propuesta de tal solución, lo cual se discutirá más adelante.

En cada uno de estos casos es siempre posible proponer la forma de la solución particular, como veremos a continuación.

i) Si $R(x)$ es de la forma $Ke^{\alpha x}$, K, $\alpha \in \mathbb{R}$, nuestra propuesta de solución particular será

$$y_p = Ae^{\alpha x} \qquad *$$

donde A es un coeficiente que se determina al imponer la condición de que y_p es solución de la ecuación dada.

Ejemplo 3

Hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' + 5y' + 10y = -2\,e^{3x}$$

Solución

Proponemos que y_p sea de la forma

$$y_p = A\,e^{3x}$$

Entonces $y_p' = Ae^{3x}$, $y_p'' = 9\,Ae^{3x}$, de modo que sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando por e^{3x} (que siempre es diferente de cero) obtenemos que

$$A = -\frac{1}{17}$$

por lo que

$$y_p = -\frac{1}{17}\,e^{3x}$$

ii) y *iii*) Si $R(x)$ es de la forma $C\cos\beta x$, $\tilde{C}\operatorname{sen}\beta x$, o $C\cos\beta x + \tilde{C}\operatorname{sen}\beta x$, la solución particular que proponemos es

$$y_p = A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x$$

donde A y B son los coeficientes indeterminados (por determinar).

Ejemplo 4

Hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' + 2y' + 6y = 4\operatorname{sen} 2\,x$$

---

* Usaremos letras mayúsculas para designar los coeficientes indeterminados.

Solución

Proponemos para y_p la siguiente fórmula

$$y_p = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x$$

de donde

$$y_p' = -2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x$$

$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\,2x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y agrupando términos semejantes, obtenemos que

$$(2A + 4B)\cos 2x + (2B - 4A)\,\text{sen}\,2x = 4\,\text{sen}\,2x$$

de donde los coeficientes A y B deben ser tales que

$$\begin{aligned} 2A + 4B &= 0 \\ 2B - 4A &= 4 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A = -\dfrac{4}{5}$, $B = \dfrac{2}{5}$, por lo que la solución particular buscada es

$$y_p = -\frac{4}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\,\text{sen}\,2x$$

Observación

En el ejemplo anterior $R(x)$ es igual a 4 sen $2x$, y sin embargo la solución particular propuesta no fue de la forma $y_p = A\,\text{sen}\,2x$, como de primera instancia pudiera haberse esperado.

La razón de esto se hará evidente si intentamos obtener y_p como está propuesta anteriormente. En tal caso tendríamos $y_p' = 2A\cos 2_x$, $y_p'' = 4A\,\text{sen}\,2x$, de modo que sustituyendo en la ecuación diferencial obtendríamos

$$2A\,\text{sen}\,2x + 4A\cos 2x = 4\,\text{sen}\,2x$$

y vemos que no existe valor de A que haga de la igualdad anterior una identidad.

iv) Si $R(x)$ es un polinomio de grado n la solución particular propuesta será también un polinomio de grado n con sus coeficientes indeterminados.

Ejemplo 5

Hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' - y' + y = x^3$$

Solución

Proponemos que y_p sea

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

de donde

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ax + 2B + C \\ y_p'' &= 6Ax + 2B \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y agrupando términos semejantes obtenemos que

$$Ax^3 + (B - 3A)x^2 + (6A - 2B + C)x + D - C + 2B = x^3$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B - 3A &= 0 \\ 6A - 2B + C &= 0 \\ D - C + 2B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 3 \\ C &= 0 \\ D &= -6 \end{aligned}$$

y entonces, la solución particular buscada es

$$y_p = x^3 + 3x^2 - 6$$

Observación

En el ejemplo anterior $R(x)$ es un polinomio de grado 3 en el cual sólo aparece el término x^3. Sin embargo, la solución particular que se propuso fue un polinomio de grado 3 *completo*. ¿Podría explicar el lector este hecho?

v) En el caso de que $R(x)$ sea una suma de expresiones del tipo *i*), *ii*), *iii*) y/o *iv*) podemos usar el hecho siguiente

Proposición

Sea la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = \sum_{i=1}^{s} R_i(x)$$

Si y_{pi} es una solución particular de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = R_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

entonces

$$y_p = \sum_{i=1}^{s} y_{p_i}$$

es una solución particular de la ecuación original.

Demostración

Tenemos que

$$y_p' = \left(\sum_{i=1}^{s} y_{p_i} \right)' = \sum_{i=1}^{s} y_{p_i}'$$

$$y_p'' = \left(\sum_{i=1}^{s} y_{p_i} \right)'' = \sum_{i=1}^{s} y_{p_i}''$$

de modo que

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = a \sum_{i=1}^{s} y_{p_i}'' + b \sum_{i=1}^{s} y_{p_i}' + c \sum_{i=1}^{s} y_{p_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} (ay_{p_i}'' + by_{p_i}' + cy_{p_i}) = \sum_{i=1}^{s} R_i(x)$$

Es decir que

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = \sum_{i=1}^{s} R_i(x)$$

es una identidad, por lo que y_p es una solución de la ecuación original. El hecho de que y_p es una solución *particular* de esta ecuación es evidente.

Q.E.D.

Entonces, si $R(x)$ es suma de expresiones del tipo $Ke^{\alpha x}$, $C\cos \beta x$, $C\text{sen}\, \beta x$, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, propondremos como solución particular la suma de las expresiones que propondríamos para cada uno de los sumandos.

Ejemplo 6

Hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' + y' + 2y = e^x + \cos 3x + x^2 + 2$$

Solución

En este caso proponemos para solución particular a

$$y_p = Ae^x + B\cos 3x + C\text{sen}\, 3x + Dx^2 + Ex + F$$

de donde

$$y_p' = Ae^x - 3B \operatorname{sen} 3x + 3C \cos 3x + 2D\,x + E$$

$$y_p'' = Ae^x - 9B \cos 3x - 9C \operatorname{sen} 3x + 2D$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y agrupando términos semejantes nos queda

$$\begin{aligned} &4Ae^x + (-7B + 3C) \cos 3x + (-7C - 3B) \operatorname{sen} 3x + 2Dx^2 \\ &\qquad + (2D + 2E)x + 2F + 2D + E = e^x + \cos 3x + x^2 + 2 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{array}{rcl} 4A = 1 & & A = 1/4 \\ -7B + 3C = 1 & & B = -7/58 \\ -7C - 3B = 0 & \Rightarrow & C = 3/58 \\ 2D = 1 & & D = 1/2 \\ 2D + 2E = 0 & & E = -1/2 \\ 2F + 2D + E = 2 & & F = 3/4 \end{array}$$

y entonces la solución particular buscada es

$$y_p = \frac{1}{4}e^x - \frac{7}{58}\cos 3x + \frac{3}{58}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

En el caso de que $R(x)$ esté constituido por productos de expresiones del tipo *i*), *ii*), *iii*), y/o *iv*), propondremos como soluciones particulares los correspondientes productos de las soluciones particulares de cada uno de los factores.

Ejemplo 7

Hallar una solución particular de la ecuación

$$2y'' + 5y' = 100\,xe^{-x} \cos x$$

Solución

Tenemos que

1. para el factor $100x$ propondríamos $y_p = Ax + B$
2. para el factor e^{-x} propondríamos $y_p = Ce^{-x}$
3. para el factor $\cos x$ propondríamos $y_p = D \cos x + E \operatorname{sen} x$.
   De modo que la solución particular que tendríamos que proponer en este caso sería de la forma

$$y_p = (Ax + B)\,Ce^{-x}\,(D \cos x + E \operatorname{sen} x)$$

Observe que y_p se puede reescribir como

$$y_p = e^{-x}\,[(ADCx + DBC) \cos x + (AECx + EBC) \operatorname{sen} x)]$$

Como A, B, C, D, E son coeficientes por determinar, podemos determinarlos "por paquetes"* ahorrándonos mucho trabajo. Llamando $M = ADC$, $N = DBC$, $P = AEC$, $Q = EBC$, nos queda que la solución particular que buscamos es de la forma

$$y_p = e^{-x}\,[(Mx + N)\cos x + (Px + Q)\,\text{sen}\,x]$$

donde ahora tendremos que determinar M, N, P y Q.

Obtengamos y_p' y y_p''.

$$y_p' = e^{-x}\,[((P - M)\,x + M + Q - N)\cos x$$

$$+ ((-P - M)\,x + P - Q - N)\,\text{sen}\,x]$$

$$y_p'' = e^{-x}\,[(-2Px + 2P - 2Q - 2M)\cos x$$

$$+ (2Mx - 2P - 2M + 2N)\,\text{sen}\,x]$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original y agrupando términos semejantes nos queda

$$e^{-x}\,[((P - 5M)\,x + 4P + Q + M - 5N)\cos x +$$

$$-((5P + M)\,x - P + 4M + N + 5Q)\,\text{sen}\,x] = 100\,xe^{-x}\cos x$$

de donde

$$\begin{array}{rcl} P - 5M = 100 & & P = 50/13 \\ 4P + Q + M - 5N = 0 & \Rightarrow & Q = 2650/169 \\ 5P + M = 0 & & M = -250/13 \\ -P + 4M + N + 5Q = 0 & & N = 400/169 \end{array}$$

por lo que la solución particular buscada es

$$y_p = e^{-x}\left[\left(-\frac{250}{13}x + \frac{400}{169}\right)\cos x + \left(\frac{50}{13}x + \frac{2650}{169}\right)\text{sen}\,x\right]$$

Al aplicar el método de los coeficientes indeterminados debemos de ser cuidadosos de no proponer como solución particular de la ecuación no homogénea una solución particular de la ecuación homogénea asociada. Por ejemplo, suponga que queremos determinar una solución particular de la ecuación

$$y'' - 7y' + 12y = 2e^{3x}$$

---

* En realidad no nos interesa lo que valgan *por separado* A, B, C, D, E, pues en la expresión de y_p aparecen los *"paquetes"* ADC, DBC, AEC, EBC, de los que nos interesa conocer su valor.

Según lo visto anteriormente, nuestra propuesta para y_p sería $y_p = Ae^{3x}$
Entonces $y_p' = 3Ae^{3x}$, $y_p'' = 9Ae^{3x}$, de modo que

$$\begin{aligned} 9Ae^{3x} - 7(3Ae^{3x}) + 12Ae^{3x} &= 2e^{3x} \\ 0 &= 2e^{3x} \end{aligned}$$

que es una contradicción.

Lo que aconteció en este caso es que $y = Ae^{3x}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada (fue por eso que $(Ae^{3x})'' - 7\,(Ae^{3x})' + 12(Ae^{3x}) = 0$).

En efecto, considerando la ecuación

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

vemos que su ecuación característica

$$m^2 + 7m + 12 - (m - 3)(m - 4) = 0$$

posee por raíces $m_1 = 3$ y $m_2 = 4$, por lo que $y_1 = C_1e^{3x}$ es una solución de esta ecuación. Es claro entonces que $y = Ae^{3x}$ no puede ser solución particular de la ecuación no homogénea.

Una manera de salvar esta dificultad es proponiendo como solución particular de la ecuación no homogénea a

$$y_p = Axe^{3x}$$

En tal caso

$$y'_p = A\,(3x + 1)e^{3x}$$

$$y''_p = A\,(9x + 6)e^{3x}$$

de modo que, sustituyendo en la ecuación no homogénea nos queda

$$A(9x + 6)e^{3x} - 7A(3x + 1)e^{3x} + 12Axe^{3x} = 2e^{3x}$$

o

$$-Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

de donde

$$A = -2$$

y entonces la solución particular buscada es $y_p = -2xe^{3x}$.

En general podemos decir que si en principio nuestra propuesta para y_p aparece como solución particular de la ecuación homogénea asociada, proponemos entonces como una nueva y_p la expresión de la propuesta original multiplicada por x.

Ejemplo 8

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 8xe^{-x}$$

Solución

Resolvamos primeramente la ecuación homogénea asociada. Su ecuación característica es

$$m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$$

por lo que la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} = (C_1 + C_2\,x)e^{-x}$$

Analizando la expresión de $R(x)$, nuestra propuesta inicial para y_p sería

$$y_p = (Ax + B)\,e^{-x}$$

Sin embargo, ésta es precisamente la solución general de la ecuación homogénea asociada. Aún más, si multiplicamos esta expresión por x, obtendríamos

$$Ax^2e^{-x} + Bxe^{-x}$$

y vemos entonces que Bxe^{-x} aparece como solución (particular) de la ecuación homogénea asociada, por lo que esta nueva propuesta aún no es suficiente, y tendremos entonces que multiplicar nuevamente esta última expresión por x, para proponer finalmente nuestra y_p como

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$$

Obtengamos y_p', y_p''.

$$y_p' = (-Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx)e^{-x}$$

$$y_p'' = (Ax^3 + (-6A + B)x^2 + (6A - 4B)x + 2B)e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación original y simplificando nos queda

$$(6Ax + 2B)e^{-x} = 8xe^{-x}$$

de donde

$$\begin{array}{ll} 6A = 8 & \quad A = 4/3 \\ 2B = 0 & \quad B = 0 \end{array}$$

y entonces la solución particular buscada es

$$y_p = \frac{4}{3}x^3e^{-x}$$

Ejemplo 9

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\operatorname{sen}x + 2\cos x)$$

Solución

Resolvemos primeramente la ecuación homogénea asociada, la cual posee por ecuación característica a

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

cuyas raíces son

$$m_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i$$

por lo que la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x)$$

Vemos que nuestra propuesta inicial para solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p = e^{2x}(A\cos x + B\operatorname{sen}x)$$

Sin embargo, ésta es precisamente la solución general de la ecuación homogénea asociada, por lo que hacemos la nueva propuesta para y_p como

$$y_p = xe^{2x}(A\cos x + B\operatorname{sen}x)$$

Obtengamos y_p' y y_p''

$$y_p' = e^{2x}(((2B - A)x + B)\operatorname{sen}x + ((2A + B)x + A)\cos x)$$

$$y_p'' = e^{2x}(((3B - 4A)x + 4B - 2A)\operatorname{sen}x + ((4B + 3A)x + 2B$$

$$+ 4A)\cos x)$$

Sustituyendo en la ecuacion diferencial y simplificando nos queda

$$e^{2x}(-2A\operatorname{sen}x + 2B\cos x) = e^{2x}(\operatorname{sen}x + 2\cos x)$$

de donde

$$\begin{aligned} -2A &= 1 \qquad & A &= -1/2 \\ 2B &= 2 \qquad & B &= 1 \end{aligned}$$

por lo que la solución particular buscada es

$$y_p = xe^{2x}\left(-\frac{1}{2}\cos x + \operatorname{sen}x\right)$$

y la solución general de la ecuación original es entonces

$$y = y_h + y_p = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{x}{2} \cos x + x \operatorname{sen} x)$$

Ejemplo 10

Hallar la solución de la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$$

tal que $y(0) = y'(0) = 0$

Solución

Resolviendo primeramente la ecuación homogénea asociada que tiene por ecuación característica

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

cuyas raíces son

$$m_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 2 \end{cases}$$

entonces la solución general de esta ecuación (la homogénea) es

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

Como solución particular de la ecuación no homogénea proponemos

$$y_p = (Ax + B)\, e^{-x}$$

de donde

$$y_p' = (-Ax + A - B)e^{-x}$$

$$y_p'' = (Ax - 2A + B)e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación original y simplificando nos queda

$$(12Ax - 7A + 12B)e^{-x} = (12x - 7)e^{-x}$$

de donde

$$\begin{aligned} 12A &= 12 \qquad & A &= 1 \\ -7A + 12B &= -7 \qquad & B &= 0 \end{aligned}$$

por lo que la solución particular buscada es

$$y_p = xe^{-x}$$

y entonces la solución general de la ecuación original es

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + xe^{-x}$$

derivando, obtenemos

$$y' = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} + (-x + 1)e^{-x}$$

Imponiendo las condiciones iniciales nos queda

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= 3C_1 + 2C_2 + 1 \end{aligned}$$

de donde $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, y la solución particular buscada es

$$y = -e^{3x} + e^{2x} + xe^{-x}$$

Las ideas del método de coeficientes indeterminados discutido anteriormente siguen siendo válidas para ecuaciones de orden superior al segundo. Veamos un par de ejemplos de ecuaciones de este tipo.

Ejemplo 11

Hallar la solución general de

$$y^{(\mathrm{IV})} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

Solución

Obtenemos primeramente la solución general de la ecuación homogénea asociada, cuya ecuación característica es

$$m^4 - 2m^2 + 1 = 0$$

o

$$(m^2 - 1)^2 = 0$$

de donde obtenemos las raíces dobles $m_1 = 1$, y $m_2 = -1$. Entonces, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1e^x ++ C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$$

La primer tentativa de solución particular de la ecuación no homogénea sería

$$y_p = Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\operatorname{sen} x$$

Sin embargo, $Ae^x + Be^{-x}$ aparecen en la solución general de la ecuación homogénea asociada. Aún más, si multiplicamos una vez por x esta solución aparecería $Axe^x + Bxe^{-x}$, que también forman parte de la solución de la ecuación homogénea. Entonces, nuestra propuesta para solución particular de la ecuación no homogénea debe ser

$$y_p = Ax^2e^x + Bx^2e^{-x} + C\cos x + D\,\mathrm{sen}\,x$$

Observe que sólo hemos alterado los dos primeros términos de la solución particular de la ecuación no homogénea propuesta inicialmente. Esto es debido a que la ecuación original se puede ver como

$$y^{(\mathrm{IV})} - 2y'' + y = R_1(x) + R_2(x)$$

con $R_1(x) = 8(e^x + e^{-x})$ y $R_2(x) = 4(\mathrm{sen}\,x + \cos x)$, de modo que si y_{p_1} es solución particular de

$$y^{(\mathrm{IV})} - 2y'' + y = R_1(x)$$

y y_{p_2} lo es de

$$y^{(\mathrm{IV})} - 2y'' + y = R_2(x)$$

la solución particular buscada es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, tal como fue demostrado anteriormente.

Es claro entonces que la propuesta inicial de y_{p_1} (que fue $Ae^x + Be^{-x}$) es la que tiene que ser alterada multiplicándola dos veces por x.

Proponemos entonces para solución particular de la ecuación no homogénea a

$$y_p = Ax^2 + Bx^2e^{-x} + C\cos x + D\,\mathrm{sen}\,x$$

Obtengamos y_p', y_p'', y_p''', $y_p^{(\mathrm{IV})}$

$$y_p' = (Ax^2 + 2Ax)e^x + (-Bx^2 + 2Bx)e^{-x} - C\,\mathrm{sen}\,x + D\cos x$$

$$y_p'' = (Ax^2 + 4Ax + 2A)e^x + (Bx^2 - 4Bx + 2B)e^{-x} - C\cos x - D\,\mathrm{sen}\,x$$

$$y_p''' = (Ax^2 + 6Ax + 6A)e^x + (-Bx^2 + 6Bx - 6B)e^{-x} + C\,\mathrm{sen}\,x - D\cos x$$

$$y_p^{(\mathrm{IV})} = (Ax^2 + 8Ax + 12A)e^x + (Bx^2 - 8Bx + 12B)e^{-x} + C\cos x + D\,\mathrm{sen}\,x$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación diferencial original y simplificando nos queda

$$8Ae^x + 8Be^{-x} + 4C\cos x + 4D\,\mathrm{sen}\,x = 8\,(e^x + e^{-x}) + 4(\mathrm{sen}\,x + \cos x),$$

de donde $A = B = C = D = 1$, y entonces la solución particular procurada es

$$y_p = x^2e^x + x^2e^{-x} + \cos x + \mathrm{sen}\,x$$

siendo la solución general de la ecuación original dada por

$$y = (C_1 + C_2 x + x^2)e^x + (C_3 + C_4 x + x^2)\, e^{-x} + \cos x + \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 12

Hallar la solución de la ecuación

$$y''' - y' = 3(2 - x^2)$$

que satisfaga las condiciones iniciales

$$y\,(0) = y'\,(0) = y''(0) = 1$$

Solución

La ecuación homogénea asociada tiene por raíces $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $m_3 = -1$, de modo que su solución general es

$$y_h = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$$

Proponemos inicialmente como solución particular de la ecuación no homogénea a

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Observe que en esta primer propuesta aparece el término constante C, que forma parte de la solución general de la ecuación homogénea. Entonces, hacemos la nueva propuesta para solución particular de la ecuación no homogénea la propuesta anterior multiplicada por x, o sea

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

de donde

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y_p'' &= 6Ax + 2B \\ y_p''' &= 6A \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original nos queda

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = 3(2 - x^2)$$

de donde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$. Entonces la solución particular buscada es $y_p = x^3$ y la solución general de la ecuación original es

$$y = C_1 + C_2 e^x - C_3 e^{-x} + x^3$$

de donde

$$y' = C_2 e^x - C_3 e^{-x} + 3x^2$$

$$y'' = C_2 e^x + C_3 e^{-x} + 6x$$

Imponiendo las condiciones iniciales nos queda

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$C_2 - C_3 = 1$$

$$C_2 + C_3 = 1$$

de donde $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$.
La solución buscada es entonces

$$y = e^x + x^3$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 5)

1. Critique la siguiente afirmación: ''la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 5e^{2x}$ tiene una solución particular de la forma $y_p = Ae^{2x}$, donde A es cierta constante''.

En los ejercicios siguientes (2 — 20) considere una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, cuyo segundo miembro es $R(x)$, y cuyas raíces de la ecuación característica de la correspondiente ecuación homogénea asociada son dadas. Haga una propuesta para una solución particular de la ecuación (no homogénea).

2. $m_1 = 1,\ m_2 = 2$ $\quad R(x) = 10\, xe^{3x}$
3. $m_1 = 1,\ m_2 = 0$ $\quad R(x) = 5e^{2x} + x^4$
4. $m_1 = 3,\ m_2 = 4$ $\quad R(x) = (10\, x^5 + 1)e^{-3x}$
5. $m_1 = 10,\ m_2 = -4$ $\quad R(x) = 5 \operatorname{sen} x + x + 2$
6. $m_1 = 10,\ m_2 = -4$ $\quad R(x) = (x^2 + 2)(5 \cos x)$
7. $m_1 = i,\ m_2 = -i$ $\quad R(x) = 5 \operatorname{sen} x + \cos x + e^x$
8. $m_1 = 3,\ m_2 = -1$ $\quad R(x) = 10e^{-x} + x \cos 2x + 1$
9. $m_1 = m_2 = -1$ $\quad R(x) = 10e^{-x} + x \operatorname{sen} 3x$
10. $m_1 = 3,\ m_2 = 4$ $\quad R(x) = 6e^{3x} + 4e^{4x}$
11. $m_1 = 6 + i,\ m_2 = 6 - 2i$ $\quad R(x) = e^x + (e^{6x} + 1) \operatorname{sen} 2x$
12. $m_1 = 5 + i,\ m_2 = 5 - i$ $\quad R(x) = e^{5x} \cos x$
13. $m_1 = 3,\ m_2 = -3$ $\quad R(x) = x^2e^{3x} + e^{-3x}$
14. $m_1 = m_2 = 4$ $\quad R(x) = (x^2 + 1)e^{4x}$
15. $m_1 = 3 + i,\ m_2 = 3 - \mathrm{i}$ $\quad R(x) = x^2e^{3x} \operatorname{sen} x$
16. $m_1 = 2,\ m_2 = i,\ m_3 = -i$ $\quad R(x) = e^{2x} + \cos x$
17. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ $\quad R(x) = \operatorname{sen} x + e^x$
18. $m_1 = 1 + i,\ m_2 = 1 - i$
    $m_3 = 2 + i,\ m_4 = -i$ $\quad R(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2)$
19. $m_1 = m_2 = -1,\ m_3 = 4$
    $m_4 = 5 + i,\ m_5 = 5 - i$ $\quad R(x) = e^{-x} + 2(x + 3)e^{4x} + e^{5x} \cos x$
20. $m_1 = m_2 = 3 + 2i$
    $m_3 = m_4 = 3 + 2i$ $\quad R(x) = 10\, (x^2 + x + 1)e^{3x} \cos x$

En los ejercicios siguientes (21 – 30) resuelva la ecuación usando el método de los coeficientes indeterminados para hallar la solución particular y_p.

21. $3y'' + 4y' + 5y = e^{2x} + 1$
22. $y'' + 2y' + y = e^{-x} + \text{sen}\, x$
23. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 2x + 1)e^{-3x}$
24. $y'' + 3y' + 2y = 250$
25. $2y'' + 3y' + 8y = x^{10} + x$
26. $y'' + y = \text{sen}\, x$
27. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\, \text{sen}\, x + e^x(x + 3)$
28. $y''' \; \overline{y} = e^x(x^3 + x + 1)$
29. $y^{iv} - y = 2e^x + 3e^{-x} + \text{sen}\, x$
30. $y^{iv} + 2y'' + y = \text{sen}\, x + 3 \cos x$

En los ejercicios siguientes (31 – 40) resuelva la ecuación usando el método de variación de parámetros para hallar y_p.

31. $y'' - y = x_2 + x + 4$
32. $y'' + y = \tan x$
33. $y'' - 4y'' + 4y = \text{sen}^4 x$
34. $y'' + 8y'' + 10y = 10$
35. $y'' + y + \cos^2 x = 0$
36. $y'' + y' = -x^{-1}$
37. $y'' + 4y = \sec 2x$
38. $y'' + y = 2\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, 2x$
39. $y'' + y = x^2 \cos x$
40. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \csc x$

En los ejercicios siguientes (41 – 50) resuelva las ecuaciones

41. $y'' - y = (e^x + 1)^{-1}$
42. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$
43. $y'' - y' = -5e^{-x}(\text{sen}\, x + \cos x) \qquad y(0) = -4,\ y'(0) = 5$
44. $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x} + 1 + 9\, \text{sen} x \qquad y(0) = y'(0) = 1$
45. $y'' - 2y' + 2y = e^x\, \text{sen}^2 (x/2)$
46. $y'' - y' = e^{2x}(1 - e^{-2x})^{½}$
47. $y'' + y + \text{sen}\, 2x = 0 \qquad y(\pi) = y'(\pi) = 1$
48. $y^{iv} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + 0.5 \cos x$

    $y(0) = y'(0) = 0 \qquad y''(0) = y'''(0) = 1$
49. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x(\text{sen}\, x + 7 \cos x) \qquad \lim\limits_{x \to \infty} y = 0$
50. $y'' - 4y' + 4y = (8x^2 + 6x + 15)e^{-x} \qquad \lim\limits_{x \to \infty} y = 0$
51. Considere la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = R(x)$. Sea $y = y(x)$ una solución particular de la ecuación homogénea asociada, tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Demostrar que una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p(x) = \int_a^x y(x - t)R(t)\,dt$$

En particular, si las raíces de la ecuación características son iguales a (m) entonces

$$y_p(x) = e^{mx}\int_a^x (x - t)e^{-mt}R(t)dt$$

52. (Un pequeño curso sobre Transformada de Laplace y su aplicación a la obtención de soluciones particulares de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes y con condiciones iniciales dadas).

Sea $f: I \rightarrow \mathcal{R}$ una función real definida en el intervalo I subconjunto de $\{x \epsilon \mathcal{R} | x > 0\}$. Se define la *Transformada de Laplace* de la función f, denotada por $\mathscr{L}(f(x))$, como la función F de la variable s dada por

$$\mathscr{L}(f(x)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

cuando el límite

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-sx}f(x)dx$$

existe (es decir, cuando la integral impropia existe).

a) Considere las siguientes definiciones:

Definición 1. Se dice que la función f: $[a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ es *seccionalmente continua* en $[a, b]$, si existe una partición del intervalo $[a, b]$, digamos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, tal que las restricciones de f a cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son continuas.

Definición 2. Se dice que la función $f: \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$ es de *orden exponencial*, si existen constantes C_1 y C_2 tales que $|f(x)| < C_1 \exp(C_2 x)$ para toda x mayor que x_0, para alguna x_0 positiva.

Enuncie con precisión y demuestre el resultado: ''Si f es una función seccionalmente continua y de orden exponencial , entonces su Transformada de Laplace existe''. Observe que este resultado nos da condiciones *suficientes pero no necesarias* para que la Transformada de Laplace de una función exista.

b) Demuestre que la Transformada de Laplace es un operador lineal, es decir, demuestre que

$$\mathscr{L}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathscr{L}(f_i(x))$$

c) Demuestre que $\mathscr{L}(x^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$, donde n es un entero no negativo.

d) Demuestre que $\mathscr{L}(e^{ax}) = (s - a)^{-1}$ $(s > a)$

e) Demuestre que $\mathscr{L}(\text{sen } ax) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$ $(s > 0)$

f) Demuestre que $\mathscr{L}(\cos ax) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$ $(s > 0)$

g) Demuestre que si $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$, entonces $\mathcal{L}(e^{ax}f(x)) = F(s - a)$. Obtenga de nuevo el resultado del inciso *d*) usando los resultados de este inciso y el inciso *c*). Halle $\mathcal{L}(e^{x}\text{sen } x)$, $\mathcal{L}(e^{2x}\cos 3x)$, $\mathcal{L}(x^5 e^{7x})$.

h) Demuestre que si f es una función periódica de periodo T, entonces

$$\mathcal{L}(f(x)) = \frac{1}{1 - e^{sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x)dx$$

Sugerencia:

$$\mathcal{L}(f(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-sx} f(x)dx$$

i) Use el resultado del inciso anterior para demostrar que la Transformada de Laplace de la onda triangular mostrada en la figura es $s^{-2}\tanh 0.5\, s$.

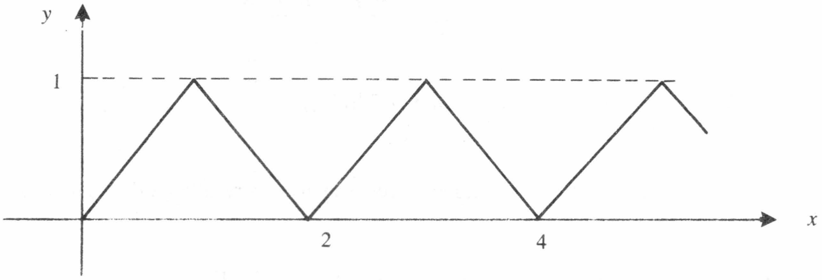


Figura 7. Problema 52, inciso *i*.

j) Demuestre que $\mathcal{L}(f'(x)) = s\,\mathcal{L}(f(x)) - f(0)$
Sugerencia: use integración por partes.

k) Demuestre que $\mathcal{L}(f''(x)) = s^2\,\mathcal{L}(f(x)) - s\,f(0) - f'(0)$.
Sugerencia: use integración por partes y el resultado del inciso anterior.

l) Generalice los resultados de los incisos anteriores y demuestre (usando inducción) que

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) = s^n\,\mathcal{L}(f(x)) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

m) Defina la *Transformada Inversa de Laplace* de la función $F(s)$, denotada por $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$, como

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x) \Leftrightarrow \mathcal{L}(f(x)) = F(s)$$

Demuestre que:

m_1) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{L}^{-1}(F_i(s))$$

m_2) Si $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}(F(s - a)) = e^{ax}f(x)$

n) Demuestre que $\mathscr{L}^{-1}(s^{-n}) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ n entero positivo.

o) Demuestre que $\mathscr{L}^{-1}((s-a)^{-n}) = \dfrac{e^{ax}x^{n-1}}{(n-1)!}$ n entero positivo.

p) Demuestre que si $p^2 - 4q < 0$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+ps+q}\right) = \frac{p}{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{e}^{0.5x}\operatorname{sen}\frac{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}x}{2}$$

q) Demuestre que si $p^2 - 4p < 0$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+ps+q}\right) = \frac{p}{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{e}^{0.5x}\operatorname{sen}\frac{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}x}{2}$$

$$+\, e^{0.5\,px}\cos\frac{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}x}{2}$$

r) Si $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-3)(s+2)}$, halle $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$.

Sugerencia: separe $F(s)$ en fracciones parciales y use los resultados de los incisos *n*) y *o*).

s) Si $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+2s+4)(s^2+s+1)}$, halle $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$.

Sugerencia: separe $F(s)$ en fracciones parciales y use los resultados de los incisos *p*) y *q*).

t) Halle $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{2s^2+3s-1}{s^3(s^2+2s+1)(s^2+s+3)}\right)$

u) Considere la ecuación $y'' + 2y' + y = \cos x$. Se quiere obtener la solución de esta ecuación tal que $y(0) = y'(0) = 0$. Tomando Transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$\mathscr{L}(y'' + 2y' + y) = \mathscr{L}(\cos x)$$

Usando los resultados de los incisos *b*), *f*), *j*), *k*), y la información de las condiciones iniciales del problema concluimos que la función $y = y(x)$ que buscamos es tal que

$$\mathscr{L}(y(x)) = \frac{s}{(s^2+1)\,(s^2+2s+1)}$$

Entonces la función procurada es

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1/2}{s^2+1} - \frac{1/2}{(s+1)^2}\right)$$

Concluya entonces, usando los resultados de los incisos *m*), *o*) y *p*), que la solución de nuestro problema es

$$y(x) = 0.5\,(\operatorname{sen} x - x\,e^{-x})$$

v) Considere el problema (en general) de encontrar la solución a la ecuación $ay'' + by' + cy = R(x)$, bajo las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$. Demuestre que la solución a este problema queda descrita por la fórmula

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\mathscr{L}(R(x)) + (as + b)y_0 + ay_0'}{as^2 + bs + c}\right)$$

w) Use la Transformada de Laplace para resolver

w_1) $y'' + 4y' + 3y = x^3$ $y(0) = 3$ $y'(0) = -2$
w_2) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$
w_3) $y''' + y'' - 2y = 5e^x$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 2$
w_4) Ejemplo (12) de esta sección.

x) (Estudio del fenómeno de las vibraciones libres no amortiguadas.) Considere el sistema masa-resorte mostrado en la figura. Sea *m* la masa del cuerpo y *k* la constante del resorte. A $t = 0$ se desplaza el cuerpo de su posición de equilibrio una distancia x_0 hacia abajo y se suelta. La acción restitutiva del resorte provocará un movimiento oscilatorio de la masa *m*. Sea $x(t)$ la posición del cuerpo al tiempo *t*. Convenimos en que $x = x(t)$ es positivo si el cuerpo se encuentra por encima de su posición de equilibrio y negativo en caso contrario. Se trata de encontrar la función $x(t)$.

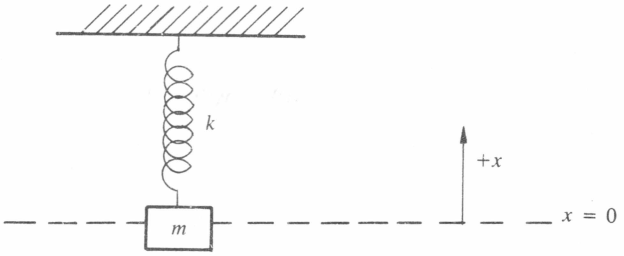


Figura 8. Problema 52, inciso *x*).

Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento de la masa *m* es

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

donde se tienen además las condiciones iniciales $x(0) = -x_0$ y $x'(0) = 0$. Use la Transformada de Laplace y demuestre que

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-mx_0 s}{ms^2 + k}\right)$$

es decir que

$$x(t) = -x_0 \cos (k/m)^{1/2} t$$

A la magnitud $2\pi (k/m)^{-1/2}$ se le llama *periodo de la vibración.* Dé una interpretación física de esta magnitud.

y) La Transformada de Laplace también se usa para resolver ciertos *sistemas de ecuaciones diferenciales.* Por ejemplo, suponga que se quieren encontrar funciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$ tales que

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + R_1(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + R_2(t)$$

bajo las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$. Llamemos $\mathscr{L}(x(t)) = F(s)$ y $\mathscr{L}(y(t)) = G(s)$. La idea para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales es tomar Transformada de Laplace en ambas ecuaciones y resolver (algebraicamente) el sistema resultante para $F(s)$ y para $G(s)$. La solución requerida es entonces $x(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$ y $y(t) = \mathscr{L}^{-1}(G(s))$. Demuestre entonces que

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{(\mathscr{L}(R_1(t)) + (x_0)(s\text{-}b_2) + b_1(\mathscr{L}(R_2(t) + y_0)}{s^2 - (a_1 + b_2)\, s + a_1 b_2 - a_2\, b_1}\right)$$

Halle una fórmula similar para $y(t)$

z) Use los resultados del inciso anterior para hallar la solución a los sistemas

z_1)
$$\frac{dx}{dt} = y - x + e^t \qquad x(0) = y(0) = 1$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y + e^t$$

z_2)
$$\frac{dx}{dt} = -2y + 3t$$
$$\frac{dx}{dt} = 2x + 4 \qquad x(0) = 2 \quad y(0) = 3$$

z_3) Generalice el inciso *y* para resolver el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2\,\frac{dy}{dt} - x - y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = -\,\frac{dx}{dt} - x - z \qquad x(0) = y(0) = 1 \quad z(0) = -2$$
$$\frac{dz}{dt} = 2\,\frac{dy}{dt} + y$$

6. MÉTODOS CON OPERADORES

Introduzcamos la notación siguiente para la derivada de la función $f(x)$: $Df(x)$ (o bien, poniendo $y = f(x)$, ésta sería Dy). Consideremos el problema: dada la función $f(x)$, queremos encontrar una función $g(x)$ tal que

$$D\,g(x) = f(x)$$

Observe el lado izquierdo de esta última expresión. En él hemos expresado una operación matemática conocida como derivación por medio de una *notación operacional:* el operador derivada (denotado por D) *actuando* sobre la función $g(x)$.

Procedamos ahora a resolver el problema anteriormente planteado. Hagámoslo de la manera más ingenua que sea posible: tenemos a D *multiplicando* a $g(x)$ y queremos hallar $g(x)$, tal que $D\,g(x) = f(x)$. Pues despejemos y digamos que nuestra solución es:

$$g(x) = \frac{1}{D} f(x)$$

Desde un punto de vista puramente formal nuestro problema está resuelto. Observe que hemos cometido el atrevimiento de identificar la palabra ''actuando'' con ''multiplicando''. Este tipo de ingenuidades aparecen en cursos de cálculo para principiantes. Sin embargo, lo que estamos discutiendo aquí no es precisamente cálculo (y mucho menos para principiantes).

Queremos dar sentido a lo que se hizo en la ''solución'' de este problema. Un alumno regular (no principiante) de un curso de cálculo, habría dicho que el problema queda resuelto si tomamos la integral indefinida de la función $f(x)$ y escrito entonces la solución del problema como:

$$g(x) = \int f(x)\,dx$$

Sin embargo, un alumno más avanzado hubiera tomado la solución ingenua que hemos planteado y se hubiera preguntado, así como dimos sentido a la notación para la derivada como $D\,g(x)$, por qué no dar también algún sentido a la notación $\frac{1}{D} f(x)$, y entonces, de la misma manera como decimos que D actúa sobre $g(x)$ y da por resultado la derivada $g'(x)$, pues entonces $\frac{1}{D}$ actúa sobre $f(x)$ dando por resultado la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ (o antiderivada de $f(x)$); es decir, hubiera definido el operador

$$\frac{1}{\mathrm{D}} \square \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definición}}}{=} \int \square \, dx$$

Lo que queremos hacer en esta sección es extender estas ideas con el fin de desarrollar un nuevo método que nos permita obtener soluciones particulares de ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes. En realidad, se verá que con este nuevo método que aquí desarrollaremos, también reobtendremos algunos de los resultados que han aparecido en las secciones anteriores de este capítulo de una manera más limpia.

Consideremos la ecuación lineal no homogénea de orden n con coeficientes constantes.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_o y = f(x)$$

Con la notación

$$y^{(n)} = D^n y$$

esta se vería como

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_1 D\, y + a_o\, y = f(x)$$

o (por definición):

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_o)\, y = f(x)$$

Sea

$$F(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots a_1 D + a_o = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$$

Llamaremos a $F(D)$ el *polinomio operacional.*

Entonces nuestra ecuación original se ve como

$$F(D)\, y = f(x)$$

Uno de nuestros objetivos es dar sentido a la afirmación: ''una solución particular de la ecuación anterior es

$$y = \frac{1}{F(D)} f(x)\text{''}$$

6.1 El operador *F(D)*

Veamos algunas de las propiedades que posee el polinomio operacional $F(D)$ (en lo que sigue k es un número real).

1. $F(D)\, e^{kx} = e^{kx} F(k)$

   En efecto:

$$F(D)\, e^{kx} = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i D^i\Big)(e^{kx}) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i e^{kx}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i\, k^i\, e^{kx} = e^{kx} \sum_{i=0}^{n} a_i\, k^i = e^{kx}\, F(k)$$

2. $F(D^2)$ sen kx = sen kx $F(-k^2)$

En efecto

$$F(D^2) \text{ sen } kx = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i (D^2)^i \Big) (\text{sen } kx)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i\, D^{2i} \text{ sen } kx = \sum_{i=0}^{n} a_i (-k^2)^i \text{ sen } kx$$

$$= \text{sen } kx \sum_{i=0}^{n} a_i (-k^2)^i = \text{sen } kx\; F(-k^2)$$

3. $F(D^2)$ cos kx = cos kx $F(-k^2)$.

La demostración es análoga a la anterior.

4. $F(D)\, e^{kx}\, g(x) = e^{kx}\, F(D + k)\, g(x)$

En efecto:

$$F(D)\, e^{kx}\, g(x) = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\, D^i \Big) (e^{kx}\, g(x)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i\, D^i\, e^{kx}\, g(x)$$

Recordando que:

$$D^i\, e^{kx}\, g(x) = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} (e^{kx})^{(j)} (g(x))^{(i-j)}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j}\, k^j\, e^{kx}\, D^{i-j}\, g(x)$$

Entonces:

$$F(D)\, e^{kx}\, g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} k^j e^{kx} D^{i-j} g(x)$$

$$= e^{kx} \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} k^j D^{i-j} g(x)$$

$$= e^{kx} \sum_{i=0}^{n} a_i (D + k)^i g(x) = e^{kx} F(D + k)\, g(x)$$

Definamos ahora la *suma* de polinomios operacionales.

Sean $F_1(D)$ y $F_2(D)$ dos polinomios operacionales. Se define el operador (o el polinomio operacional) suma de $F_1(D)$ y $F_2(D)$ denotado por $F_1(D) + F_2(D)$ como aquel que conduce a la igualdad

$$[F_1(D) + F_2(D)]\, f(x) = F_1(D)\, f(x) + F_2(D)\, f(x)$$

Según esta definición tenemos entonces una nueva propiedad.

5. La suma de polinomios operacionales se efectúa de la misma manera que la suma de polinomios (ordinarios).

En efecto, si $F_1(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ y

$$F_2(D) = \sum_{i=0}^{n} b_i D^i, \text{ tenemos que}$$

$$F_1(D) + F_2(D) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) D^i$$

que es exactamente la manera como se suman polinomios cualesquiera (no operacionales). El lector puede verificar fácilmente el caso de la suma cuando los dos polinomios no son del mismo grado.

El *producto* de los polinomios operacionales $F_1(D)$ y $F_2(D)$ se define como el operador $F_1(D)\, F_2(D)$ que conduce a la igualdad

$$[F_1(D)\, F_2(D)]\, f(x) = F_1(D)\, [F_2(D)\, f(x)]$$

Nuevamente, esta definición nos conduce a la propiedad.

6. La multiplicación de polinomios operacionales se efectúa de la misma manera que la multiplicación de polinomios (no operacionales).

En efecto, si $F_1(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D_i$ y

$$F_2(D) = \sum_{j=0}^{m} b_j D_j, \text{ entonces}$$

$$F_1(D)\, F_2(D) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j D^{i+j}$$

(que es como se multiplican los polinomios ordinarios), pues

$$[F_1(D)\, F_2(D)]\, f(x) = (\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j\, D^{i+j})\, f(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j\, D^{i+j}\, f(x)$$

y por otra parte tenemos

$$F_1(D)\, [F_2(D)\, f(x)] = \sum_{i=0}^{n} a_i\, D^i\, [\sum_{j=0}^{m} b_j\, D^j\, f(x)]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{m} b_j\, D^i\, D^j\, f(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j\, D^{i+j}\, f(x)$$

Como un corolario de las propiedades 5 y 6 vemos entonces que toda el álgebra de polinomios que conocemos de nuestros cursos es heredada por los polinomios operacionales. Es decir, si $F_1(D)$, $F_2(D)$ y $F_3(D)$ son polinomios operacionales tenemos que:

a) $F_1(D) + F_2(D) = F_2(D) + F_1(D)$

b) $F_1(D) + (F_2(D) + F_3(D)) = (F_1(D) + F_2(D)) + F_3(D)$

c) $F_1(D)\, F_2(D) = F_2(D)\, F_1(D)$

d) $F_1(D)\, [F_2(D)\, F_3(D)] = [F_1(D)\, F_2(D)]\, F_3(D)$

teniéndose también que (demostración como ejercicio)

$$F_1(D)\, [F_2(D) + F_3(D)] = F_1(D)\, F_2(D) + F_1(D)\, F_3(D)$$

Como una primera aplicación de la teoría desarrollada hasta este momento, consideremos la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes (de orden n).

$$F(D)\, y = 0$$

donde

$$F(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$$

Suponga primeramente que todas las raíces de la ecuación $F(r) = 0$ son reales y distintas. Sea $r_1, \ldots, r_n$ tales raíces. Entonces, la ecuación se puede escribir como

$$\prod_{i=0}^{n} (D - r_i)\, y = 0$$

Para j fijo, $1 \leq j \leq n$, consideremos los operadores

$$F_1(D) = \prod_{i=1, i \neq j}^{n} (D - r_i)$$

$$F_2(D) = (D - r_j)$$

Se afirma entonces que $y = e^{r_j x}$ $(j = 1, \ldots, n)$ es solución de la ecuación dada.

En efecto, la ecuación original puede escribirse como:

$$F_1(D)\, F_2(D)\, y = 0$$

Sustituyendo $y = e^{r_j x}$ tenemos

$$\prod_{i=1, i \neq j}^{n} (D - r_i)\, (D - r_j)\, e^{r_j x} =$$

$$\prod_{i=1, i \neq j}^{n} (D - r_i)\, (r_j - r_j)\, e^{r_j x} = 0$$

(por la propiedad (1)).

Entonces, tenemos n soluciones $y = e^{r_j x}$ $(j = 1, \ldots, n)$ de la ecuación original, las cuales son linealmente independientes, pues

$$W\,(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \cdots\cdots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \cdots\cdots & r_n e^{r_n x} \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \cdots\cdots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\Sigma r_i)x} \prod (r_i - r_j)$$

y puesto que $r_i \neq r_j$ $\forall\ i, j$, entonces

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}) \neq 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Así pues, la solución general de la ecuación

$$\prod_{i=1}^{n} (D - r_i)\ y = 0$$

es

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i x}$$

Suponga ahora que la ecuación $F(D)\ y = 0$ se puede escribir como

$$(D - r)^n\ y = 0$$

Es decir, la ecuación $F(k) = 0$ posee n raíces iguales (a r). En tal caso $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación, pues, según la propiedad (1), tenemos que $(D - r)^n\ e^{rx} = e^{rx}$ $(r - r)^n = 0$ (i.e. tal función satisface idénticamente a la ecuación dada).

Sea $g(x)$ una función tal que $y = e^{rx}\ g(x)$ es solución de la ecuación original. Entonces:

$$(D - r)^n e^{rx}\ g(x) = 0$$

Pero, en vista de la propiedad (4), tenemos que la expresión anterior se puede escribir como:

$$e^{rx}\ (D - r + r)^n\ g(x) = 0$$

o

$$e^{rx} D^n g(x) = 0$$

Como $e^{rx} \neq 0 \ \forall \ x \in \mathcal{R}$, debemos tener que:

$$D^n g(x) = 0$$

por lo que

$$g(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

Entonces, la función

$$y = e^{rx} (C_1 + C_2x + \ldots. + C_nx^{n-1})$$

da la expresión de la solución general de la ecuación $(D - r)^n y = 0$, resultado que, junto con el establecido para el caso de que $F(k) = 0$ tuviera todas las raíces reales distintas, habíamos ya estudiado en la sección 4 de este capítulo.

6.2 El operador $\dfrac{1}{F(D)}$

Definimos la acción del operador $\dfrac{1}{F(D)}$ sobre la función $f(x)$, como dando por resultado una solución particular de la ecuación

$$F(D)\ y = f(x)$$

Observe que resulta evidente de la definición que

$$\frac{1}{F(D)} [F(D)\ f(x)] = f(x)$$

pues $f(x)$ es obviamente solución de la ecuación

$$F(D)\ y = F(D)\ f(x)$$

Además, es claro que

$$F(D)\ [\frac{1}{F(D)} f(x)] = f(x)$$

De estas dos últimas observaciones se ve que los operadores $F(D)$ y $\dfrac{1}{F(D)}$ funcionan análogamente a la derivada y la integral, respectivamente, en el sentido que uno anula la acción del otro.

Sea $G(D)$ un polinomio operacional. Definimos los operadores $G(D)\,\dfrac{1}{F(D)}$ y $\dfrac{1}{F(D)}\,G(D)$ por medio de las fórmulas

$$\left[G(D)\,\frac{1}{F(D)}\right] f(x) = G(D)\left[\frac{1}{F(D)}\,f(x)\right]$$

$$\left[\frac{1}{F(D)}\,G(D)\right] f(x) = \frac{1}{F(D)}\left[G(D)\,f(x)\right]$$

Veamos ahora algunas propiedades del operador $\dfrac{1}{F(D)}$ (k es un real cualquiera)

1. $\dfrac{1}{F(D)}\,k\,f(x) = k\,\dfrac{1}{F(D)}\,f(x)$

   En efecto, debemos comprobar que $k\,\dfrac{1}{F(D)}\,f(x)$ es solución de la ecuación $F(D)\,y = k\,f(x)$. Esto es claro, pues

   $$F(D)\,k\,\frac{1}{F(D)}\,f(x) = k\,F(D)\,\frac{1}{F(D)}\,f(x) = k\,f(x)$$

2. $\dfrac{1}{F(D)}\,e^{kx} = \dfrac{e^{kx}}{F(k)}$ si $F(k) \neq 0$.

   En efecto, considerando la ecuación $F(D)\,y = e^{kx}$ vemos que $y = \dfrac{e^{kx}}{F(k)}$ es solución de ésta, pues (admitiendo que $F(k) \neq 0$)

   $$F(D)\,\frac{e^{kx}}{F(k)} = e^{kx}\,\frac{F(k)}{F(k)} = e^{kx}$$

   (según la propiedad (1) de 6.1).

3. $\dfrac{1}{F(D^2)}\,\text{sen}\,kx = \dfrac{\text{sen}\,kx}{F(-k^2)}$ si $F(-k^2) \neq 0$

   En efecto, tenemos que

   $$F(D^2)\,\frac{\text{sen}\,kx}{F(-k^2)} = \text{sen}\,kx\,\frac{F(-k^2)}{F(-k^2)} = \text{sen}\,kx$$

   (según la propiedad (2) de 6.1), por lo que $\dfrac{\text{sen}\,kx}{F(-k^2)}$ es solución de $F(D^2)$ $y = \text{sen}\,kx$

4. $\dfrac{1}{F(D^2)} \cos kx = \dfrac{\cos kx}{F(-k^2)}$ si $F(-k^2) \neq 0$

La demostración es análoga a (3)

5. $\dfrac{1}{F(D)} e^{kx}\, g(x) = e^{kx} \dfrac{1}{F(D+k)}\, g(x)$

En efecto, considerando la ecuación $F(D)\, y = e^{kx}\, g(x)$ vemos que

$$F(D)\, e^{kx} \left[\frac{1}{F(D+k)}\, g(x)\right] =$$

$$= e^{kx}\, F(D+k) \left[\frac{1}{F(D+k)}\, g(x)\right] = e^{kx}\, g(x)$$

(según la propiedad (4) de 6.1), por lo que

$$y = e^{kx} \frac{1}{F(D+k)}\, g(x) \text{ es la solución de } F(D)\, y = e^{kx}\, g(x)$$

teniendo entonces establecida la propiedad deseada.

6. $\dfrac{1}{F(D)} [f_1(x) + f_2(x)] = \dfrac{1}{F(D)} f_1(x) + \dfrac{1}{F(D)} f_2(x)$

En efecto, vemos que

$\dfrac{1}{F(D)} f_1(x)$ es solución de $F(D)\, y = f_1(x)$ y $\dfrac{1}{F(D)} f_2(x)$ es solución de $F(D)\, y = f_2(x)$, por lo que

$$\frac{1}{F(D)} f_1(x) + \frac{1}{F(D)} f_2(x)$$

será solución de $F(D)\, y = f_1(x) + f_2(x)$, quedando así establecida la propiedad.

7. $\dfrac{1}{F_2(D)\, F_1(D)} f(x) = \dfrac{1}{F_1(D)} \dfrac{1}{F_2(D)} f(x)$

En efecto, considerando la ecuación $F_2(D)\, F_1(D)\, y = f(x)$ vemos que

$$F_2(D)\, F_1(D) \left[\frac{1}{F_1(D)} \frac{1}{F_2(D)} f(x)\right] = f(x)$$

quedando así establecida la propiedad.

Como una aplicación de la teoría hasta este momento desarrollada, obtengamos una fórmula para una solución particular de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación

$$ar^2 + br + c = 0$$

En este caso tenemos que

$$F(D) = aD^2 + bD + c = a(D - r_1)\,(D - r_2)$$

Entonces, una solución particular está dada por

$$y_p = \frac{1}{a(D - r_1)\,(D - r_2)}\,f(x)$$

o

$$y_p = \frac{1}{a}\,\frac{1}{D - r_2}\,\frac{1}{D - r_1}\,f(x)$$

Observe que $\frac{1}{D - r_1}\,f(x)$ es una solución particular de la ecuación $(D - r_1)\,y = f(x)$, que es una ecuación lineal no homogénea de primer orden. Según lo visto anteriormente (en el capítulo 2) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{D - r_1}\,f(x) &= e^{-\int -r_1 dx}\int f(x)\, e^{\int -r_1 dx}\,dx\\ &= e^{r_1x}\int f(x)\, e^{-r_1x}\,dx\end{aligned}$$

Similarmente, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{D - r_2}\,\frac{1}{D - r_1}\,f(x) &= \frac{1}{D - r_2}\,\left[e^{r_1x}\int f(x)e^{-r_1x}\,dx\right]\\ &= e^{-\int -r_2 dx}\int \left[e^{r_1x}\int f(x)\, e^{-r_1x}dx\right] e^{\int -r_2 dx}\,dx\\ &= e^{r_2x}\int e^{(r_1 - r_2)x}\left(\int f(x)e^{-r_1x}\,dx\right)dx\end{aligned}$$

(Estudiaremos el caso $r_1 \neq r_2$).

Resolviendo esta integral por partes, poniendo

$$u = \int f(x)\, e^{-r_1 x}\, dx$$

$$dv = e^{(r_1 - r_2)^x}\, dx$$

nos queda

$$\frac{1}{D - r_2}\,\frac{1}{D - r_1}\, f(x) =$$

$$e^{r_2 r}\, [\, \frac{1}{r_1 - r_2}\, e^{(r_1 - r_2)x} \int f(x)\, e^{-r_1 x} dx$$

$$- \int f(x)\, e^{-r_1 x}\, \frac{1}{r_1 - r_2}\, e^{(r_1 - r_2)x}\, dx]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\, [\, e^{r_1 x} \int f(x) e^{-r_1 x} dx - e^{r_2 x} \int f(x) e^{-r_2 x} dx]$$

de modo que

$$\boxed{y_p = \frac{1}{a(r_1 - r_2)}\, [e^{r_1 x} \int f(x) e^{-r_1 x}\, dx - e^{r_2 x} \int f(x) e^{-r_2 x}\, dx]}$$

Veamos ahora cómo actúa el operador $\frac{1}{F(D)}$ sobre el polinomio

$$P(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = \sum_{r=0}^{m} b_r x^r$$

Usando el hecho (establecido en 6.1) de que el álgebra de los polinomios ordinarios es análoga al álgebra de los polinomios operacionales, hagamos la división del polinomio 1 por el polinomio $F(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ de tal modo que obtengamos por cociente un polinomio de grado m de la siguiente manera

$$F(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \begin{array}{|l} \multicolumn{1}{l}{\sum_{j=0}^{m} c_j D^j} \\ \hline 1 \qquad\qquad \end{array}$$

Con residuo $$\sum_{l=m+1}^{m+n} e_l D^l$$

donde $Q(D) = \sum_{j=0}^{m} C_j D^j$ es el cociente y

$$R(D) = \sum_{l=m+1}^{m+n} e_l D^l \text{ es el resto.}$$

Se cumple entonces que

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} c_j D^j\right) + \sum_{l=m+1}^{m+n} e_l D^l = 1$$

o sea

$$F(D)\ Q(D) + R(D) = 1$$

Aplicando el polinomio $P(x) = \sum_{r=0}^{m} b_r x^r$ en ambos miembros de esta última expresión obtenemos

$$F(D)\ Q(D)\ P(x) + R(D)\ P(x) = P(x)$$

Observe que $R(D)\ P(x) = 0$, pues $D^l x^r = 0$ para $l \geq m + 1$ y $r \leq m$, quedando entonces

$$F(D)\ [Q(D)\ P(x)] = P(x)$$

es decir, que $Q(D)\ P(x)$ es solución de la ecuación $F(D)\ y = P(x)$, o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{F(D)} P(x) = Q(D)\ P(x)$$

Resumiendo: para obtener el resultado de $\frac{1}{F(D)} P(x)$ dividimos el polinomio 1 por el polinomio $F(D)$ hasta obtener por cociente un polinomio (operacional) de grado m (el mismo grado de $P(x)$). Si $Q(D)$ es este polinomio, entonces

$$\frac{1}{F(D)} P(x) = Q(D)\ P(x).$$

Tenemos ya herramientas suficientes para obtener soluciones particulares de algunas ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

6.3 Aplicación a la obtención de soluciones particulares

Ejemplo 1

Obtener una solución particular de

$$y'' + 2y' + 3y = e^{2x}$$

Solución

Tenemos $F(D) = D^2 + 2D + 3$.

Entonces, en vista de la propiedad (2) de 6.2 tenemos

$$y_p = \frac{1}{F(D)} e^{2x} = e^{2x} \frac{1}{F(2)} = \frac{e^{2x}}{11}$$

(Ver ejemplo 1 de la sección 5 de este capítulo).

Ejemplo 2

Obtener una solución particular de

$$y^{\mathrm{IV}} + 3y'' + 10y = \cos 5x$$

Solución

Tenemos $F(D) = D^4 + 3D^2 + 10$.

Entonces

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \cos 5x = \frac{1}{F(D^2)} \cos 5x$$

donde $F(D^2) = (D^2)^2 + 3D^2 + 10$

Entonces, en vista de la propiedad (4) de 6.2 tenemos

$$y_p = \frac{1}{F(D^2)} \cos 5x = \frac{\cos 5x}{F(-5^2)} = \frac{\cos 5x}{(-5^2)^2 + 3(-5^2) + 10}$$

$$= \frac{\cos 5x}{560}$$

Ejemplo 3

Hallar y_p de la ecuación

$$y'' + 2y' - 3 = \operatorname{sen} 3x$$

Solución

En este caso tenemos $F(D) = D^2 + 2D - 3$ y no podemos entonces aplicar la propiedad (3) de 6.2 puesto que no existe $\tilde{F}$ tal que $\tilde{F}(D^2) = F(D)$.

En estos casos se puede recurrir al siguiente truco: considerar sen $3x$ como la parte imaginaria de la exponencial $e^{i(3x)}$, y trabajar en esta última, es decir, considerar la ecuación:

$$y'' + 2y' - 3y = e^{i(3x)}$$

y entonces, llamando $\tilde{y}_p$ a la solución particular que de ésta obtengamos, tendremos que nuestra solución particular buscada es

$$y_p = Im\ (\tilde{y}_p)$$

La justificación de este truco se basa en la manera como se deriva una función —de variable real— a valores complejos. Si $f\colon I \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de ese estilo, entonces $f = u + iv$, donde $u,v\colon I \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, teniendo que $f' = u' + iv'$ y, en general, $f^{(n)} = u^{(n)} + iv^{(n)}$ (con hipótesis adecuadas sobre diferenciabilidad).

Observe que nosotros buscamos una función (real de variable real) y_p, tal que

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = \operatorname{sen} 3\,x$$

Si introducimos la función (real de variable real) z_p, tal que:

$$z_p'' + 2z_p' - 3z_p = \cos 3\,x$$

tenemos que, multiplicando por i la penúltima expresión y sumándola a la última, obtenemos:

$$z_p'' + iy_p'' + 2(z_p'' + iy_p') - 3(z_p + iy_p) = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$$

o

$$(z_p + iy_p)'' + 2(z_p + iy_p)' - 3(z_p + iy_p) = e^{i(3x)}$$

de modo que, llamando $\tilde{y}_p = z_p + iy_p$, tenemos que

$$\tilde{y}_p' + 2\tilde{y}_p - 3\tilde{y}_p = e^{i(3x)}$$

Resolviendo para $\tilde{y}_p$ (se supone que esta nueva ecuación tiene ventajas sobre la ecuación original en cuanto a la aplicabilidad de los métodos operacionales que estamos estudiando), y tomando la parte imaginaria de ella, obtendremos el resultado inicialmente procurado.

Tenemos entonces que

$$\tilde{y}_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3}\, e^{i(3x)}$$

$$= \frac{e^{i(3x)}}{(3i)^2 + 2(3i) - 3} = \frac{1}{6i - 12}\, e^{i(3x)}$$

$$= \frac{\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x}{6i - 12} =$$

$$= \frac{-1}{180}\,[(6 \cos 3x + 12 \operatorname{sen} 3x)\, i + 12 \cos 3x - 6 \operatorname{sen} 3x]$$

de modo que nuestra solución particular buscada es:

$$y_p = \frac{-1}{30} (\cos 3x + 2 \operatorname{sen} 3x)$$

Ejemplo 4

Hallar y_p para la ecuación

$$y'' + 2y = e^{-2x} (x^2 + 1)$$

Solución

Tenemos que

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2} e^{-2x} (x^2 + 1) =$$

$$= e^{-2x} \frac{1}{(D - 2)^2 + 2} (x^2 + 1) =$$

$$= e^{-2x} \frac{1}{D^2 - 4D + 6} (x^2 + 1)$$

Haciendo la división de 1 por $D^2 - 4D + 6$ tenemos

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{6} + \frac{1}{9} D + \frac{5}{108} D^2 \\ \cline{2-2}
6 - 4D + D^2 & 1 \\
 & -1 + \frac{4}{6} D - \frac{1}{6} D^2 \\ \cline{2-2}
 & \frac{2}{3} D - \frac{1}{6} D^2 \\
 & -\frac{2}{3} D + \frac{4}{9} D^2 - \frac{1}{9} D^3 \\ \cline{2-2}
 & \frac{5}{18} D^2 - \frac{1}{9} D^3 \\
 & -\frac{5}{18} D^2 + \frac{5}{28} D^3 - \frac{5}{108} D^4 \\ \cline{2-2}
 & \frac{17}{252} D^3 - \frac{5}{108} D^4
\end{array}
$$

de modo que

$$\frac{1}{D^2 - 4D + 6}(x^2 + 1) = (\frac{1}{6} + \frac{1}{9}D + \frac{5}{108}D^2)(x^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{6}(x^2 + 1) + \frac{1}{9}(2x) + \frac{5}{108}(2)$$

$$= \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$$

y entonces

$$y_p = e^{-2x}(\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{7}{27})$$

Ejemplo 5

Hallar y_p para la ecuación

$$y^{v} + 4y''' = 3 \operatorname{sen} 2x$$

Solución

En este caso $F(D) = D^5 + 4D^3$

Si intentamos tomar la parte imaginaria de y_p para la ecuación

$$y^{v} + 4y''' = 3\, e^{i(2x)}$$

observe que tendríamos $F(2i) = 0$, de modo que este truco no sirve en este momento.

Procedamos como sigue:

$$y_p = 3\frac{1}{D^5 + 4D^3} \operatorname{sen} x = 3\frac{1}{D^2 + 4} \bullet \frac{1}{D^3} \operatorname{sen} 2x$$

Observe que:

$$\frac{1}{D^3} \operatorname{sen} 2x \int\int\int \operatorname{sen} 2x\, dx\, dx\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\cos 2x$$

de modo que

$$y_p = \frac{3}{8} \frac{1}{D^2 + 4} \cos 2x$$

Aún no podemos usar la propiedad (4) de 6.2, pues siendo $F(D^2) = D^2 + 4$, tendríamos $F(-4) = -4 + 4 = 0$, de modo que pongamos

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{3}{8} Re \left[\frac{1}{D^2 + 4} e^{i(2x)} \right] \\ &= \frac{3}{8} Re \left[\frac{1}{D - 2i} \frac{1}{D + 2i} e^{i(2x)} \right] \\ &= \frac{3}{8} Re \left[\frac{1}{D - 2i} \frac{e^{i(2x)}}{4i} \right] \end{aligned}$$

Al considerar

$$\frac{1}{D - 2i} e^{i(2x)}$$

nos conviene ver a $e^{i(2x)}$ como el producto de $e^{i(2x)}$ por 1, de modo que, aplicando la propiedad (5) de 6.2, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D - 2i} e^{i(2x)} &= e^{i(2x)} \frac{1}{D - 2i + 2i} \bullet 1 \\ &= e^{i(2x)} \frac{1}{D} \bullet 1 \\ &= e^{i(2x)} x \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{3}{8} Re \left[\frac{1}{4i} x\, e^{i(2x)} \right] \\ &= \frac{3}{8} Re \left[-\frac{1}{4} x (i \cos 2x - \operatorname{sen} 2x) \right] \\ &= \frac{3}{32} x \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Hallar y_p para la ecuación

$$2y'' + 5y' = 100\, xe^{-x} \cos x$$

Solución

Hallemos $\tilde{y}_p$ para la ecuación

$$2y'' + 5y' = 100\,xe^{-x}\,e^{ix}$$

y tomemos luego la parte real del resultado que obtengamos.

Tenemos

$$\tilde{y}_p = \frac{1}{2D^2 + 5D}\,100\,x\,e^{(i-1)x} =$$

$$= 100\,e^{(i-1)x}\,\frac{1}{2(D + i - 1)^2 + 5(D + i - 1)}\,x$$

$$= 100\,e^{(i-1)x}\,\frac{1}{2D^2 + (1 + 4i)D + i - 5}\,x$$

Dividiendo 1 por $2D^2 + (1 + 4i)D + i - 5$ obtenemos por cociente $\frac{1}{i-5} - \frac{1+4i}{(i-5)^2}\,D$ (más alguna otra cosa del resto que no interesa), de modo que

$$\tilde{y}_p = 100e^{(i-1)x}\left(\frac{1}{i-5} - \frac{1+4i}{(i-5)^2}\,D\right)x$$

$$= 100\,e^{(i-1)x}\left(\frac{x}{i-5} - \frac{1+4i}{(i-5)^2}\right)$$

$$= 100\,e^{(i-1)x}\left(\frac{(-26x - 106)i - 130\,x + 16}{676}\right)$$

$$= \frac{100}{676}e^{-x}\,[[(-26x - 106)\cos x + (-130x + 16)\operatorname{sen} x]\,i$$

$$+ [(-130x + 16)\cos x + (-26x + 106)\operatorname{sen} x]]$$

de tal manera que nuestra solución particular buscada es (después de simplificar):

$$y_p = e^{-x}\left[\left(-\frac{250}{13}\,x + \frac{400}{169}\right)\cos x + \left(\frac{50}{13}\,x + \frac{2650}{169}\right)\operatorname{sen} x\right]$$

(Ver ejemplo 7 de la sección 5 de este capítulo).

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 6)

1. Considere la ecuación $F(D)y = e^{kx}$, donde $F(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$. Demuestre que $F(k) = 0$ si y sólo si $y = e^{kx}$ es solución de la ecuación $F(D)y = 0$.
2. Considere la ecuación $F(D^2)y = \operatorname{sen} kx$. Demuestre que $F(k) = 0$ si y sólo si $y = \operatorname{sen} kx$ es solución de la ecuación $F(D^2)y = 0$.
3. Sea $F(D) = aD^2 + bD + c$. Demuestre que

$$F(D)(xe^{kx}) = F(k)xe^{kx} + F'(k)e^{kx}$$

4. Considere la ecuación $F(D)y = 0$, donde $F(D) = aD^2 + bD + c$. Suponga que $F(k) = 0$ posee una sola raíz (doble) igual a k^*. Demuestre que: 1) $F(D)e^{k^*x} = 0$ es una identidad; 2) $F(D)\,(xe^{k^*x}) = 0$ es una identidad. ¿Cuál es la solución general de la ecuación $F(D)y = 0$? Explique.

   Sugerencia: el inciso 1) es trivial. Si k^* es una raíz doble de $F(k) = 0$, ¿cuánto vale $F'(k^*)$? Aplique el resultado del problema anterior.

5. Sea $F(D) = aD^3 + bD^2 + cD + d$. Demuestre que

$$F(D)\,(e^{kx}) = F(k)xe^{kx} + F'(k)e^{kx}$$

$$F(D)\,(x^2e^{kx}) = F(k)x^2e^{kx} + 2F'(k)xe^{kx} + F''(k)e^{kx}$$

6. Considere la ecuación $F(D)y = 0$, donde $F(D) = aD^3 + bD^2 + cD + d$. Suponga que $F(k) = 0$ posee solamente la raíz (triple) k^*. Demuestre que: 1) $F(D)e^{k^*x} = 0$ es una identidad; 2) $F(D)\,(xe^{k^*x}) = 0$ es una identidad; 3) $F(D)\,(x^2e^{k^*x}) = 0$ es una identidad. ¿Cuál es la solución general de la ecuación $F(D)y = 0$? Explique.

   Sugerencia: el inciso 1) es trivial. Si k^* es triple de $F(k) = 0$, ¿cómo es $F'(k^*)$?, ¿cómo es $F''(k^*)$?

   Aplique el resultado del problema anterior.

En los siguientes ejercicios (7-16) use métodos operacionales para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

7. $y'' + 3y' + 2y = x^2e^x + \operatorname{sen} x$.
8. $(D^2 + 1)y = \operatorname{sen} x$
9. $(D^2 + 2D + 2)y = e^x + 3$
10. $(D^2 + 3D + 1)y = x + e^x \operatorname{sen} x$
11. $(D^2 - 1)y = x \operatorname{senh} x$
12. $y'' - 4y' + 4y = 4x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$
13. $y'' + 3y' + y = \operatorname{sen} 2x + \cos x$
14. $y''' + 3y + 3y' + y = xe^{-x}$

15. $(D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D + 1)y = \operatorname{sen} x$

16. $(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = x^3 e^x$

17. Sea $h\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el intervalo I. Sea x_0 un punto de I. Muestre que

$$f(x) = e^{ax} \int_{x_o}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-at} h(t)\, dt$$

es una solución de la ecuación $(D - a)^k y = 0$ que satisface las condiciones iniciales $f(x_0) = f'(x_o) = \ldots = f^{(k-1)}(x_o) = 0$.

Sugerencia: recuerde la regla de Leibniz para la derivación bajo el signo de integral

$$\frac{d}{dx} \int_{r(x)}^{s(x)} f(x,t)dt = f(x,s(x))s'(x) - f(x,r(x))r'(x) + \int_{r(x)}^{s(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

7. ECUACIONES DE EULER

A una ecuación de la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_o y = 0$$

se le llama ecuación de Euler, la cual es un tipo especial de ecuación lineal (homogénea) de coeficientes variables que puede reducirse a una ecuación lineal (homogénea) de coeficientes constantes (y por lo tanto resolverse por medio de alguno de los métodos discutidos en las secciones precedentes) por medio de una sustitución adecuada de la variable independiente.

En efecto, haciendo la sustitución

$$x = e^t$$

obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bullet \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \bullet \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t} \bullet y_t' = e^{-t} y_t'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(e^{-t} y_t') = \frac{d}{dt}(e^{-t} y_t') \bullet \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$= e^{-t}\,[e^{-t} y_t'' - e^{-t} y_t'] = e^{-2t}(y_t'' - y_t')$$

Podemos probar, por inducción, que

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \sum_{i=1}^{k} b_i y_t^{(i)}$$

donde b_i ($i = 1, \ldots, k$) son ciertas constantes.

En efecto, suponga válida la relación anterior y probemos que es válida para $k + 1$. Derivando obtenemos

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx} (e^{-kt} \sum_{i=1}^{k} b_i y_t^{(i)}) =$$

$$= e^{-t} \frac{d}{dt} (e^{-kt} \sum_{i=1}^{k} b_i y_t^{(i)}) =$$

$$= e^{-t} [e^{-kt} \sum_{i=1}^{k} b_i y_t^{(i+1)} - ke^{-kt} \sum_{i=1}^{k} b_i y_t^{(i)}]$$

$$= e^{-(k+1)t} [-kb_1 y_t' + \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - kb_{i+1}) y_t^{(i+1)} + b_k y_t^{(k+1)}]$$

$$= e^{-(k+1)t} \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{b}_i y_t^{(i)}$$

quedando así probada nuestra afirmación.

Observe entonces que para $k = 1, \ldots, n$

$$x^k y^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} b_{i_k} y_t^{(i)}$$

de modo que nuestra ecuación original

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k y^{(k)} + a_o y = 0$$

queda como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=1}^{k} b_{i_k} y_t^{(i)} \right) + a_o y = 0$$

que es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación:

$$x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$$

Solución

Haciendo $x = e^t$ obtenemos

$$y' = e^{-t}y_t'$$

$$y'' = e^{-2t}(y_t'' - y_t')$$

de modo que sustituyendo nos queda

$$y_t'' - y_t' + 3y_t' + 5y_t = 0$$

o

$$y_t'' + 2y_t'' + 5y_t = 0$$

cuya ecuación característica es

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

que tiene por raíces

$$r_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Entonces

$$y_t = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$$

y, finalmente, la solución de nuestra ecuación original será:

$$y = x^{-1}(c_1 \cos(2ln\, x) + c_2 \operatorname{sen}(2ln\, x))$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación

$$(2x + 1)^2 y''' + 2(2x + 1)\, y'' + y' = 0$$

Solución

Multiplicando toda la ecuación por $(2x + 1)$ obtenemos

$$(2x + 1)^3y''' + 2(2x + 1)^2y'' + (2x + 1)y' = 0$$

Ejemplo 1

Resolver la ecuación:

$$x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$$

Solución

Haciendo $x = e^t$ obtenemos

$$y' = e^{-t}y_t'$$

$$y'' = e^{-2t}(y_t'' - y_t')$$

de modo que sustituyendo nos queda

$$y_t'' - y_t' + 3y_t' + 5y_t = 0$$

o

$$y_t'' + 2y_t'' + 5y_t = 0$$

cuya ecuación característica es

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

que tiene por raíces

$$r_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Entonces

$$y_t = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$$

y, finalmente, la solución de nuestra ecuación original será:

$$y = x^{-1}(c_1 \cos (2ln\, x) + c_2 \operatorname{sen} (2ln\, x))$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación

$$(2x + 1)^2 y''' + 2(2x + 1)\, y'' + y' = 0$$

Solución

Multiplicando toda la ecuación por $(2x + 1)$ obtenemos

$$(2x + 1)^3y''' + 2(2x + 1)^2y'' + (2x + 1)y' = 0$$

Haciendo $z = 2x + 1$, obtenemos

$$y' = \frac{dy}{dz} \bullet \frac{dz}{dx} = 2y_z'$$

$$y'' = 4y_z'', \; y''' = 8y_z'''$$

de modo que la ecuación original queda convertida en

$$8z^3 \, y_z''' + 8z^2 \, y_z'' + 2z \, y_z' = 0$$

que es una ecuación de Euler.

Haciendo

$$z = e^t$$

obtenemos

$$y_z' = e^{-t} \, y_t'$$

$$y_z'' = e^{-2t} \, (y_t'' - y_t')$$

$$y_z''' = e^{-3t} \, (y_t''' - 3y_t'' + 2y_t')$$

Sustituyendo nos queda

$$4(y_t''' - 3y_t'' + 2y_t') + 4(y_t'' - y_t') + y_t' = 1$$

o

$$4y_t''' - 8y_t'' + 5y_t' = 0$$

cuya ecuación característica es

$$4r^3 - 8r^2 + 5r = 0$$

que tiene por raíces $r = 0, \; 1 \pm \frac{1}{2}i$

Entonces tenemos que

$$y_t = c_1 + e^t \, (c_2 \cos \tfrac{1}{2}t + c_3 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t)$$

Regresando a la variable original nos queda

$$y = c_1 + (2x + 1) \left[c_1 \cos \frac{ln \, (2x + 1)}{2} + c_2 \operatorname{sen} \frac{ln \, (2x + 1)}{2} \right]$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 7)

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones (1-10).

1. $3x^2y'' + 2xy' - 10y = 0$
2. $y'' - 5x^{-1}y' - 10x^{-2}y = 0$

3. $xy'' - 2y' = 0$

4. $(5x + 4)^2y'' + (5x + 4)y' + 3y = 0$

5. $(x + 2)^3y''' - (x + 2)^2y'' + 4(x + 2)y' + 3y = 0$

6. $(x + 1)^2y''' - 12y' = 0$

7. $x^3y''' + 3x^2y'' + 3xy + y = 0$

8. $x^4y^{iv} + 6xy' + 3y = 0$

9. $(2x + 1)^3y''' + (2x + 1)y' + 3y = 0$

10. $y''' + \dfrac{5}{x + 3}y'' + \dfrac{10}{(x + 3)^2}y' + \dfrac{2y}{(x + 3)^3} = 0$

11. Este problema presenta un método alternativo para resolver la ecuación de Euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. Se procuran soluciones de la forma $y = x^k$.

a) Demuestre que $y = x^k$ es una solución de $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ si y solamente si

$$ak^2 + (b - a)k + c = 0 \qquad \textbf{(I)}$$

Sean k_1 y k_2 las raíces de la ecuación **(I)**.

b) *Caso de raíces reales distintas.* Demuestre que si k_1 y k_2 son dos reales diferentes, entonces la solución general de la ecuación de Euler es

$$y = C_1\, x^{k_1} + C_2\, x^{k_2}$$

c) *Caso de raíces reales iguales.* Suponga que $k_1 = k_2 = k$. En este caso tenemos solamente una solución de la ecuación de Euler, dada por $y = x^k$. Use el método de reducción del orden para demostrar que una segunda solución de la ecuación de Euler es $y_2 = x^k \ln x$. Demuestre entonces que, en este caso, la solución general viene dada por

$$y = x^k\,(C_1 + C_2 \ln x)$$

d) *Caso de raíces complejas.* Suponga que $k_1 = p + iq$, $k_2 = p - iq$. En este caso tendríamos que la solución para la ecuación de Euler sería

$$y = C_1x^{p+iq} + C_2\, x^{p-iq}$$

$$= x^p(C_1\, x^{iq} + C_2\, x^{-iq})$$

Procedamos de una manera puramente formal para dar sentido a las expresiones x^{iq} y x^{-iq}. Observe que

$$\begin{aligned} x^{\pm iq} &= e^{\pm iq \ln x} \\ &= \cos(q \ln x) \pm i \operatorname{sen}(q \ln x) \end{aligned}$$

Demuestre entonces que, efectivamente

$$y = x^p (C_1 \cos(q \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(q \ln x))$$

es la solución general de la ecuación de Euler.

8. FENÓMENOS DE VIBRACIONES

Al comienzo de este capítulo se presentó el fenómeno del movimiento de un sistema masa-resorte, como ejemplo de una situación física cuya descripción se lograba al plantear cierta ecuación diferencial lineal (de segundo orden homogénea con coeficientes constantes). Se trataba pues de describir el movimiento de la masa m sujeta a un extremo de un resorte, el cual tenía su otro extremo fijo.

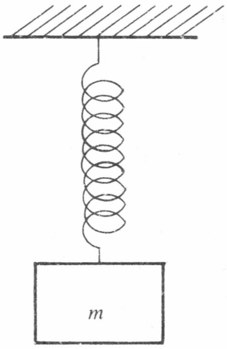


Figura 9. Sistema masa-resorte.

Se vio que la ecuación diferencial que describía este fenómeno era

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0$$

donde $x = x(t)$ nos daba la información de la posición de la masa m al tiempo t (recordando que $x = 0$ en la posición de equilibrio, $x > 0$ para desplazamientos hacia arriba y $x < 0$ para desplazamientos hacia abajo) y k era la constante del resorte.

Después de lo que se ha estudiado en este capítulo resulta inmediato ver que la solución de tal ecuación es

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias que aparecen en la solución general de la ecuación y que quedan determinadas por las condiciones iniciales: $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_0'$, i.e. al comienzo del movimiento la masa m se encontraba a una distancia x_0 de su posición de equilibrio y en ese instante se le imprimió una velocidad de x_0'.
Nos queda finalmente que

$$x(t) = x_o \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \sqrt{\frac{m}{k}}\, x_o' \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

No es difícil darse cuenta que esta función es un caso particular de una función del tipo

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi \right)$$

donde A y ϕ son constantes que dependen de x_0 y x_0'.
A una ecuación como esta última se le llama "armónica" y su gráfica tiene una apariencia como la siguiente:

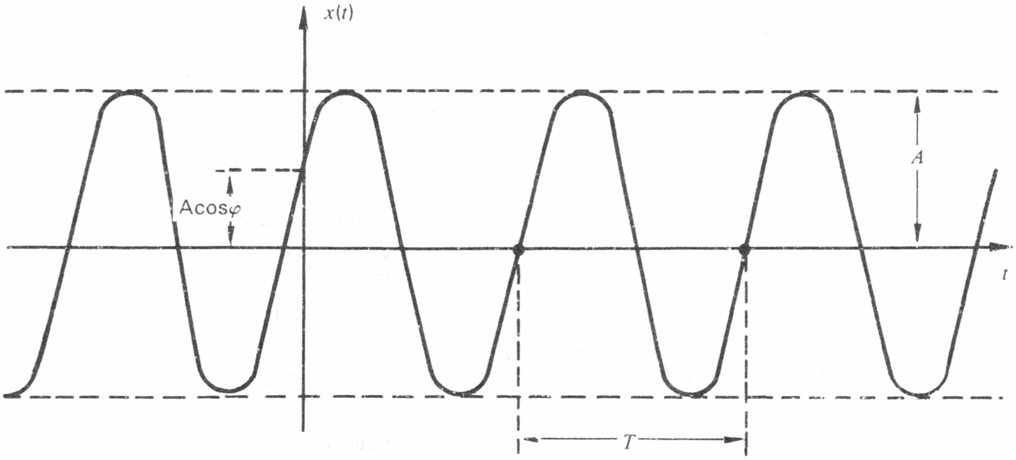


Figura 10. Función armónica de amplitud A, periodo T y fase inicial φ.

donde a T se le llama periodo ($\frac{1}{T}$ frecuencia), a ϕ se le llama ángulo de fase inicial y a A se le llama amplitud.

Observe que desde el punto de vista físico el fenómeno de movimiento masa-resorte considerado inicialmente queda descrito como un movimiento oscilatorio que después de T seg vuelve a repetirse.

Para fijar un poco las ideas piense que $x_0' = 0$, i.e. el cuerpo simplemente "se suelta" de la posición x_0 (positivo).

Se puede ver de inmediato que en este caso la ecuación de la armónica correspondiente es

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

cuya gráfica es

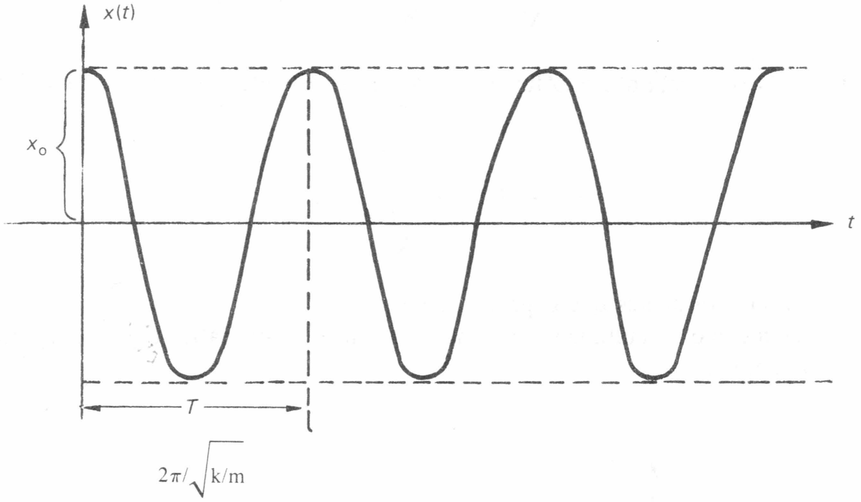


Figura 11. La armónica $x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t.$

Es decir, soltamos el cuerpo a x_0 unidades de distancia por encima de su posición de equilibrio. El cuerpo irá en su movimiento hacia abajo hasta llegar a las x_0 unidades de distancia por debajo de su posición de equilibrio, tomando, para hacer esto, $\pi/\sqrt{k/m}$ seg, momento en el cual el cuerpo comienza su movimiento hacia arriba, de modo que después de $2\pi/\sqrt{k/m}$ seg, el cuerpo se encuentra en el lugar en donde estaba a $t = 0$, y comienza de nuevo la historia: va hacia abajo, luego hacia arriba, etc.

En esta sección pretendemos hacer un análisis más general estudiando fenómenos físicos de movimientos vibratorios, de los cuales el caso anterior es sólo un ejemplo (muy particular).

8.1 Sistemas masa-resorte y circuitos RLC

Comencemos por considerar un sistema masa-resorte.

En el análisis hecho anteriormente logramos describir matemáticamente el movimiento del cuerpo del sistema masa-resorte en cuestión; aún más, dimos una interpretación física de tal movimiento. Sin embargo, en nuestro intento de dar ese contexto físico a la solución de la ecuación diferencial, apareció (en el penúltimo párrafo) una afirmación que está lejos de nuestra intuición física: ". . . y comienza de nuevo la historia: va hacia abajo, luego hacia arriba, etc,", a lo que podríamos agregar "y así *ad infinitum*". ¿Ocurre realmente esto en la práctica? Aunque nunca hallamos realizado el experimento nuestra intuición nos dice que el movimiento del cuerpo *tiende a desaparecer* debido a un factor de *amortiguamiento* o *resistencia* que se explica con base en el fenómeno de *fricción*. Introduzcamos pues este factor en el sistema masa-resorte.

Consideremos (con fines de simplificación) que este elemento de amortiguamiento se encuentra concentrado en un lugar físico específico del sistema al que representaremos por:

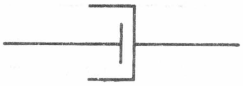


Figura 12. El elemento de amortiguamiento.

La experiencia demuestra que a velocidades pequeñas la fuerza de amortiguamiento (fa) es proporcional a la velocidad v del movimiento del cuerpo, por lo que

$$fa = Dv$$

donde D es una constante de proporcionalidad (cuyas unidades son entonces en el sistema MKS newton-seg/m).

Consideraremos también que la masa m recibe una fuerza $F(t)$ *externa* (independiente de la fuerza restitutiva del resorte y la fuerza de amortiguamiento).

Tenemos pues nuestro sistema como aparece a continuación:

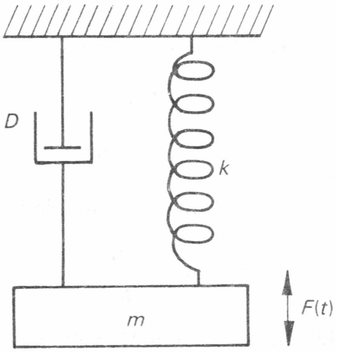


Figura 13. Sistema masa-resorte amortiguado con excitación externa.

Hagamos la descripción matemática de él. Según la segunda ley de Newton tenemos la siguiente expresión

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - D\frac{dx}{dt} + F(t)$$

La explicación del signo negativo en el término kx fue dada anteriormente. Se invita al lector a dar una explicación física del signo negativo en el factor de amortiguamiento $Dv = D\dfrac{dx}{dt}$ (considerando que D es una constante positiva).

La ecuación nos queda finalmente como

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + kx = F(t)} \qquad \ldots\ldots (1)$$

que es una ecuación diferencial lineal no homogénea de 2o. orden con coeficientes constantes.

Sin más comentarios por el momento pasemos a considerar una situación física "distinta": un circuito RLC.

Recordemos rápidamente algunos conceptos básicos involucrados en el estudio de los circuitos RLC.

Una *resistencia* (o resistor) en un circuito es un elemento del mismo que tiene un comportamiento tal que la intensidad de corriente ($i(t)$ en amperes) que circula por él es proporcional a la diferencia de potencial en los extremos del mismo ($v(t)$ en volts). Esquemáticamente tenemos

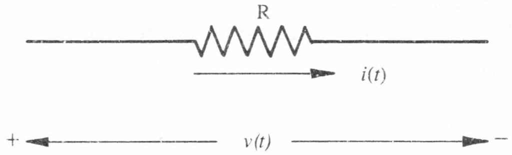


Figura 14. Resistencia.

$$v(t) = Ri(t)$$

lo cual no es más que una formulación de la conocida Ley de Ohm. R es el valor de la resistencia que se mide en *ohms* (Ω).

Una *inductancia* (o inductor) en un circuito es un elemento del mismo que satisface

$$v(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt}$$

donde L es el valor de la inductancia, cuyas unidades son volts-seg/ampere, o bien, según la Ley de Faraday, que establece que la variación instantánea del flujo magnético $\phi(t)$ —en webers— por un cierto elemento, con el tiempo, es igual a la diferencia de potencial en los extremos del elemento, o sea $v(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt}$, tendríamos que las unidades de L son webers/ampere, conocidas como *henrys*. Esquemáticamente se representa

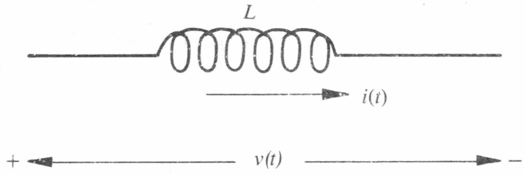
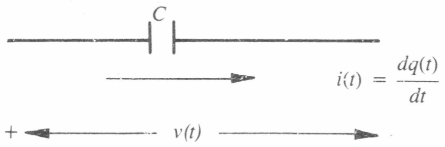


Figura 15. Inductancia.

Una *capacitancia* (o capacitor) en un circuito es un elemento en el que la carga acumulada $q(t)$, medida en coulombs, es proporcional a la diferencia de potencial en sus extremos, esto es

$$q(t) = C\,v(t)$$

donde C es el valor de la capacitancia, cuyas unidades son entonces coulombs/volt conocidas como *farads*.
Esquemáticamente



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Figura 16. Capacitancia.

Consideremos ahora un circuito RLC paralelo, formado por un resistor, un capacitor y un inductor, conectados a una fuente de corriente como se indica a continuación:

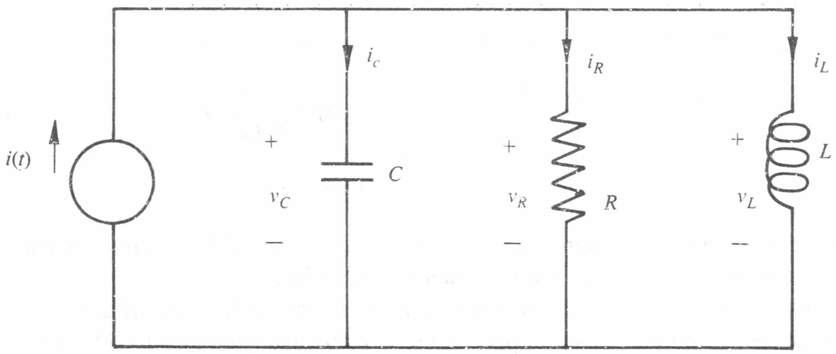


Figura 17. Circuito RLC paralelo.

Estamos denotando con v_C, v_R y v_L las diferencias de potencial en los extremos de cada uno de los elementos y con i_C, i_R e i_L las corrientes en cada una de las correspondientes ramas en donde se encuentran.

Según la ley de las corrientes de Kirchhoff tendremos

$$i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = i(t)$$

donde

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{1}{R}\,v_R(t)$$

Entonces

$$C\,\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{R}\,v_R(t) + i_L(t) = i(t)$$

Pero, según la ley de las tensiones de Kirchhoff, tenemos que $v_C(t) = v_R(t) = v_L(t)$, por lo que la última expresión se transforma en

$$C\,\frac{dv_L(t)}{dt} + \frac{1}{R}\,v_L(t) + i_L(t) = i(t)$$

o sea

$$CL\,\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\,L\,\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i(t)$$

o finalmente

$$\boxed{\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\,\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\,i_L(t) = \frac{1}{LC}\,i(t)} \quad \ldots\ldots (2)$$

siendo ésta la ecuación diferencial que modela al circuito *RLC* paralelo, cuya solución nos reporta el valor de $i_L(t)$ y por lo tanto el de $i_R(t)$ e $i_C(t)$.

Observe que es importante conocer las condiciones iniciales en las que se encontraba el circuito en el sentido de si el capacitor y/o la inductancia tenían a $t = 0$ ‘‘energía almacenada’’, es decir, si por el inductor circulaba al inicio cierta corriente, digamos $i_L(0)$ y si el capacitor tenía carga almacenada, digamos $q(0)$; información que nos conviene manejar como $\frac{1}{LC}\, q(0) = i_L'(0)$. Entonces de la ecuación (2) disponemos de la información de las condiciones iniciales $i_L(0)$ e $i_L'(0)$.

Por último consideremos un circuito *RLC* serie que consiste, al igual que el anterior, de un resistor, un inductor y un capacitor conectados en serie a una fuente de tensión como se muestra en la figura 18.

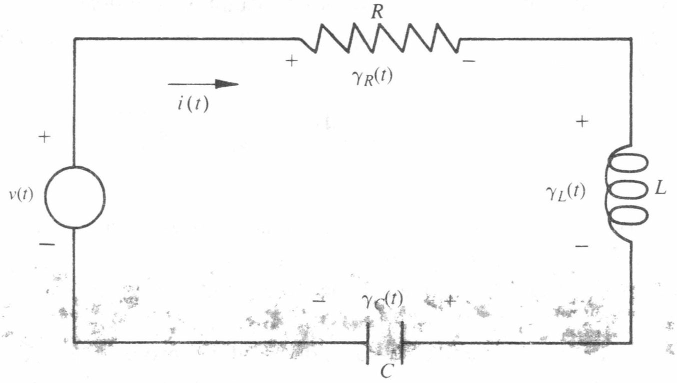


Figura 18. Circuito RLC serie.

Nuevamente las leyes de Kirchhoff nos dicen

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v(t)$$

con $i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$. Es un ejercicio elemental combinar las ecuaciones correspondientes y comprobar que esto se puede escribir como

$$\boxed{\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\, v_C(t) = \frac{v(t)}{LC}} \qquad \ldots . \, (3)$$

Nuevamente es importante saber si el capacitor y el inductor tenían almacenada energía a $t = 0$, información que manejamos como

$$\frac{1}{C}\, q(0) = v_C(0) \text{ y } \frac{1}{C}\, i_L(0) = v_C'(0).$$

La ecuación (3) nos permite resolver para $v_C(t)$ y por lo tanto para $v_R(t)$ y $v_L(t)$ (¿cómo?). Antes de continuar, veamos a las ecuaciones (1), (2) y (3) juntas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m}\,\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}\, x = \frac{1}{m}\, F(t) \qquad \underline{\hspace{2cm}} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{1}{LC}i(t) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C = \frac{1}{LC}v(t) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

Cada una de estas ecuaciones modela una situación física distinta, sin embargo, desde el punto de vista matemático son (excepto por constantes) idénticas: son ecuaciones diferenciales lineales de 2° orden no homogéneas con coeficientes constantes. De aquí en adelante vamos a considerar la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dt} + \omega_o^2y = f(t)$$

donde α y ω_o son ciertas constantes llamadas *constantes de amortiguamiento* y *velocidad angular de oscilación no amortiguada* respectivamente.

Más adelante quedarán justificados, desde el punto de vista físico, los nombres de estas constantes.

Conviene hacer hincapié en la forma en que estamos procediendo para lograr nuestro objetivo de estudiar, de una manera general, ciertos fenómenos físicos relacionados con vibraciones. El lector estará de acuerdo en que sería completamente innecesario hacer el estudio *por separado* del comportamiento de un sistema masa-resorte, de un circuito RLC paralelo y de un circuito RLC serie, pues cada uno de ellos nos está conduciendo a estudiar una ecuación diferencial cuyas características matemáticas son del todo iguales en los tres casos (por ejemplo, en cálculo, no se separa el estudio de la derivada para la función $y = x^2$ del de la función $y = x^5$; se estudia de una vez por todas cuál es la derivada de $y = x^n$ con *n cualquier número natural*). La matemática se caracteriza (entre muchísimas otras cosas) en que los estudios que se hacen en ella tienen un *carácter general* (de hecho los matemáticos pensamos que la belleza de un estudio en matemáticas (que puede ir desde un simple teorema hasta toda una teoría), va en proporción directa a la generalidad que éste abarca)*.

Yendo todavía más lejos, podríamos *definir* un sistema lineal de segundo orden como aquel que está matematizado por una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dt} + \omega_o^2y = f(t) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (4)$$

donde α y ω_o son ciertas constantes, y entonces los fenómenos vibratorios que estamos estudiando en esta sección quedarían como un caso particular de este estudio.

Introduzcamos ahora la terminología que manejaremos durante el resto de esta sección.

Refiriéndonos a la ecuación (4) llamaremos a la función $y\ (t)$ *respuesta* del sistema; a la función $f(t)$ (excepto por constantes) la llamaremos *función de excitación* del sistema.

---

* Alguien dijo: ''La matemática es la ciencia de matar muchos pájaros de una sola pedrada''.

Diremos que la ecuación (4) representa un fenómeno de *vibraciones libres* si la función de excitación es nula. En caso contrario diremos que se trata de un fenómeno de *vibraciones forzadas*.

Con esta perspectiva unificadora con la que abordaremos el estudio de los fenómenos vibratorios vemos pues que estamos interesados en, dado un sistema lineal de segundo orden, describir la respuesta de éste *e interpretarla físicamente.*
Comencemos:

8.2 Vibraciones libres

Para estudiar el fenómeno de vibraciones libres debemos considerar la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dt} + \omega_o^2 y = 0$$

Antes de hacer el análisis del tipo de respuesta a un fenómeno de este tipo veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

La figura siguiente muestra un sistema masa-resorte. La constante del resorte es de 800 newton/m y la constante de amortiguamiento es de 300 newton-seg/m. La masa del cuerpo es de 10 Kg.

A $t = 0$, encontrándose el cuerpo en su posición de equilibrio, se le imprime una velocidad hacia abajo de 10 m/seg. Describir el movimiento del cuerpo para $t > 0$.

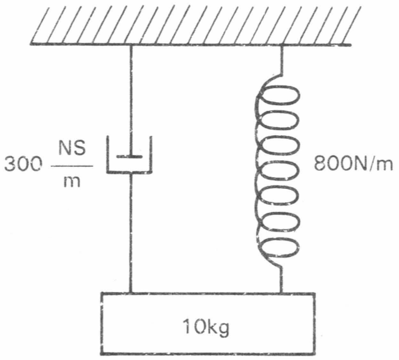


Figura 19. Ejemplo 1.

Solución

Según la ecuación (1) el movimiento del cuerpo queda descrito por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 30\,\frac{dx}{dt} + 80x = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = -10$.

La ecuación característica $m^2 + 30m + 80 = 0$ tiene por raíces

$$m_1 = -15 + \sqrt{145}$$

$$m^2 = -15 - \sqrt{145}$$

Por lo que la solución general es

$$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

Imponiendo las condiciones iniciales encontramos que

$C_1 = -5/\sqrt{145}$, $C_2 = 5/\sqrt{145}$, de modo que el movimiento del cuerpo para $t > 0$ queda descrito por

$$x = \frac{5}{\sqrt{145}} \left(e^{(-15-\sqrt{145})t} - e^{(-15+\sqrt{145})t}\right)$$

$$x = \frac{-5}{2\sqrt{145}} e^{-15t} \operatorname{senh} \sqrt{145}\, t$$

cuyo comportamiento gráfico es del tipo

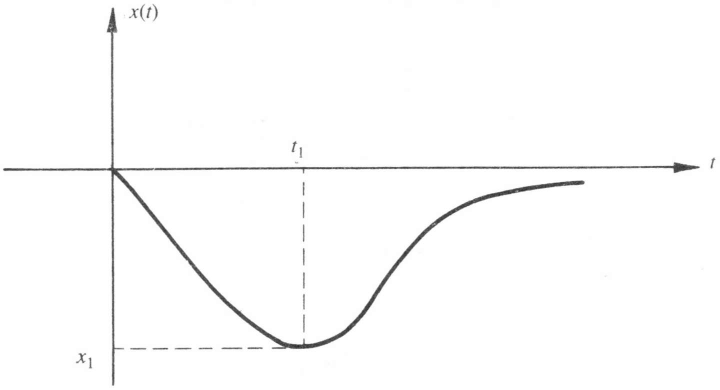


Figura 20. Comportamiento gráfico de la respuesta del sistema masa-resorte del ejemplo 1.

Observe que en este caso el cuerpo *no oscila*. Estando en la posición de equilibrio le dimos un impulso inicial hacia abajo, llegando el cuerpo, después de t_1 seg, a la posición x_1 y a partir de ahí comienza a subir buscando de nuevo su posición de equilibrio. ¿Cómo se hubiera visto el movimiento del cuerpo si el impulso inicial lo hacemos hacia arriba?

Ejemplo 2

Resolver el ejemplo 1, si la constante de amortiguamiento es de 100 newton-seg/m.

Solución

En este caso la ecuación diferencial correspondiente es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 80x = 0$$

Con las mismas condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -10$.

La ecuación característica es $m^2 + 10m + 80 = 0$ cuyas raíces son

$$m_{1,2} = -5 \pm \sqrt{55}\, i$$

Entonces la solución general es

$$x = e^{-5t}\,(C_1 \cos\sqrt{55}\, t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{55}\, t)$$

Imponiendo las condiciones iniciales nos queda finalmente que la solución al problema es

$$x = -\frac{10}{\sqrt{55}}\, e^{-5t} \operatorname{sen} \sqrt{55}\, t$$

Cuyo comportamiento gráfico es:

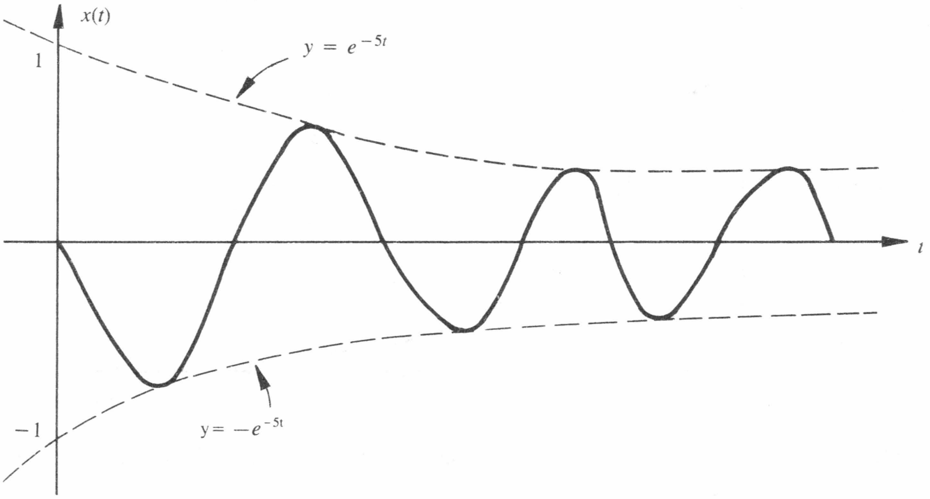


Figura 21. Comportamiento gráfico de la respuesta del sistema masa-resorte del ejemplo 2.

Observe que en este caso sí existe oscilación del cuerpo.

Observe también que $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$, —a medida que transcurre el tiempo la amplitud de la oscilación tiende a cero— el cuerpo tiende oscilando a su posición de equilibrio. Compare los valores numéricos de D y k en este ejemplo y el anterior. ¿Le sugieren algo?

Ejemplo 3

Considere el mismo sistema masa-resorte del ejemplo 1 con los siguientes valores de los parámetros:
$m = 1$ kg, $D = 20$ newton-seg/m, $k = 100$ newton/m. Suponga que a $t = 0$ el cuerpo se encontraba 10 cm por encima de su posición de equilibrio y en ese instante se suelta. Describir el movimiento para $t > 0$.

Solución

En este caso la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 100x = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0.1$, $x'(0) = 0$.

La solución general es $x = C_1e^{-10t} + C_2te^{-10t}$, que después de imponer las condiciones iniciales se ve como

$$x = e^{-10t}(t + 0.1)$$

cuyo comportamiento gráfico es:

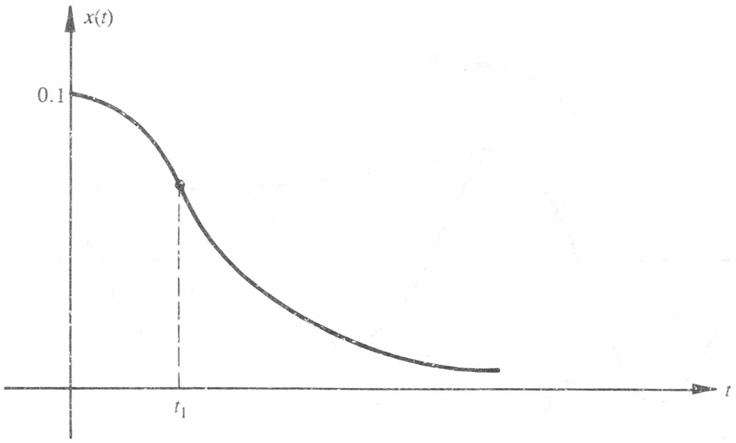


Figura 22. Comportamiento gráfico de la respuesta del sistema masa-resorte del ejemplo 3.

(con un punto de inflexión en t_1). Observe que en este caso, al igual que en el ejemplo 1, no existe movimiento oscilatorio del cuerpo. Al soltarse el cuerpo de los 10 cm por encima de su posición de equilibrio, éste simplemente comienza a bajar buscando de nuevo su posición de equilibrio.

Ejemplo 4

Resolver el ejemplo anterior si $D = 0$.

Solución

La ecuación es $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 100\,x = 0$

cuya solución general es $x = C_1 \cos 10\,t + C_2 \operatorname{sen} 10\,t$, que después de imponer las condiciones iniciales $x(0) = 0.1$ y $x'(0) = 0$ nos queda como $x = 0.1 \cos 10\,t$, cuyo aspecto gráfico es:

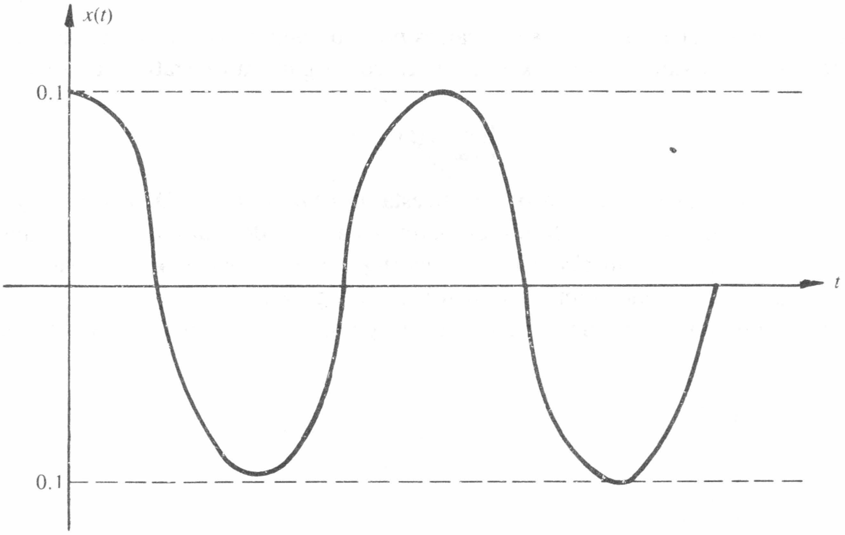


Figura 23. Comportamiento gráfico de la respuesta del sistema masa-resorte del ejemplo 4.

Observe que en este ejemplo el cuerpo oscila *siempre*. Note que en este caso la constante de amortiguamiento es cero.

Cada uno de los cuatro ejemplos anteriores muestra una manera distinta del comportamiento del movimiento del cuerpo para $t > 0$. Si el lector sospecha que el tipo de movimiento que presentará el cuerpo depende de los valores de los parámetros (k, D, m) del sistema, está en lo cierto. Lo que queremos hacer ahora es el análisis general de la respuesta a un fenómeno de vibraciones libres.

Consideremos nuestra ecuación "unificadora"

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dt} + \omega_o^2 y = 0 \tag{4}$$

Vemos que la ecuación característica es

$$m^2 + 2\alpha m + \omega_o^2 = 0$$

cuyas raíces son

$$m_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$$

Aquí tenemos que distinguir varios casos:

Caso 1

Si $\alpha > \omega_o$, las raíces de la ecuación característica son reales y distintas. En tal caso la solución de (4) es

$$y = C_1\, e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2})\,t} + C_2\, e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2})\,t}$$

Es importante hacer notar que las dos raíces $m_{1,2}$ son *negativas*, por lo que la respuesta en este caso es la suma de dos exponenciales con argumento negativo, de modo que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

Además, es claro que en este caso la respuesta *no es oscilatoria*. De hecho, $y(t) = 0$ a lo más para un solo valor de $t > 0$ (ver ejercicios al final de esta sección). Decimos que en este caso se trata de un *sistema sobreamortiguado* (que puede ser un sistema masa-resorte sobreamortiguado o un circuito sobreamortiguado).

Un comportamiento gráfico típico para la respuesta de un sistema sobreamortiguado es

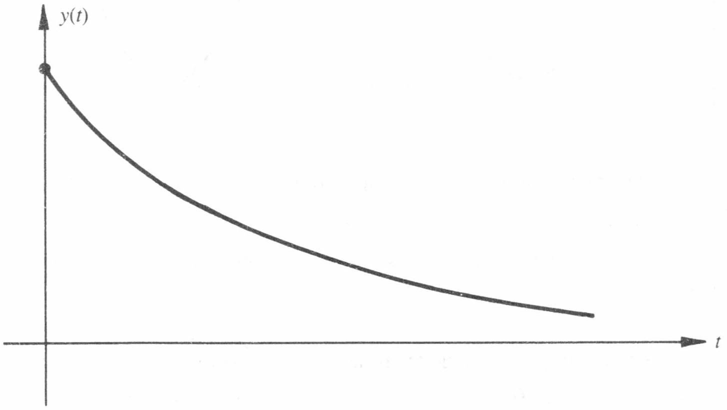


Figura 24. Aspecto gráfico típico de la respuesta de un sistema sobreamortiguado.

aunque de hecho existen variantes a él (ver el ejemplo 1 anteriormente resuelto).

Caso 2

Si $\alpha = \omega_o$, las raíces de la ecuación característica son reales e iguales. En este caso la solución de (4) es

$$y = C_1\, e^{-\alpha t} + C_2\, t\, e^{-\alpha t}$$

UNIVERSIDAD DE PIURA
BIBLIOTECA

Nuevamente la raíz doble de la ecuación característica es negativa (pues $\alpha > 0$), por lo que, igual que en el caso anterior, la respuesta del sistema tiende a cero cuando t tiende a infinito. También en este caso tenemos que la respuesta *no oscila*, y, de hecho, puede ser cero a lo más para un valor de $t > 0$ (esto depende de las condiciones iniciales del sistema. Ver ejercicios al final de la sección). Decimos en este caso que se trata de un *sistema críticamente amortiguado*. Un comportamiento gráfico típico para la respuesta de un sistema de este tipo es

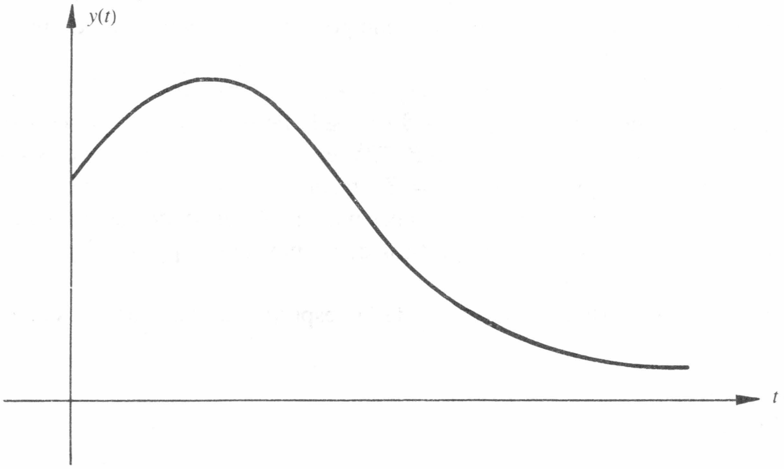


Figura 25. Aspecto gráfico típico de la respuesta de un sistema críticamente amortiguado.

pudiendo existir variantes a él (ver ejemplo 3 anterior).

Caso 3

Si $0 < \alpha < \omega_o$, las raíces de la ecuación característica son complejas. En este caso la solución de (4) es

$$y = e^{-\alpha t} \left(C_1 \cos \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}\, t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}\, t\right)$$

o bien

$$y = K\, e^{-\alpha t} \cos \left(\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}\, t - \phi\right)$$

donde ϕ es tal que $\tan \phi = \dfrac{C_1}{C_2}$ y $K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

Observe que como la función cos $(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t - \phi)$ está acotada y $e^{-\alpha t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, tenemos entonces que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

Sin embargo, la respuesta en este caso *es oscilatoria*, vale cero para todos aquellos valores de t para los que

$$\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\, t - \phi\right) = 0$$

Hagamos un pequeño recordatorio del comportamiento geométrico de una función del tipo $y = e^{-\alpha x} \cos \beta x$.

Considere las funciones $Z_1 = e^{-\alpha x}$, $Z_2 = -e^{-\alpha x}$. Observe que $y = Z_1$ o $y = Z_2$ para aquellos valores de x para los que $\cos \beta x = \pm 1$. Pero en tal caso, para estos valores de x tenemos sen $\beta x = 0$. Como $y' = -\beta e^{-\alpha x}$ sen $\beta x - \alpha e^{-\alpha x} \cos \beta x$ vemos que para los valores de x para los que $y = Z_1$ o $y = Z_2$, tenemos $y' = \pm e^{-\alpha x}$, que coincide con la derivada de Z_1 o Z_2 respectivamente, en tales puntos. Resumiendo, la gráfica de la función $y = e^{-\alpha x} \cos \beta x$ es tangente a las gráficas de las funciones $Z_1 = e^{-\alpha x}$ y $Z_2 = -e^{-\alpha x}$ en los puntos en que coinciden.

Entonces, el comportamiento gráfico de la respuesta en este caso es como sigue

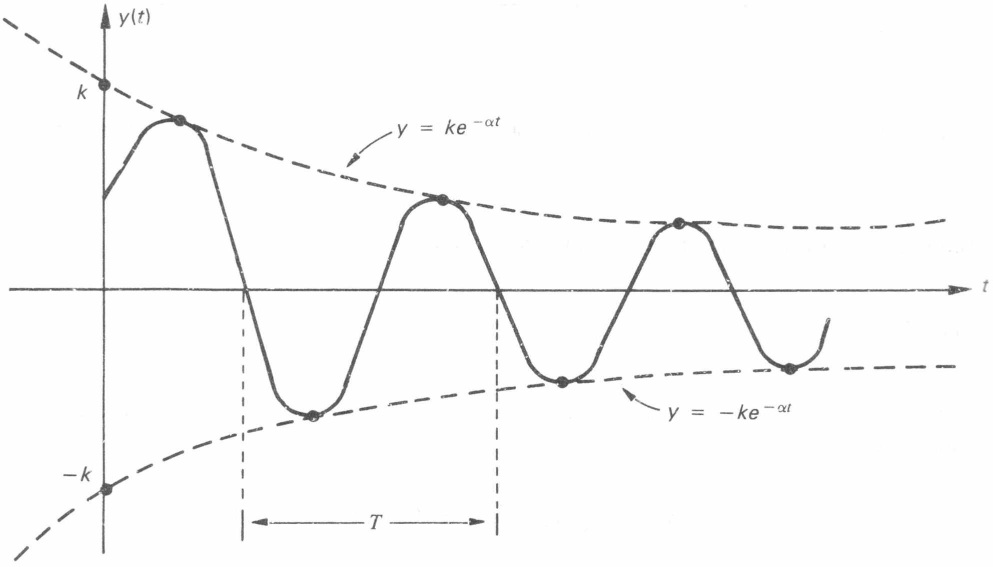


Figura 26. Aspecto gráfico de la respuesta de un sistema subamortiguado.

Decimos que en este caso se trata de un sistema *subamortiguado*, como el del ejemplo 2 anteriormente resuelto.

Definimos la *velocidad angular de oscilación amortiguada*, denotada por ω, como

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

de modo que la respuesta de un sistema subamortiguado se ve en términos de este parámetro como

$$y = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega t - \phi)$$

Observe que, desde el punto de vista dimensional, ω es un parámetro que tiene por unidades rad/seg, ¡que son precisamente las unidades de una velocidad angular!

Por otro lado, la función $\cos(\omega t - \varphi)$ es periódica con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, el cual representa entonces el periodo de la respuesta en su oscilación amortiguada.

Note también que la velocidad a la que decae la respuesta depende del valor de α, la cual llamamos constante de amortiguamiento. Es decir, la velocidad a la que se amortigua la respuesta de un sistema subamortiguado depende *directamente* del valor de la constante de amortiguamiento del sistema; a mayor valor de α, la velocidad de amortiguamiento de la respuesta es mayor.

Todavía distinguimos un caso más:

Caso 4

Si $0 = \alpha < \omega_o$, las raíces de la ecuación característica son $m_{1,2} = \pm\omega_o i$, por lo que la solución de (4) es

$$y = C_1 \cos\omega_o t + C_2 \operatorname{sen} \omega_o t$$

o

$$y = K\cos(\omega_o t - \varphi)$$

donde $\tan\varphi = \dfrac{C_1}{C_2}$ y $K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

Es claro que en este caso la respuesta *oscila siempre*. Observe que éste es precisamente el caso en el que la constante de amortiguamiento es nula. Decimos que se trata de un *sistema no amortiguado*. En este caso queda justificado también el nombre que dimos a la constante ω_o, la cual llamamos "velocidad angular de oscilación no amortiguada", pues físicamente representa precisamente eso: la velocidad angular de la respuesta de un sistema no amortiguado. Es claro que el periodo del movimiento es $T = \dfrac{2\pi}{\omega_o}$.

El aspecto gráfico de la respuesta en este caso es como ya habíamos visto anteriormente.

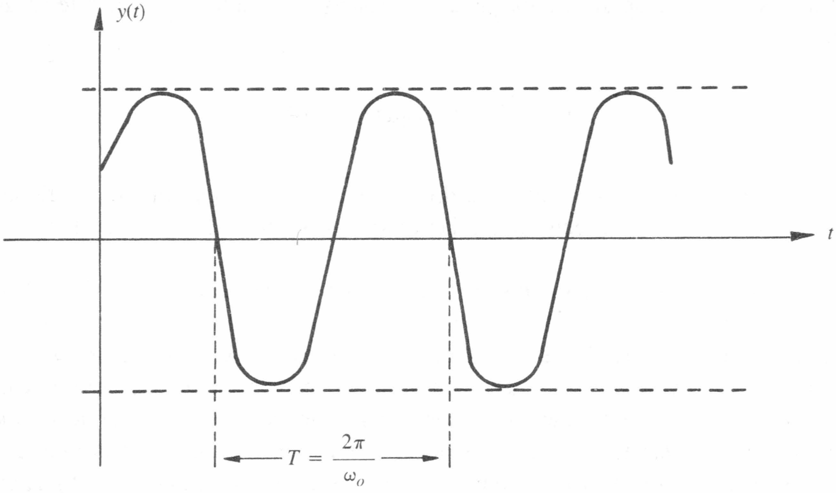


Figura 27. Aspecto gráfico típico de la respuesta de un sistema no amortiguado.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5

> En un circuito RLC serie tenemos que $R = 20$ ohms, $L = 0.01$ henrys y $C = 0.001$ farads. La corriente inicial en el inductor es de 1 ampere. El capacitor no tenía carga alguna a $t = 0$. Encuentre la diferencia de potencial en la resistencia para $t > 0$.
>
> ***Solución***

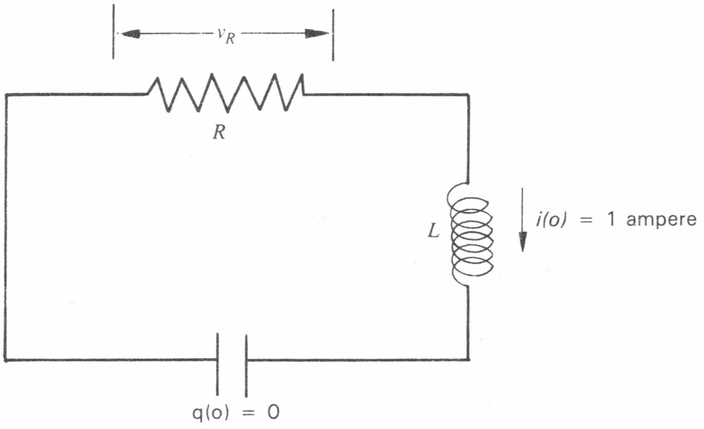


Figura 28. Ejemplo 5.

La ecuación (3) nos modela un circuito RLC serie conectado a una fuente de tensión $v(t)$. En este ejemplo estamos considerando un fenómeno de vibraciones libres por lo que la ecuación que tenemos que considerar es

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C = 0$$

donde v_C es la diferencia de potencial en los extremos del capacitor. Sustituyendo los valores de los parámetros la ecuación nos queda como

$$\frac{d^2v_{1C}}{dt^2} + 2\ x\ 10^3\frac{dv_C}{dt} + 10^5 v_C = 0$$

por lo que $\alpha = 10^3$, $\omega_o = 10^{5/3}$ (en vista de la ecuación (4)). Como $\alpha > \omega_o$, se trata de un circuito sobreamortiguado cuya respuesta es

$$v_C = C_1e^{(-10^3 + 10^2\sqrt{90})t} + C_2\,e^{(-10^3 - 10^2\sqrt{90})t}$$

Además, $\frac{1}{C}q(0) = 0 = v_C(0)$ y $\frac{1}{C}i_L(0) = 10^3 = v_C'(0)$, por lo que

$$C_1 = \frac{10}{2\sqrt{90}},\ C_2 = -\frac{10}{2\sqrt{90}} \text{ y entonces}$$

$$v_C = \frac{10}{2\sqrt{90}}e^{(-10^3 + 10^2\sqrt{90})t} - \frac{10}{2\sqrt{90}}e^{(-10^3 - 10^2\sqrt{90})t}$$

Ahora, se pide hallar $v_R(t)$. Es fácil ver que $v_R(t) = RCv_C'(t)$, de modo que

$$v_R(t) = (10 - \frac{10}{9}\sqrt{90})\,e^{(-10^3 + 10^2\sqrt{90})t} + (10 + \frac{10}{9}\sqrt{90})\,e^{(-10^3 - 10^2\sqrt{90})t}$$

que aproximadamente se ve como

$$v_R(t) = -0.541\,e^{-51.317t} + 20.541\,e^{-1948.684t}$$

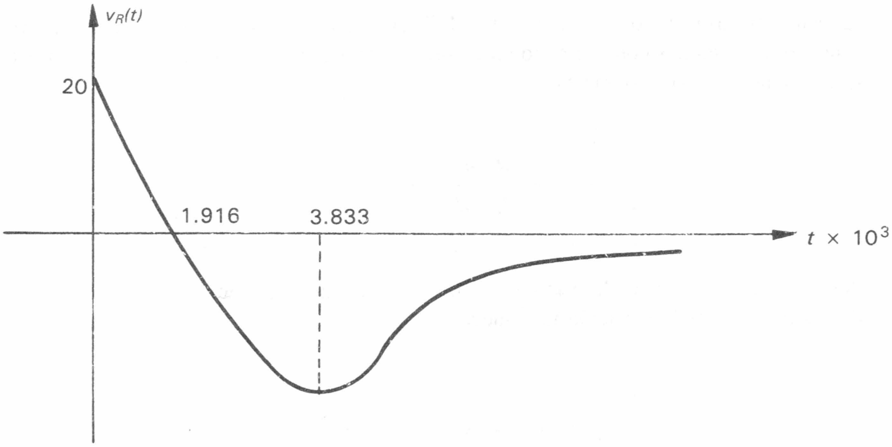


Figura 29. Aspecto gráfico de la respuesta del circuito RLC serie del ejemplo 5.

Ejemplo 6

En un circuito RLC paralelo tenemos que $R = 12$ ohms, $C = 0.0025$ farads y $L = 0.25$ henrys. La corriente inicial en el inductor era nula y el capacitor almacenaba, a $t = 0$, una carga de 5 coulombs. Describir el comportamiento de la corriente en el inductor para $t > 0$.

Solución

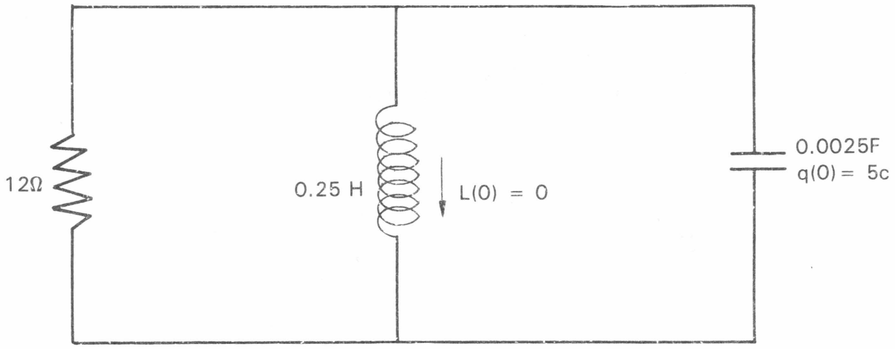


Figura 30. Ejemplo 6.

Según la ecuación (2), tomando en cuenta que se trata de un fenómeno de vibraciones libres, nos queda

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{0.03}\frac{di}{dt} + 1600\,i = 0$$

con las condiciones iniciales $i(0) = 0$ *e* $i'(0) = \dfrac{1}{LC}\,q(0) = 8000$.

En este caso $\alpha = \frac{1}{6} \times 10^2$, $\omega_o = 40$, por lo que $\alpha < \omega_o$ y tenemos entonces un circuito subamortiguado cuya velocidad angular de oscilación amortiguada es $\alpha = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = \frac{10}{6}\sqrt{\frac{238}{3}}$, por lo que su solución es

$$i = K\, e^{-\frac{10^2}{6} t} \cos \left(\frac{10}{6}\sqrt{\frac{238}{3}}\, t - \phi\right)$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos que

$K = 4800 \sqrt{\frac{6}{238}}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, quedándonos finalmente que la corriente en la inductancia viene dada por

$$i = 4800 \sqrt{\frac{6}{238}}\, e^{-\frac{10^2}{6} t} \operatorname{sen} \left(\frac{10}{6}\sqrt{\frac{238}{3}}\, t\right)$$

8.3 Vibraciones forzadas

Estamos interesados ahora en considerar un sistema lineal de segundo orden en el que la función de excitación es no nula. Vemos que la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dt} + \omega_o^2\, y = f(t)$$

donde $y = y(t)$, la respuesta del sistema y f(t), la función de excitación, debía ser satisfecha por un sistema de este tipo, la cual describía un fenómeno que lo llamamos de vibraciones forzadas.

Estamos particularmente interesados en estudiar el comportamiento de la respuesta $y(t)$ cuando la función de excitación es una función del tipo $f(t) = F_o \cos \gamma\, t$, donde F_o y γ son constantes.

La razón de esta particularización es que muchos sistemas físicos (mecánicos y eléctricos) presentan en la práctica funciones de excitación de esta naturaleza.

Consideremos pues la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dt} + \omega_o^2\, y = F_o \cos \gamma\, t \qquad (5)$$

Como ya sabemos, la solución general de una ecuación de este tipo (lineal 2° orden no homogénea) está formada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación no homogénea, es decir

$$y = y_h + y_p$$

donde y_h es una solución de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_o^2 y = 0$$

Observe entonces que y_h es la respuesta a un fenómeno de vibraciones libres, lo que podemos interpretar de la siguiente manera: uno de los sumandos de la respuesta a un fenómeno de vibraciones forzadas es la respuesta del mismo fenómeno considerándolo sin excitación. Además, vemos en la subsección anterior que, a menos que $\alpha = 0$, la respuesta a un fenómeno de vibraciones libres *tiende a cero* a medida que t crece.

Entonces, el sumando y_h que aparece en la respuesta del fenómeno de vibraciones forzadas que estamos considerando es un término que tiende a desaparecer con el tiempo. Es por eso que le llamaremos *respuesta transitoria*. Observe también que y_p, en principio, no tiende a cero cuando t crece: la llamaremos entonces *respuesta permanente*. Resumiendo: para un fenómeno de vibraciones forzadas tenemos

Respuesta ''Total'' = Respuesta transitoria + Respuesta permanente

que no es más que la versión física de aquel teorema que apareció en el principio de la sección 3 de este capítulo.

Entonces, la parte de ''respuesta transitoria'' de la respuesta total que nos interesa fue ya estudiada en la subsección anterior. Nos concretaremos a analizar, por lo tanto, la respuesta permanente. Sabemos que ésta, por ser una solución particular de la ecuación dada, en vista del método de coeficientes indeterminados, debe tener la forma

$$y_p = A \cos \gamma\, t + B \operatorname{sen} \gamma\, t$$

donde A y B son constantes por determinar.
Tenemos

$$y_p' = -A\gamma \operatorname{sen} \gamma\, t + B\gamma \cos \gamma\, t$$

$$y_p'' = -A\gamma^2 \cos \gamma\, t - B\,\gamma^2 \operatorname{sen} \gamma\, t$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$-A\gamma^2 \cos \gamma t - B\gamma^2 \operatorname{sen}\gamma t - 2\,\alpha A\gamma \operatorname{sen}\gamma t + 2\alpha B\gamma \cos\gamma t +$$

$$\omega_o^2 A \cos\gamma t + \omega_o^2 B \operatorname{sen}\gamma t = F_o \cos\gamma t$$

o bien

$$[A(\omega_o^2 - \gamma^2) + 2\alpha\gamma B] \cos\omega t + [B(\omega_o^2 - \gamma^2) - 2\alpha A\gamma] \operatorname{sen}\omega t = F_o \cos\omega t$$

de modo que A y B deben cumplir:

$$A(\omega_o^2 - \gamma^2) + 2\alpha B\gamma = F_o$$

$$B(\omega_o^2 - \alpha^2) - 2\alpha A\gamma = 0$$

de donde

$$A = \frac{(\omega_o^2 - \gamma^2)\, F_o}{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}$$

$$B = \frac{2\alpha\gamma F_o}{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}$$

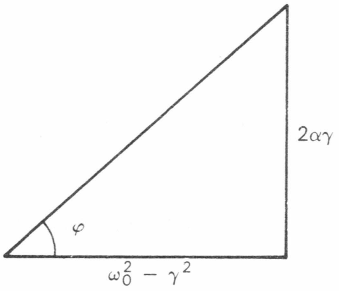
Entonces

$$y_p = \frac{(\omega_o^2 - \gamma^2)\, F_o}{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2} \cos \gamma t + \frac{2\alpha\gamma\, F_o}{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2} \operatorname{sen}\gamma t$$

o bien

$$y_p = \frac{F_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \cos(\gamma t - \varphi)$$

donde φ es el ángulo



Es claro entonces que y_p será una respuesta que oscilará siempre (respuesta permanente). La amplitud de estas oscilaciones es

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\,\alpha^2\gamma^2}}$$

Observe que si α es pequeño y si ω_o es próximo a γ, la amplitud de la respuesta permanente es muy grande. Físicamente esto significa que si el factor de amortiguamiento del sistema es pequeño y si la frecuencia del sistema, cuando éste se encuentra sin excitación alguna, llamada frecuencia natural del sistema (la cual es $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_o}{2\pi}$), es cercana a la frecuencia de la excitación (que es $f = \frac{\gamma}{2\pi}$), acontece entonces que la respuesta del sistema se hace grande. Note que si $\omega_o = \gamma$ y $\alpha = 0$, la expresión para y_p obtenida anteriormente ya no tiene sentido.

Veamos más de cerca qué acontece cuando $\alpha = 0$ y $\omega_o = \gamma$

En tal caso la ecuación a considerar es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_o^2\, y = F_o \cos\omega_o t$$

La respuesta del correspondiente fenómeno de vibraciones libres es, en este caso

$$y = C_1 \cos \omega_o t + C_2 \operatorname{sen} \omega_o t$$

(observe que en este caso no es una respuesta transitoria). Ésta es la expresión para la solución general de la ecuación homogénea asociada, de modo que, como solución particular de la ecuación no homogénea (expresión para la respuesta permanente), no podemos usar ya la anteriormente propuesta ($y_p = A \cos\omega_o t + B \operatorname{sen}\omega_o t$) pues ella es precisamente y_h. Sabemos perfectamente qué hacer en estos casos. Proponemos

$$y_p = t\,(A \cos\omega_o t + B \operatorname{sen} \omega_o t)$$

y hallamos A y B. Tenemos

$$y'_p = t(-A\omega_o^2 \operatorname{sen} \omega_o t + B\omega_o \cos\omega_o t) + A\cos\omega_o t + B \operatorname{sen}\omega_o t$$

$$y_p'' = t(-A\omega_o^2 \cos\omega_o t - B\omega_o^2 \operatorname{sen}\omega_o t) - 2A\omega_o \operatorname{sen}\omega_o t + 2B\omega_o \cos\omega_o t$$

de modo que, sustituyendo y agrupando términos nos queda

$$-A\omega_o \operatorname{sen}\omega_o t + 2B\omega_o \cos\omega_o t = F_o \cos\omega_o t$$

de donde $A = 0$ y $B = \frac{F_o}{2\omega_o}$, por lo que la respuesta permanente en este caso es

$$y_p = \frac{F_o}{2\omega_o} t \operatorname{sen}\omega_o t$$

Es fácil ver que la gráfica de y_p es una curva senoidal "atrapada" entre las rectas $y = \pm \frac{F_o}{2\omega_o}t$, tangente a ellas en los puntos comunes* por lo que su aspecto gráfico es:

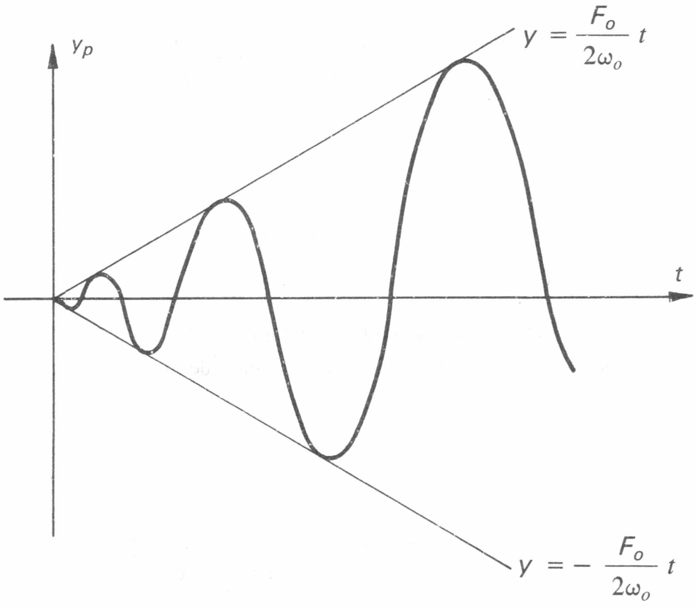


Figura 31. Aspecto gráfico de la solución particular y_p.

Observe que el $\lim\limits_{t\to\infty} y_p = \infty$. Aún más, la respuesta va haciéndose (de manera oscilatoria) paulatinamente mayor a medida que transcurre el tiempo. A este fenómeno se le conoce como *fenómeno de resonancia*, el cual, en sistemas mecánicos, tiene repercusiones desastrosas (basta recordar la tragedia del puente de Tacoma-Washington en 1940), pero en sistemas eléctricos el fenómeno de resonancia es un fenómeno voluntariamente provocado (¿por qué?).

Ejemplo 7

> En un circuito RLC serie, tenemos que $R = 2$ ohms, $L = 0.1$ henrys y $C = 10^{-3}$ farads. Estos elementos están conectados a una fuente de tensión que, para $t > 0$, proporciona una diferencia de potencial de sen t volts. Suponga condiciones iniciales nulas. Describa el com-

---

* En efecto: los puntos en donde coincide y_p con las rectas $y = \pm \frac{F_o}{2\omega_o} t$ son puntos en los que $\operatorname{sen}\omega_o t = \pm 1$; en tales puntos $\cos\omega_o t = 0$, y entonces, como $y' = \frac{F_o}{2} t \cos\omega_o t + \frac{F_o}{2\omega_o} \operatorname{sen}\omega_o t$, tenemos que para los valores de t en donde coincide y_p con las rectas, se tiene $y' = \pm \frac{F_o}{2\omega_o}$ (que son las pendientes de esas rectas).

portamiento de la carga en el capacitor para $t > 0$, e identifique la respuesta transitoria y permanente.

Solución

Observe que la ecuación (3) puede escribirse como (haciendo $v = \frac{1}{C} q$)

$$\frac{1}{C} \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{LC} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC^2} q = \frac{1}{LC} v(t)$$

o sea

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} v(t)$$

donde $q = q(t)$ es la carga en el capacitor al tiempo t.
En nuestro caso $R = 2$, $L = 0.1$, $C = 10^{-3}$, $v(t) = \operatorname{sen} t$, de modo que la ecuación se ve como

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20 \frac{dq}{dt} + 10^4 q = 10 \operatorname{sen} t$$

Hallemos q_h, la solución de la ecuación homógenea asociada. Según la ecuación (4) tenemos $\alpha = 10$, $\omega_o = 10^2$, de modo que $\alpha < \omega_o$, y tenemos entonces un circuito subamortiguado donde la velocidad angular de oscilación amortiguada es

$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = 10 \sqrt{99}$, de modo que la solución es:

$$q_h = k\, e^{-10t} \cos (10 \sqrt{99}\, t - \varphi)$$

Para hallar q_p, una solución particular de la ecuación no homogénea, proponemos

$$q_p = A \cos t + B \operatorname{sen} t$$

Derivando, sustituyendo y agrupando términos nos queda

$$(9999a + 20B) \cos t + (9999B - 20A) \operatorname{sen} t = 10 \operatorname{sen} t$$

de modo que $A = -2$, $B = 1000$ (valores aproximados), y entonces la respuesta permanente es

$$q_p = -2 \cos t + 1000 \operatorname{sen} t$$

La respuesta total se ve como

$$q = k\, e^{-10t} \cos (10 \sqrt{99}\, t - \varphi) - 2 \cos t + 1000 \operatorname{sen} t$$

Imponiendo las codiciones iniciales $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$, hallamos que $k = 10.05$, $\varphi = -\ 1.37$, de modo que la carga en el capacitor para $t > 0$ viene dada por

$$q = 10.05e^{-10t} \cos (10 \sqrt{99}\, t + 1.37) - 2 \cos t + 1000 \operatorname{sen} t$$

Observe que la respuesta transitoria es

$$q = 10.05\, e^{-10t} \cos (10 \sqrt{99}\, t + 1.37)$$

Ejemplo 8

Considere un sistema masa resorte, no-amortiguado, en el que $m = 2$ kg, $k = 10$ newton/m, con condiciones iniciales nulas, en el que está actuando una fuerza externa de $0.08 \cos \frac{11}{5} t$ newtons. Hallar el movimiento de la masa m para $t > 0$.

Solución

Según la ecuación (1), que es el caso no amortiguado, se ve como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} F(t)$$

Tenemos que la ecuación que rige al movimiento del cuerpo de nuestro ejemplo es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\, x = 0.04 \cos \frac{11}{5} t$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
La solución para la ecuación homogénea asociada es

$$x_h = C_1 \cos \sqrt{5t} + C_2 \sqrt{5t}$$

Proponemos $x_p = A \cos \frac{11}{5} t + B \operatorname{sen} \frac{11}{5} t$, y hallamos que $A = 0.25$, $B = 0$, de modo que la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x = C_1 \cos \sqrt{5t} + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{5t} + 0.25 \cos \frac{11}{5} t$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos los valores $C_1 = -0.25$, $C_2 = 0$, de modo que la respuesta total es:

$$x = -0.25 \cos \sqrt{5t} + 0.25 \cos \frac{11}{5} t$$

Hagamos algunas observaciones de esta solución. Si tomamos

$$\varphi_1 = (\sqrt{5} + \frac{11}{5})\frac{t}{2}$$

$$\varphi_2 = (\sqrt{5} - \frac{11}{5})\frac{t}{2}$$

tenemos

$$\cos\sqrt{5}t = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2$$

$$\cos\frac{11}{5}t = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2$$

de modo que, restando, nos queda

$$\cos\frac{11}{5}t - \cos\sqrt{5}t = 2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2$$

y entonces la respuesta total se puede escribir como

$$x = 0.5\operatorname{sen}[(\sqrt{5} - \frac{11}{5})\frac{t}{2}]\operatorname{sen}[(\sqrt{5} + \frac{11}{5})\frac{t}{2}]$$

o bien (aproximadamente)

$$x = 0.5\operatorname{sen}(0.018\,t)\operatorname{sen}(2.218\,t)$$

Es interesante darse cuenta del comportamiento geométrico de esta respuesta. Observe que ella está formada por el producto de dos funciones senoidales, una de frecuencia muy pequeña (0.002864789 Hz) comparada con la frecuencia de la otra (0.353 Hz). Esto quiere decir que hasta los

$t = \dfrac{\pi}{0.018} = 1745.33$ seg, la función $y = 0.5\operatorname{sen}(0.018t)$ vuelve a ser cero (arrancó en cero a $t = 0$), pero, durante ese mismo tiempo, la senusoide sen $(2.218t)$ realizó una cantidad de $\dfrac{(2.218)(1745.33)}{2\pi} = 616.111$ oscilaciones completas. Para visualizar esta situación conviene ver a esta respuesta como la función $x = A(t)\operatorname{sen}(2.218t)$, donde $A(t)$ representa la *amplitud* de la oscilación al momento t, siendo ésta $A(t) = 0.5\operatorname{sen}(0.018t)$.

Gráficamente esto tiene un aspecto como el siguiente

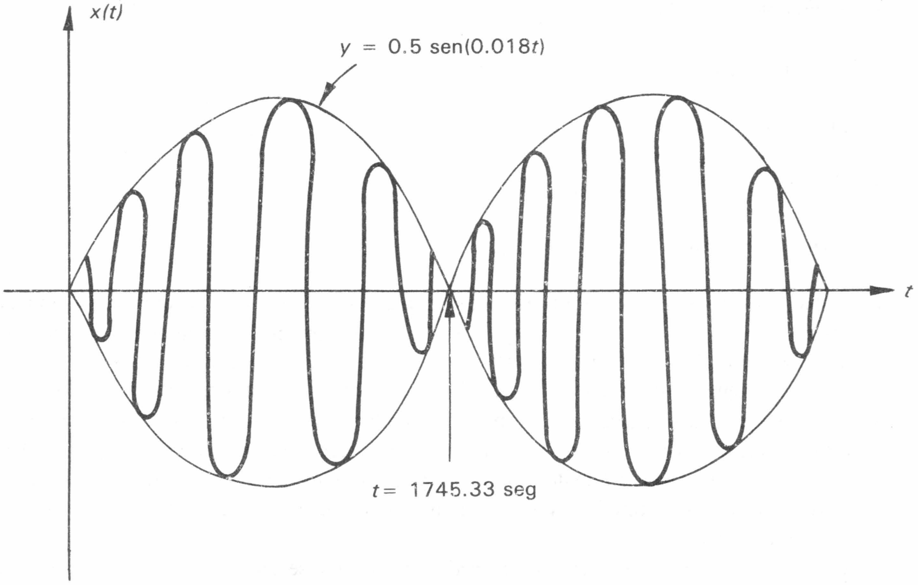


Figura 32. Fenómeno de pulsaciones.

Este ejemplo ilustra al fenómeno conocido como ''pulsaciones'', el cual se representa en sistemas de vibración forzada, con función de excitación senoidal, no amortiguados, con condiciones iniciales nulas, en los que la frecuencia natural del sistema es muy cercana a la frecuencia de la función de excitación.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 4. SECCIÓN 8)

En los siguientes ejercicios (1 — 5), describa la función de desplazamiento de la masa m sujeta a un resorte de constante k, con una constante de amortiguamiento D, para valores de $t > 0$. Se supone que el cuerpo se suelta a $t = 0$ de una posición de 10 cm por debajo de su posición de equilibrio.

1. $m = 1$kg, $k = 0.2$N/m, $D = 0$
2. $m = 2$kg, $k = 2$ N/m, $D = 4$ N-seg/m
3. $m = 150$ gr, $k = 0.6$ N/m, $D = 0.3$ N-seg/m
4. $m = 3$kg, $k = 6$ N/m, $D = 12$ N-seg/m
5. $m = 5$kg, $k = 7$N/m, $D = 3$ N-seg/m

En los ejercicios (6 — 10) resuelva nuevamente los ejercicios (1 — 5) respectivamente, suponiendo que además actúa una fuerza externa de $F(t)$ N.

6. a) $F(t) = 5\ N$

   b) $F(t) = \cos t\ N$

7. a) $F(t) = 2N$

   b) $F(t) = 2 \text{ sen } 2tN$

8. $F(t) = \text{sen } 3t \ N$

9. $F(t) = \text{sen } t \ N$

10. $F(t) = 3 - \cos t \ N$

▲ 11. Considere un sistema sobreamortiguado (vibraciones libres), con las condiciones iniciales $x(0) = x_o$ y $x'(0) = x_0'$. Suponga que $x_0 x_0' \geq 0$. ¿Qué puede decir acerca del número de veces que el cuerpo pasa de nuevo por su posición de equilibrio?

12. Lo mismo que en la pregunta 11 pero con un sistema críticamente amortiguado.

13. Si se cuelga una masa de 2 kg a un resorte dado, éste se estira 5 cm. Una vez con la masa en reposo, a $t = 0$ comienza a aplicarse una fuerza externa de $F(t) = \text{sen } tN$. Después de 15 seg la fuerza $F(t)$ deja de actuar y la masa m comienza a realizar oscilaciones libres. Determine la función de desplazamiento $x(t)$ para $t \geq 15$ (se supone que no hay amortiguamiento).

14. Una masa de 3 kg se amarra a un resorte, produciéndose un movimiento oscilatorio de 5 seg de periodo. A ese mismo resorte después se le amarra una masa de m kg, y el movimiento oscilatorio resultante queda de 4 seg de periodo. ¿Cuánto vale la masa m? (se supone que no hay amortiguamiento).

Los siguientes ejercicios (15-22) se refieren al siguiente circuito RLC paralelo (no excitado).

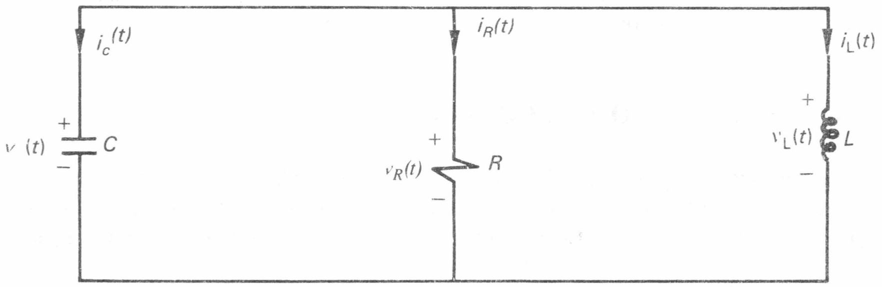


Figura 33. Figura para los ejercicios 15-22.

Halle en cada caso la respuesta libre requerida.

15. $R = 300 \ \Omega$, $L = 0.2H$, $C = 0.001 \ F$, $i_L(0) = 1A$, $i_L'(0) = 0$, $i_L'(t) = ?$

16. $R = 100 \ \Omega$, $L = 0.15H$, $C = 0.007F$, $i_L(0) = 0$, $i_L'(0) = 1A/\text{seg}$, $i_L(t) = ?$

17. $R = 150\Omega$, $L = 0.1H$, $C = 0.009F$, $i_L(0) = 0$, $v_c(0) = 0.4V$, $v_L(t) = ?$

18. $R = 180\Omega$, $L = 0.19H$, $C = 0.01F$, $i_L(0) = 0.8A$, $v_c(0) = 0$, $v_R(t) = ?$

19. $R = 180\Omega$, $L = 0.25H$, $C = 0.0008F$, $i_L(0) = 1A$, $v_C(0) = 0 \ .7V$, $v_c(t) = ?$

20. $R = 175\Omega$, $L = 0.15H$, $C = 0.009\ F$, $i_L(0) = 0$, $v_C\ (0) = 5V$, $i_c\ (t) = ?$

21. $R = 250\Omega$,$L = 0.75H$, $C= 0.057F$, $i_L(0) = 0$, $i_L'(0) = 4A/\text{seg}$, $i_R(t) = ?$

22. $R = 350\Omega$, $L = 0.84H$, $C = 0.0075F$, $i_L(0) = 1A$, $v_c(0) = 5V$, $v_L(t) = ?$

Los siguientes ejercicios (23-28) se refieren al siguiente circuito RLC serie

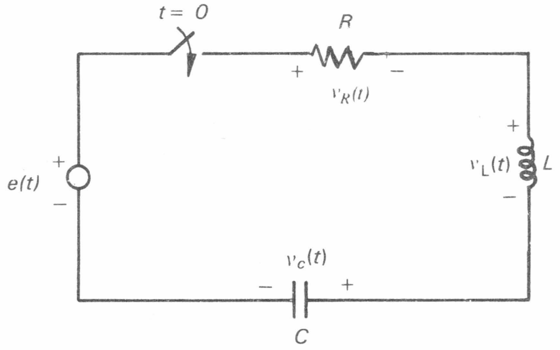


Figura 34. Figura para los ejercicios 23-28.

Hallar en cada caso la respuesta requerida

23. $R = 400\Omega$, $L = 0.3H$, $C = 0.004F$, $i(0) = 0$, $i'(0) = 1\ A/\text{seg}$, $e(t) = \text{sen}\ 2tV$. Hallar $v_C(t)$.

24. $R = 380\Omega$, $L = 0.28H$, $C = 0.0075F$, $i(0) = 1A$, $i'(0) = 0$, $e(t) = te^{-t}V$. Hallar $v_C(t)$.

25. $R = 350\Omega$, $L = 0.57H$, $C = 0.008F$, $i(0) = 2A$, $Q(0) = 0$ (la carga inicial en el capacitor), $e(t) = 20\cos 2tV$. Hallar $v_R(t)$.

26. $R = 190\Omega$, $L = 0.78H$, $C = 0.007F$, $i(0) = 0$, $Q(0) = 7C$, $e(t) = e^{-t}\cos tV$, Hallar $v_L(t)$.

27. $R = 220\Omega$, $L = 0.4H$, $C = 0.0067F$, $i(0) = 3A$, $Q(0) = 5C$, $e(t) = t\cos 4\ t\ V$. Hallar $v_C(t)$

28. $R = 450\Omega$, $L = 0.78H$, $C= 0.00074F$, $i(0) = 1A$, $Q(0) = 1C$ $e(t) = \text{sen}\ t\ V$. Hallar $v_C(t)$.

CAPÍTULO 5

Solución por series de potencias

En el capítulo anterior consideramos ecuaciones como

$$y'' - 2ky' + y = 0 \tag{1}$$

donde k es una constante. Estudiamos la estructura abstracta de sus soluciones y, de hecho, vimos cómo hacer explícita su solución general.
Considere ahora la ecuación

$$y'' - 2xy' + y = 0 \tag{2}$$

Ésta también es una ecuación lineal de segundo orden homogénea, ''casi igual'' a la ecuación (1). De ella sabemos que, dadas las condiciones iniciales $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y_o'$, existe una única solución que resuelve el problema de Cauchy en cuestión. Sin embargo, para la ecuación (2) *no sabemos cómo determinar sus soluciones*. Una ecuación como la (2) se llama ecuación diferencial de Hermite y aparece con frecuencia en ciertos estudios de física cuántica. Esta situación nos vuelve a recordar que la cantidad de ecuaciones diferenciales para las cuales es posible exhibir explícitamente sus soluciones es sumamente limitada.

Obviamente, dada una ecuación diferencial, siempre nos gustaría tener *una fórmula* que definiera su solución. Esto, desde el punto de vista estético, es algo agradable para nuestro estudio. Pero por una parte sabemos ya que esto no siempre es posible de realizar; por otra, y dejando de lado la estética de nuestro estudio, yendo un poco más al aspecto *práctico* de la situación, la solución de una ecuación diferencial, suponiendo que de ésta es posible exhibir explícitamente su solución, puede ser una expresión tan complicada que resulte una perspectiva desconsoladora el estudiar su comportamiento, ya no global, sino solamente local, alrededor de algún punto que nos interese particularmente.

Encaremos ahora esta situación de la siguiente manera: dada una ecuación diferencial de la cual sabemos que su solución existe y es única (bajo condiciones iniciales dadas), sabiendo que no es posible exhibir una fórmula para su solución, investiguemos si al menos es posible exhibir la serie de potencias de la solución alrededor de algún punto.

Este ''al menos'' que en primera instancia parece como una salida perdedora ante un problema fuerte, podría ser de un gran beneficio *práctico* para nuestro estudio, ya que la serie de potencias de la solución de la ecuación nos puede dar información del comportamiento local (o global) de la solución alrededor de puntos que estemos considerando.

El objetivo de este capítulo es estudiar lo relacionado al ''método de obtener soluciones de las ecuaciones diferenciales en forma de serie de potencias''* y luego aplicar este estudio a algunas ecuaciones diferenciales importantes como lo es la ecuación de Bessel.

A manera de ejemplo ilustrativo de lo que acabamos de decir consideramos la ecuación

$$y'' + y = 0$$

Bien sabemos ya que la solución general de esta ecuación es una combinación lineal de las funciones seno y coseno, de las cuales tenemos muchísima información. Pero supongamos por un momento que desconocemos esto y que vamos a investigar su solución en forma de serie de potencias. Diríamos entonces: ya que no sabemos cómo hallar una fórmula para la solución de esta ecuación (¡la cual sabemos que existe!), pensemos que ésta tiene un desarrollo en serie de potencias (alrededor de $x = 0$) de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sustituyendo formalmente esta serie de potencias en la ecuación diferencial nos queda

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

donde

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Haciendo un corrimiento en el índice de la primera suma nos queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

---

*Sólo vamos a considerar ecuaciones lineales de segundo orden.

o sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]\, x^n = 0$$

Para que esta última expresión sea una identidad debemos tener

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \qquad \forall n \geq 0.$$

o sea

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

Para $n = 0$ obtenemos que $a_2 = -\dfrac{a_o}{(1)(2)} = -\dfrac{a_o}{2\,!}$

Para $n = 2$ obtenemos que $a_4 = -\dfrac{a_2}{(4)(3)} = \dfrac{a_o}{4.3.2!} = \dfrac{a_o}{4!}$, etc.

Para $n = 2k$ (k natural) $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k a_o}{(2k)!}$

Similarmente, para $n = 1$ obtenemos que $a_3 = -\dfrac{a_1}{(2)(3)} = -\dfrac{a_1}{3!}$

Para $n = 3$ obtenemos que $a_5 = -\dfrac{a_3}{(5)(4)} = \dfrac{a_1}{5.4.3!} = \dfrac{a_1}{5!}$, etc.

Para $n = 2k + 1$ (k natural) $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}$

Entonces, para que la serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sea realmente solución de $y'' + y = 0$ debemos tener que los a_n deben satisfacer que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_o}{(2k)!} \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Observe que no pedimos nada acerca de los valores de a_o y a_1, i.e. estos dos son parámetros libres. Nuestra solución en serie de potencias debe ser entonces

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}\, x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_o}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= a_o \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right) + a_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

Observe que al menos la estructura de solución general es cumplida por esta expresión: se presenta como una combinación lineal de un par de expresiones que, en principio, deberían definir dos funciones linealmente independientes.
Llamemos

$$\phi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\phi_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

El radio de convergencia de estas dos series es infinito.

Además observe que $\phi_1(-x) = \phi_1(x)$ y $\phi_2(-x) = -\phi_2(x)$, por lo que ϕ_1 es una función par, mientras que ϕ_2 es una función impar. También

$$\phi_1'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k) x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\phi_2(x)$$

$$\phi_2'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \phi_1(x)$$

Observe también que si llamamos $\Psi(x) = (\phi_1(x))^2 + (\phi_2(x))^2$, tenemos

$$\Psi'(x) = 2\phi_1(x)\,\phi_1'(x) + 2\phi_2(x)\,\phi_2'(x) =$$

$$= 2\phi_1(x)\,(-\phi_2(x)) + 2\phi_2(x)\,\phi_1(x) = 0$$

por lo que $\Psi(x)$ debe ser constante. Como $\Psi(0) = 1$, tenemos que

$$(\phi_1(x))^2 + (\phi_2(x))^2 = 1$$

Si el lector, desde que se escribió la solución general de la ecuación en forma de serie de potencias, vio a la función $\phi_1(x)$ como la función $\cos x$ y a $\phi_2(x)$ como $\operatorname{sen} x$, debe entonces notar que con las series de potencias de estas funciones hemos podido obtener una buena cantidad de información de ellas (el seno es impar, el coseno es par, la derivada del seno es el coseno, la del coseno el menos seno, la suma del seno cuadrado y el coseno cuadrado es uno).

En efecto, sabemos que las expresiones de $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ anteriormente definidas son los desarrollos en serie de potencias para las funciones coseno y seno respectivamente.

Para finalizar esta introducción al capítulo, una advertencia: lo que se hizo en las páginas anteriores con la ecuación $y'' + y = 0$ y sus soluciones fue introducir demasiados supuestos acerca de las soluciones de ésta —por ejemplo, acerca de la posibilidad de escribir en forma de serie de potencias su solución— y proceder luego de una manera puramente formal con las series resultantes. El hecho de que ya conocíamos de antemano la respuesta al problema nos dio tranquilidad en cuanto a todo aquello que supusimos y a la validez de nuestros procedimientos formales.

Sin embargo, es claro que debemos ser cuidadosos en todo lo relacionado al proceder en la solución de este ejemplo: la finalidad de este capítulo es aplicar estas ideas a problemas similares en los que estemos obligados a obtener soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de serie de potencias (por ejemplo, para resolver la ecuación (2)). La primera sección de este capítulo está destinada a hacer un repaso de los resultados relevantes de series de potencias.

1. SERIES DE POTENCIAS

El objetivo de esta sección es hacer un repaso de aquellos conceptos y resultados básicos que aparecen en el estudio de las series de potencias, centrándose sobre todo en el material que sobre series de potencias será usado en el resto del capítulo. Se aclara que los teoremas que se enuncien aquí no serán demostrados. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, el libro de B.M. Budak y S.V. Fomin "*Multiple Integrals, Field Theory and Series. An Advanced Course in Higher Mathematics*" Ed. MIR. Capítulo 8.

A una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_o)^n = a_o + a_1 (x-x_o) + \ldots + a_n(x-x_o)^n + \ldots$$

donde los a_n, $n = 0, 1, \ldots$, y x_o son constantes, se le llama *serie de potencias*. Con un simple cambio de variable esta serie puede verse como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + \ldots + a_o x^n + \ldots$$

De aquí en adelante consideraremos sólo series en esta forma.

La cuestión fundamental en el estudio de las series de potencias se centra alrededor de la posibilidad de *representar* una función dada $f(x)$ en forma de una serie de potencias.

Uno de los problemas iniciales que surgen en el estudio de estas series es el problema de la convergencia. Al conjunto de las (x) reales para los que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge se le llama dominio de convergencia de la serie.

Este conjunto no es vacío, pues al menos $x = 0$ se encuentra en él.

Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente* (en x) si la correspondiente serie de valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge (en x).

Se prueba sin ninguna dificultad que si una serie converge absolutamente, entonces ella converge (la afirmación recíproca es en general falsa). Uno de los criterios más útiles para investigar la convergencia absoluta de una serie de potencias es el criterio de D'Alambert o criterio de la razón, que establece que, llamando L al límite

$$L = \operatorname{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \operatorname{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$$

se tiene entonces que (observe que L en principio depende de x) si $L < 1$ la serie converge absolutamente, si $L > 1$ la serie diverge, si $L = 1$ no hay conclusión alguna.

Por ejemplo, para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ tenemos

$$\operatorname{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \operatorname{lím}_{n\to\infty} |(n+1)x| = \infty$$

independientemente del valor de x, si $x \neq 0$, la serie diverge.
Por lo tanto el dominio de convergencia de esta serie se reduce al punto $x = 0$.

Por otro lado, para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ tenemos

$$\operatorname{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \operatorname{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$$

independientemente del valor de x, el límite vale cero (que es menor que 1), por lo que el dominio de convergencia de la serie es toda la recta.

Uno de los primeros resultados importantes que aparecen en el estudio de las series de potencias es que el dominio de convergencia de una serie de potencias es sólo un punto o la recta toda (como en los dos ejemplos anteriores, respectivamente) o bien un *intervalo con centro en el origen*.

El teorema es el siguiente

Teorema: Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o converge sólo para $x = 0$, o existe un número $r > 0$ (pudiendo ser $r = +\infty$) tal que la serie converge absolutamente en el intervalo abierto $(-r, r)$ y diverge fuera del intervalo cerrado $[-r, r]$. En $|x| = r$ la serie puede converger o diverger.

Al número $r > 0$ se le llama *radio de convergencia* de la serie, y al intervalo $(-r, r)$ *intervalo de convergencia*. Observe entonces que el dominio de convergencia de una serie es su intervalo de convergencia, unión, posiblemente, los puntos $x = \pm r$ lo cual produce también un intervalo.

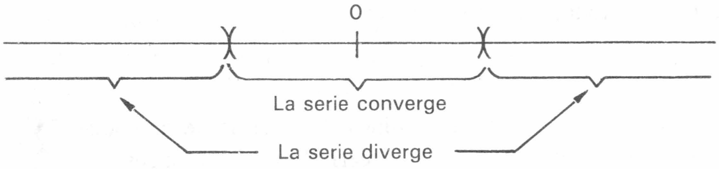


Figura 1. Intervalo de convergencia.

Por ejemplo, para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, llamada serie geométrica, se tiene

$$\text{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \text{lím}_{n\to\infty} |x| = |x|$$

por lo que si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente, i.e. el radio de convergencia de esta serie es 1.

Es claro que si $x = \pm 1$, la serie resultante es divergente, por lo que el dominio de convergencia para esta serie es el intervalo abierto $(-1, 1)$ (que coincide con su intervalo de convergencia).

Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ tenemos

$$\text{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}/n+1}{(-1)^n x^n/n} \right| = \text{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |x| = |x|$$

También en este caso $r = 1$. Sin embargo, si $x = 1$ obtenemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que es convergente, y si $x = -1$ obtenemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente. Entonces el dominio de convergencia de esta serie es el intervalo $[-1, 1)$.

Por último, para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ tenemos:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}/2n+3}{(-1)^n x^{2n+1}/2n+1} \right| = \text{lím}_{n\to\infty} \left| \frac{2n+1}{2n+3} \right| x^2 = x^2$$

por lo que también para esta serie $r = 1$. Observe que para $x \pm 1$ obtenemos series convergentes. Entonces el dominio de convergencia de esta serie es el intervalo $[-1, 1]$.

Los tres ejemplos anteriores muestran series de potencias para las cuales sus radios de convergencia coinciden. Siendo el dominio de convergencia siempre un intervalo, este es distinto en cada uno de los casos.

Se conviene que si el dominio de convergencia es sólo un punto, entonces $r = 0$, y si es la recta toda, entonces $r = \infty$.

Teorema: (Integración término a término). Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en todos los puntos del intervalo cerrado $[\delta,\beta]$ entonces

$$\int_{\delta}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\delta}^{\beta} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \delta^{n+1})$$

Teorema: (Derivación término a termino). Considere la función f definida por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en su intervalo de convergencia, i.e. sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-r, r)$. Entonces $f(x)$ es derivable en cada punto $x \in (-r, r)$ y se tiene $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, donde esta última serie de potencias tiene por radio de convergencia el mismo de la serie que define a f.

De este último teorema se desprende el importantísimo:

Corolario: La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definida por una serie de potencias posee derivadas de todos los órdenes en cualquier punto de su intervalo de convergencia y sus derivadas sucesivas se pueden calcular derivando término a término la serie.

O sea, para cada $x \in (-r, r)$ tenemos:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \ . \ . \ . \ (n-k+1) \ a_n x^{n-k}$$

Observe entonces que, según el corolario anterior, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tenemos que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, o sea que la *serie de potencias que converge a $f(x)$ en $(-r, r)$ es ni más ni menos la serie de Taylor de f alrededor de $x_o = 0$.* Es decir, si la función f: $(-r, r) \to \mathbb{R}$ se puede representar como una serie de potencias en $(-r, r)$, (lo cual significa que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $x \in (-r, r)$), ésta es la serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de cero.

Hay que tener mucho cuidado con la estructura lógica de esta última afirmación. Suponga que la función f: $(-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas de todos los órdenes en su dominio. Formalmente podemos construir la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, para la función $f(x)$ alrededor de $x_o = 0$. Estamos tentados a pensar que esta serie converge a $f(x)$ en $(-r, r)$. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, puesto que *no sabemos si* $f(x)$ *se puede representar en forma de una serie de potencias en* $(-r, r)$. El siguiente contraejemplo muestra la aclaración anterior.

Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Se puede probar que esta función posee derivadas de todos los órdenes en todo su dominio $(\mathbb{R})$. En particular

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 0$$

de modo que si escribimos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, ésta se reduce a 0.
Es decir, la serie de Taylor de f alrededor de cero, siendo una serie convergente en $\mathbb{R}$, *no converge a* $f(x)$ excepto en $x = 0$.

Esto significa entonces que el hecho de que una función pueda representarse en forma de serie de potencias convergente en $(-r, r)$, es más fuerte que el hecho de que la función posea derivadas de todos los órdenes en $(-r, r)$. A una función f: $(-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ que puede ser representada en forma de serie de potencias (convergente en $(-r, r)$) se le llama *función analítica*.

En resumen: si la función f: $(-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ es la serie de Taylor de f alrededor de $x_o = 0$.
Una observación importante es la siguiente: una condición necesaria y suficiente para que la función f: $(-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ sea analítica es que ella posea derivadas de todos los órdenes en su dominio y que si definimos R_n: $(-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k$$

entonces $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para cada x fija en $(-r, r)$.
Queda como ejercicio para el lector justificar esta afirmación. A la función R_n, como sabemos, se le llama *residuo de la formula de Taylor para* $f(x)$ alrededor de $x_o = 0$. Una de las representaciones más comunes para este residuo es la llamada *forma de Lagrange*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad 0 < \theta < 1$$

El siguiente teorema hace uso de la observación anterior y establece condiciones suficientes para que la función f sea analítica.

Teorema: Si la función f: $(-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas de todos los órdenes en $(-r, r)$ y si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M, \; n = 0, 1, 2, \ldots \; \forall x \in (-r, r)$$

entonces f es analítica en $(-r, r)$.

En efecto, basta probar que siendo R_n el residuo de la fórmula de Taylor para f, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

Pero:

$$R_n(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{M\, r^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall\, x \in (-r, r)$$

Por otra parte sabemos que para cualquier $r \in \mathbb{R}^+$ fijo tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

por lo que $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ como se quería ver.

Veamos algunos ejemplos importantes:

La función $f(x) =$ sen x es analítica en $\mathbb{R}$. En efecto, las derivadas de f son cos, —sen, —cos, etc.

Entonces $| f^n(x) | \leq 1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Tenemos entonces que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Calculando las derivadas correspondientes obtenemos la representación de la función seno en serie de potencias como

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Similarmente podemos ver que $f(x) = \cos x$ es analítica en $\mathcal{R}$ y que

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$$

La función f: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = e^x$ es también analítica en $\mathcal{R}$. En efecto $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^{\gamma}$, para $x \epsilon (-\gamma, \gamma)$. Como γ es arbitrario, concluimos que $f(x) = e^x$ es analítica en $\mathcal{R}$ (cuidado: asegúrese que entiende por qué es válida esta conclusión). Además, como $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, la serie que representa a la función exponencial es

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Enunciemos ahora algunos teoremas sobre las operaciones algebraicas que pueden hacerse con las series de potencias.

Teorema: (Multiplicación de series de potencias). Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen en $(-r, r)$, entonces la serie producto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde $c_n = a_o b^n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_o$, es convergente en $(-r, r)$.

Teorema: (Suma de series de potencias). Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen en $(-r, r)$, entonces la serie suma (algebraica)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

es convergente en $(-r, r)$.

Teorema: (Inverso de una serie de potencias).

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para todo $x \in (-r, r)$ y $a_o = f(0) \neq 0$, entonces la función $\frac{1}{f(x)}$ es representada por una serie de potencias con intervalo de convergencia $(-s, s) \subseteq (-r, r)$ para algún $s > 0$.

Una observación elemental que sin embargo es importante y se desprende de los teoremas anteriores es que "el producto, la suma y el cociente* de funciones analíticas es una función analítica". En particular, el cociente de dos polinomios es una función analítica, pues todo polinomio es —trivialmente— una función analítica (¿por qué?).

Por último se hará un comentario sobre el llamado "principio de identidad" para funciones analíticas.

Este principio establece que si f y g son funciones analíticas definidas en algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, y si $f = g$ para algún subintervalo de I (más generalmente, si $f = g$ para algún subconjunto de I que contenga un punto de acumulación) entonces $f \equiv g$. Existen ejemplos que muestran que este hecho no es necesariamente cierto si suponemos que f y g son infinitamente diferenciables (tienen derivadas de todos los órdenes). En términos de series de potencias, este principio establece que si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ con radio de convergencia r, son tales que coinciden en $(-s, s) \subseteq (-r, r)$ para algún $s > 0$, entonces $a_n = b_n \; \forall \; n$ (es decir, las series son idénticas). En particular, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vale cero para toda x en algún intervalo (subconjunto de su dominio de convergencia), entonces $a_n = 0 \; \forall \; n$.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 5. SECCIÓN 1)

1. Demuestre que la función $f(x) = (1+x)^m$ tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias
$$f(x) = 1 + mx \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$
válido para $-1 < x < 1$.
2. Demuestre que la función $g(x) = ln\,(1+x)$ tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias
$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$
válido para $-1 < x \leq 1$.
3. Obtenga el desarrollo en serie de potencias para la función $f(x) = ln\, x$ alrededor del punto $x_o = 1$. ¿Cuál es su dominio de convergencia?
4. Obtenga el desarrollo en serie de potencias para la función $f(x) = \cosh x$ alrededor del punto $x_o = 0$. ¿Cuál es su dominio de convergencia?

---

*Tomando el debido cuidado de que no quedan incluidos en los dominios correspondientes los ceros del denominador.

5. Obtenga los desarrollos en serie de potencias para las funciones:

   a) $f(x) = e^{2x}$
   b) $g(x) = e^{x^2}$
   c) $h(x) = e^{-x}$

   (Sugerencia: use el desarrollo ya obtenido para la serie de la función exponencial).

6. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 3\,e^{-x^2}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Encuentre el desarrollo en serie de potencias de esta función alrededor de $x_o = 0$. (Nota: no hay necesidad de calcular las derivadas de $f(x)$ en $x_o = 0$. Se supone que este ejercicio es fácil.)

7. Use los desarrollos de las funciones seno y coseno alrededor del cero para obtener los desarrollos de

   a) $f(x) = \cos 2\,x$
   b) $g(x) = \operatorname{sen} x^3$
   c) $g(x) = (x + \tan x) \cos x$

8. Use los resultados de los ejercicios 1 y 2 para obtener los desarrollos de

   a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

   b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^3}}$

   c) $h(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

9. Hallar los dominios de convergencia de las series

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha^{n^2}} x^n \quad , \alpha > 1$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad , a>0,\ b>0.$

10. Hallar el dominio de convergencia de la serie hipergeométrica

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta\,(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)\,n!} x^n$$

   donde α, β y γ son constantes.

11. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ satisface la ecuación diferencial $y^{\mathrm{IV}} = y$.

12. Aplicando la derivación término a término de las series de potencias, halle una fórmula para $S(x)$:

    a) $S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

    b) $S(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

13. Aplicando la integración término a término de las series de potencias, halle $S(x)$:

    a) $S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

    b) $S(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

14. Encontrar el desarrollo en serie de potencias para la función

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

15. Sabemos que $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Halle el desarrollo en serie de potencias para la función $f(x) = ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ alrededor de $x_o = 0$ y encuentre su dominio de convergencia.

16. Haciendo las operaciones correspondientes con las series de potencias, encontrar los desarrollos de

    a) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

    b) $g(x) = ln^2 (1 - x)$

    c) $h(x) = (1 - x)^2 \cosh \sqrt{x}$

17. Calcule con exactitud, hasta milésimos, la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

18. Sabemos que

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad -1 < x < 1$$

(Ver ejercicio 12 inciso *a*). Tomando en cuenta que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tan } \frac{1}{5} - \text{arc tan } \frac{1}{239}$$

calcule π con 15 cifras decimales exactas.

2. PUNTOS ORDINARIOS Y PUNTOS SINGULARES

Al proceder a estudiar la solución de una ecuación diferencial en forma de serie de potencias, es necesario aclarar desde un principio la vecindad del punto en el que nos interesa tener expresada la solución en forma de serie. En principio esta serie nos dará información de la solución sólo en ''los alrededores'' del punto en cuestión, pues es claro que para puntos fuera del dominio de convergencia de la serie no se obtiene de ella información alguna. Además, esto es cierto siempre y cuando estemos seguros de que existe una solución analítica para la ecuación diferencial en una vecindad de tal punto. Esto afortunadamente ocurre en muchos casos de interés y se expresa con precisión en el teorema de existencia que será visto en la próxima sección. Aun convencidos de la existencia de una solución analítica, ésta sólo estaría definida en cierto intervalo alrededor del punto en el que hayamos desenvuelto la serie de potencias en la solución (está claro que este ''alrededor'' podría cubrir toda la recta).

Por ejemplo, para la ecuación

$$y'' - xy' + y = 0 \tag{1}$$

se verá que su solución en forma de serie alrededor de $x_o = 0$, es esencialmente distinta de la solución alrededor de $x_o = 0$ para la ecuación

$$x^2 y'' - 2xy' + y = 0 \tag{2}$$

Como se verá, mientras $x_o = 0$ es un punto en el que la solución de (1) presenta un ''buen comportamiento'' en sus alrededores, él mismo es un punto en el que la solución de (2) presenta un ''mal comportamiento'' en sus alrededores.

Para emprender formalmente el estudio de las soluciones en serie de potencias de las ecuaciones diferenciales se hace necesaria una clasificación atendiendo al ''tipo'' de puntos alrededor de los cuales queremos obtener información de la solución.
Se tiene, concretamente, la siguiente:

Definición (1): Sea la ecuación diferencial lineal de 2° orden homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{3}$$

Se dice que el punto x_o es un *punto ordinario* de la ecuación (3) si las funciones P y Q son analíticas en x_o*. En caso contrario diremos que x_o es un *punto singular* de la ecuación.

Por ejemplo, x_o es un punto ordinario para la ecuación (1) puesto que $P(x) = -2x$ y $Q(x) = 1$ son funciones analíticas en $x_o = 0$ (de hecho en $\mathbb{R}$).

Para la ecuación (2) $x_o = 0$ representa un punto singular, pues $P(x) = -2/x$ y $Q(x) = 1/x^2$ no son funciones analíticas en $x_o = 0$ (no existe vecindad alguna alrededor de $x_o = 0$ en la cual $P(x)$ y $Q(x)$ puede ser representada por medio de una serie de potencias convergente).

---

* Esto significa que exista un $r > 0$ tal que $P,Q:(x_o - r, x_o + r) \rightarrow \mathbb{R}$ son analíticos.

Se podría pensar a los puntos ordinarios como ''puntos buenos'' y a los puntos singulares como ''puntos malos''. Por ejemplo, si una ecuación diferencial describe algún fenómeno físico de variación temporal (la variable independiente es el tiempo), los puntos regulares de la ecuación serían valores de t para los que, localmente, ''no ha ocurrido nada extraordinario en el sistema''.

Un punto singular sería un valor de t que representa al instante en el que ''el sistema sufrió alguna alteración''. Muchas veces interesa describir el comportamiento del sistema en los alrededores de estas ''alteraciones'' (i.e. obtener la solución de la ecuación alrededor de un punto singular).

Aun dentro de las singularidades (el conjunto de puntos singulares) de una ecuación diferencial existe una distinción más.

Definición (2): Si al menos una de las funciones $P(x)$ o $Q(x)$ que aparecen en la ecuación (3) no es analítica en x_o, pero las funciones $(x - x_o)\, P(x)$ y $(x - x_o)^2\, Q(x)$ son analíticas en x_o, decimos que x_o es *un punto singular regular* de la ecuación. Si, por el contrario, alguna de las funciones $(x - x_o)\, P(x)$ o $(x - x_o)^2 Q(x)$ no es analítica en x_o, decimos que x_o es un *punto singular irregular* de la ecuación.

Por ejemplo, $x_o = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (2), pues las funciones $xP(x) = -2$ y $x^2Q(x) = 1$ son analíticas en x_o.

En la siguiente sección abordaremos la problemática de obtener soluciones en serie de potencias alrededor de puntos ordinarios. Luego se estudiará cómo obtener soluciones alrededor de puntos singulares regulares. Por último se estudiará la ecuación de Bessel como un ejemplo de una ecuación en la que interesan soluciones alrededor de puntos singulares regulares. El estudio de puntos singulares irregulares es de un carácter más avanzado, fuera de las pretensiones de este libro.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 5. SECCIÓN 2)

En los siguientes ejercicios (1 — 10) describa el conjunto de los puntos ordinarios, puntos singulares regulares y puntos singulares irregulares para cada ecuación.

1. $(x^2 - 4)\, y'' + 7xy' + 3y = 0$

2. $(x^2 + 4)\, y'' + 7xy' + 3y = 0$

3. $x^2\, y'' + y' + xy = 0$

4. $x^4\, y'' + y = 0$

5. $(x^2 - 6x + 5)\, y'' + 2xy' + y = 0$

6. $x(x^2 - 1)\, y'' + 2xy' - y = 0$

7. $y'' + x^5y' + 7y = 0$

8. $x(x-1)^3\, y'' + 3xy = 0$

9. $x(1 + x^2)^3\, y'' + (1 + x)^2y' + 3y = 0$

10. $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

3. SOLUCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS ALREDEDOR DE PUNTOS ORDINARIOS

El siguiente teorema establece la existencia de soluciones en forma de series de potencias para puntos ordinarios. La demostración de él se omite. El lector interesado puede consultar el libro de Earl A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice Hall Inc. Cap. 3, Secc. 9.

Teorema: Sea x_o un punto ordinario para la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Si y_o y y_o' son dos constantes dadas, existe una solución ϕ analítica en x_o definida en el intervalo $|x - x_o| \leq r$ para algún $r > 0$, tal que $\phi(x) = y_o$ y $\phi'(x_o) = y_o'$. Si

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$$

es la expresión en serie de potencias para la solución alrededor de x_o, entonces $a_o = y_o$ y $a_1 = y_o'$, y las constantes a_n, $n \geq 2$, pueden calcularse en términos de a_o y a_1, sustituyendo formalmente la solución en la ecuación diferencial.

Observe que este teorema asegura que, procediendo por sustitución formal de una serie de potencias asociada a la solución, llegaremos a un desarrollo en serie que converge en alguna región alrededor del punto x_o, y aún más, que converge precisamente a la solución que procuramos.

Siempre vamos a considerar, por razones de simplificación en los cálculos, que el punto ordinario alrededor del cual procuramos la solución en serie es el punto $x_o = 0$. El caso general se puede reducir a éste por un cambio de variable previo en la ecuación diferencial (ver ejemplo 2).

Ejemplo 1

Hallar la solución en serie de potencias alrededor de $x_o = 0$ para la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

Solución:

Se propone entonces que nuestra solución tiene la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Tenemos que $y'(x)$ y $y''(x)$ se obtiene derivando término a término quedando como

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

o bien:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Tomando el primer sumando de la primera y la última sumatoria del lado izquierdo y agrupando el resto nos queda

$$2a_2 + a_o + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - (2n-1)a_n]\, x^n = 0$$

Entonces

$$2a_2 + a_o = 0$$

$$(n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} - (2n-1)\, a_n = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

A esta última expresión que nos indica la manera como se relacionan los coeficientes de la expresión en serie de la solución, se le llama *fórmula de recurrencia.* Observe que ella es válida, en principio, sólo para $n \geq 1$. Sin embargo, si tomamos $n = 0$ obtenemos la condición $2a_2 + a_o = 0$, la cual teníamos establecida de antemano.

Entonces:

$$a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} a_n$$

de donde:

$$(\text{si } n = 0) \qquad a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$(\text{si } n = 1) \qquad a_3 = \frac{1}{3!}\, a_1$$

$$(\text{si } n = 2) \qquad a_4 = \frac{3}{(4)(3)}\, a_2 = \frac{3}{(4)(3)} \left(-\frac{a_0}{2}\right) = -\frac{3}{4!}\, a_o$$

$$(\text{si } n = 3) \qquad a_5 = \frac{5}{(5)(4)}\, a_3 = \frac{5}{(5)(4)} \left(\frac{1}{3!}\, a_1\right) = \frac{5}{5!}\, a_1$$

$$(\text{si } n = 4) \qquad a_6 = \frac{7}{(6)(5)}\, a_4 = \frac{7}{(6)(5)} \left(-\frac{3}{4!}\, a_o\right) = -\frac{21}{6!}\, a_o$$

etc.

De modo que la solución de la ecuación es:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{a_1}{3!} x^3 - \frac{3a_0}{4!} x^4 + \frac{5a_1}{5!} x^5 - \frac{21a_0}{6!} x^6 + \ldots$$

$$= a_o\left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{21x^6}{6!} - \dots\right)$$

$$+ a_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} + \dots\right)$$

Solución que converge para $|x|| < r$ para algún $r > 0$.

Ejemplo 2

El punto $x_o = 1$ es un punto ordinario para la ecuación

$$y'' + (x - 1)^2 y' - (x - 1)y = 0$$

Obtenga una solución en serie de potencias de $x - 1$.

Solución:

Hacemos que el cero sea el punto ordinario tomando

$$x - 1 = t$$

La ecuación entonces se transforma en

$$y'' + t^2 y' - ty = 0$$

donde ahora $y = y(t)$.

Proponemos:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Derivando y sustituyendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)\, a_n t^{n-2} + t^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

o bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)\,(n + 1)\, a_{n+2} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)\, a_{n-1} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0$$

Tomando los sumandos necesarios, para dejar todas las sumas comenzando en $n = 2$, y agrupando, queda

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3 t - a_o t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-2)a_{n-1}]t^n = 0$$

de donde

$$2a_2 = 0$$

$$3\cdot 2a_3 - a_o = 0$$

$$(n+2)(n+1)\ a_{n+2} + (n-2)\ a_{n-1} = 0 \qquad n \geq 2$$

o bien $a_2 = 0$ y $a_{n+2} = -\dfrac{n-2}{(n+2)\ (n+1)}\ a_{n-1}\ n \geq 1$

de donde

$$\text{(si } n = 1) \qquad a_3 = \frac{a_o}{(3)(2)}$$

$$\text{(si } n = 2) \qquad a_4 = 0$$

$$\text{(si } n = 3) \qquad a_5 = -\frac{1}{(5)(4)}\ a_2 = 0$$

$$\text{(si } n = 4) \qquad a_6 = -\frac{2}{(6)(5)}\ a_3 = -\frac{a_o}{90} - \frac{2}{(6)(5)(3)(2)}\ a_o$$

$$\text{(si } n = 5) \qquad a_7 = 0$$

$$\text{(si } n = 6) \qquad a_8 = 0$$

$$\text{(si } n = 7) \qquad a_9 = -\frac{5}{(9)(8)}\left(-\frac{1}{90}\ a_o\right) = \frac{1}{1296}\ a_o$$

etc.

Observe que $a_n = 0,\ n \neq 3k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Entonces la solución requerida es, tomando en cuenta que $t=x-1$,

$$y(x)=a_1(x-1)+a_o\left[1+\frac{1}{6}\ (x-1)^3-\frac{1}{90}\ (x-1)^6+\frac{1}{1296}\ (x-1)^9-\ldots\right]$$

Ejemplo 3

A la ecuación diferencial

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

(α es una constante) se le llama "ecuación diferencial de Chebicheb". Hallar una solución en serie de potencias para esta ecuación.

Solución: Tenemos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\ a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

o bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

de donde

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x - a_1x + \alpha^2 a_o + \alpha^2 a_1 x + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2-\alpha^2)\,a_n]\,x^n = 0$$

Entonces:

(términos independientes) $2a_2 + \alpha^2 a_o = 0$

(coeficientes de x) $3\cdot 2a_3 - (1-\alpha^2)a_1 = 0$

(fórmula de recurrencia) $(n+2)\,(n+1)a_{n+2} - (n^2-\alpha^2)\,a_n = 0,\ n \geq 2$

Observe que podemos escribir de una vez por todas:

$$a_{n+2} = \frac{n^2-\alpha^2}{(n+2)\,(n+1)}\,a_n \qquad n \geq 0$$

de modo que

$$a_2 = -\frac{\alpha^2}{2}\,a_o$$

$$a_3 = \frac{1-\alpha^2}{3\cdot 2}\,a_1 = \frac{1-\alpha^2}{3!}\,a_1$$

$$a_4 = \frac{4-\alpha^2}{4\cdot 3}\,a_2 = -\frac{\alpha^2\,(4-\alpha^2)}{4!}\,a_o$$

$$a_5 = \frac{9-\alpha^2}{5\cdot 4}\,a_3 = \frac{(9-\alpha^2)\,(1-\alpha^2)}{5!}\,a_3$$

etc.

En general

$$a_{2k} = \frac{(-\alpha^2)(4-\alpha^2)\,(16-\alpha^2)\ldots((2k-2)^2-\alpha^2)}{(2k)!}\,a_o$$

$$a_{2k+1} = \frac{(1-\alpha^2)\,(9-\alpha^2)\ldots((2k-1)^2-\alpha^2)}{(2k+1)!}\,a_1$$

$k = 1, 2, \ldots$

por lo que la solución procurada se ve como:

$$y(x) = a_o\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha^2)(4-\alpha^2)(16-\alpha^2)\ldots((2k-2)^2-\alpha^2)}{(2k)!}x^{2k}\right]$$

$$+ a_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha^2)(9-\alpha^2)\ldots((2k-1)^2-\alpha^2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right]$$

Pueden hacerse algunas observaciones interesantes acerca de esta solución. Primeramente podemos ver, usando el criterio de D'Alambert, que cada una de las series que aparecen en la expresión de $y(x)$ tiene radio de convergencia 1. En efecto, para la primera de ellas:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}\,x^{2k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{(2k)^2-\alpha^2}{(2k+1)(2k+2)}\right)x^2\right| = x^2$$

y para la segunda:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+3}x^{2k+3}}{a_{2k+1}\,x^{2k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{(2k+1)^2-\alpha^2}{(2k+2)(2k+3)}\right)x^2\right| = x^2$$

por lo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ convergen para $|x| < 1$, y entonces la serie de $y(x)$ converge en $|x| < 1$.

Observe por último que si $\alpha \in N$, alguna de las series sufre un truncamiento cuando $k = \dfrac{\alpha + 2}{2}$ si α es par, o en $k = \dfrac{\alpha + 1}{2}$ si α es impar.

En el primer caso obtenemos un polinomio de grado α que tiene sólo potencias pares de x, y en el segundo un polinomio que tiene sólo potencias impares de x, también de grado α. Lo importante es que si $\alpha \in N$, se obtiene una solución polinomial a la ecuación de Chebicheb.

Por ejemplo, si $\alpha = 4$ la solución polinomial es

$$P(x) = 1 - 8x^2 + 8x^4$$

y si $\alpha = 7$ la solución polinomial es

$$P(x) = x - 8x^3 + 16x^5 - \frac{64}{7}x^7$$

A estos polinomios, cuando están multiplicados por una constante adecuada, se les conoce como polinomios de Chebicheb.

3.1 La ecuación de Legendre

A una ecuación de la forma

$$(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)\,y = 0$$

donde α es una constante, se le llama ecuación de Legendre. Ésta es una ecuación diferencial muy importante dentro de los estudios de cierta área de la física matemática. Queremos obtener sus soluciones y estudiarlas.

Observe primeramente que $x_o = 0$ es un punto ordinario para esta ecuación, pues las funciones

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \qquad Q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$$

son analíticas ahí.

Sea pues la expresión

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

la solución de la ecuación de Legendre. Obtengamos los coeficientes a_n.

Derivando

$$y'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} na_n\, x^{n-1}, \; y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

sustituyendo:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

de donde:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Agrupando:

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3 x - 2a_1 x + \alpha(\alpha+1)\,a_o + \alpha(\alpha+1)\,a_1 x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)\,(n+1)a_{n+2} + (\alpha+n+1)\,(\alpha-n)\,a_n]\,x^n = 0$$

Observe que la fórmula de recurrencia la podemos escribir como

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha+n+1)\,(\alpha-n)}{(n+2)\,(n+1)}\,a_n \qquad n \geq 0$$

Entonces

si $n = 0$ $\qquad a_2 = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}\,a_o$

si $n = 1$ $\qquad a_3 = -\dfrac{(\alpha+2)\,(\alpha-1)}{3\cdot 2}\,a_1$

$$\text{si } n = 2 \qquad a_4 = -\frac{(\alpha + 3)(\alpha - 2)}{4 \cdot 3} a_2$$

$$= \frac{(\alpha + 3)(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 2)}{4!} a_o$$

$$\text{si } n = 3 \qquad a_5 = -\frac{(\alpha + 4)(\alpha - 3)}{5 \cdot 4} a_3$$

$$= \frac{(\alpha + 4)(\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 3)}{5!} a_1$$

En general

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(\alpha + 2k-1)(\alpha+2k-3)\ldots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\ldots(\alpha-2k+2)}{(2k)!} a_o$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\alpha + 2k)(\alpha+2k-2)\ldots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} a_1$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Entonces la solución de la ecuación de Legendre se ve como

$$y(x) = a_o \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha+2k-1)(\alpha+2k-3)\ldots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\ldots(\alpha-2k+2)}{(2k)!} x^{2k}\right]$$

$$+ a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha+2k)(\alpha+2k-2)..(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)..(\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right]$$

Sea

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha+2k-1)(\alpha+2k-3)\ldots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\ldots(\alpha-2k+2)}{(2k)!} x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha+2k)(\alpha+2k-2)\ldots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Usando el criterio de D'Alambert podemos ver que $y_1(x)$ converge para $|x| < 1$. En efecto

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}\, x^{2k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{(\alpha+2k+1)(\alpha-2k+4)}{(2k+1)(2k+2)} \right) x^2 \right| = x^2$$

por lo que la serie converge para $x^2 < 1$, i. e. para $|x| < 1$.

Similarmente se ve que $y_2(x)$ converge para $|x| < 1$.

Entonces, la solución $y(x) = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x)$ tiene radio de convergencia 1.

Suponga ahora que la constante x es un entero no negativo.

Si α es par, digamos $\alpha = 2k$, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado α, pues a partir del coeficiente de x^{2k+2} aparece el factor $(\alpha - 2k)$ — que es cero. Por ejemplo, si $\alpha = 2$, $y_1(x) = 1 - 3x^2$; si $\alpha = 4$, $y_1(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$; si $\alpha = 6$, $y_1(x) = 1 - 21x^2 + 63x^4 - \frac{694}{15}x^6$, etc.

Si α es impar, digamos $\alpha = 2k+1$, entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado α, pues a partir del coeficiente de x^{2k+3} aparece el factor $(x-2k-1)$ que es cero. Por ejemplo, si $\alpha = 1$, $y_2(x) = x$; si $\alpha = 3$, $y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3$; si $\alpha = 5$, $y_2(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$, etc.

En resumen: si α es un entero no negativo, existe una solución polinomial para la ecuación de Legendre. Estas soluciones polinomiales, cuando se les impone cierta condición adicional, forman un conjunto de polinomios del que resulta muy interesante estudiar algunas de sus propiedades.

Definición: Sea $P_n(x)$ un polinomio de grado n que satisface la ecuación diferencial de Legendre con $\alpha = n$ tal que $P_n(1) = 1$. Llamaremos a $P_n(x)$ el n-ésimo *polinomio de Legendre.*

Por ejemplo, ya vimos que $Q(x) = 1-3x^2$ es un polinomio que satisface la ecuación de Legendre. Tenemos que $Q(1) = -2$. Entonces:

$P_2(x) = -\frac{1}{2}(1-3x^2) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ debe ser, según la definición anterior, el segundo polinomio de Legendre. (Observe que usamos el principio de superposición de soluciones para una ecuación lineal homogénea: Si $Q(x)$ es solución y K es una constante — $K = (Q(1))^{-1}$ —, entonces $KQ(x)$ también es solución).

El problema de la unicidad de estos polinomios es un poco delicado y lo dejaremos para comentarlo posteriormente (en realidad habría que asegurarse de la unicidad de los polinomios de Legendre para que la definición que dimos anteriormente sea válida).

Veamos ahora que existe una fórmula que engloba a todos los polinomios de Legendre.

Afirmación:

$$\text{Sea } u(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

(Observe que $u(x)$ es un polinomio de grado n).

Entonces $u(x)$ es una solución polinomial para la ecuación de Legendre (con $\alpha = n$)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Demostración:

Llamaremos a $v(x) = (x^2-1)^n$ **(A)**

Entonces $v'(x) = n(x^2-1)^{n-1}(2x)$

Multiplicando por $(x^2 - 1)$ nos queda

$$(x^2 - 1)v'(x) = 2nx(x^2 - 1)^n$$

o sea

$$(x^2 - 1)\, v'(x) = 2nxv(x)$$

Si derivamos nuevamente obtenemos

$$(x^2 - 1)v''(x) + 2xv'(x) = 2nv(x) + 2nxv'(x)$$

o

$$(x^2-1)v''(x) + 2x(1-n)v'(x) - 2nv(x) = 0$$

Afirmamos que la k-ésima derivada de la expresión (**A**) se ve como:

$$(x^2-1)v^{(k)}(x) + 2x(k-1-n)v^{(k-1)}(x) + (k-1)(k-2n-2)v^{(k-2)}(x) = 0$$

En efecto, para $k = 1$ es cierto. Suponga válida la afirmación para k y derivemos esta última expresión, obteniendo

$$(x^2-1)\, v^{(k+1)}(x) + 2xv^{(k)}(x) + 2x(k-1-n)\, v^{(k)}(x)$$

$$+\, 2(k-1-n)\, v^{(k-1)}(x) + (k-1)\,(k-2n-2)\, v^{(k-1)}(x) = 0$$

o sea:

$$(x^2 - 1)v^{(k+1)}(x) + 2x(k-n)\, v^{(k)}(x) +$$

$$[2(k-1-n) + (k-1)(k-2n-2)]\, v^{(k-1)}(x) = 0$$

pero la expresión en el corchete es $k(k-2n-1)$ tal como se deseaba, (expresión de la $(k+1)$-ésima derivada).

Entonces la $(n + 2)$-ésima derivada de (**A**) se ve como:

$$(1 - x^2)\, v^{(n+2)}(x) - 2x\, v^{(n+1)}(x) + n\,(n + 1)\, v^n(x) = 0$$

pero $v^{(n)}(x) = u(x)$, por lo que

$$(1-x^2)\, u''(x) - 2xu'(x) + n\,(n+1)\, u(x) = 0$$

como se quería probar.

Q.E.D.

Además, podemos ver que el polinomio $u(x)$ de grado n de la afirmación anterior satisface $u(1) = 2^n n!$. En efecto:

$$u(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n\,(x+1)^n]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} [(x-1)^n]^{(j)} \qquad [(x+1)^n]^{(n-j)}$$

$$= [(x-1)^n]^{(n)}\,(x+1)^n + \sum_{j=0}^{n-1} [(x-1)^n]^{(j)}\,[(x+1)^n]^{(n-j)}$$

Observe que en todos los términos de la suma que aparece en esta última expresión se tiene a $(x-1)$ como factor (pues aparece hasta la $(n-1)$-ésima derivada de $(x-1)^n$ que es $n!\,(x-1)$). Como $[(x-1)^n]^{(n)} = n!$ nos queda

$$u(x) = n!\,(x+1)^n + \sum_{j=0}^{n-1} [(x-1)^n]^{(j)}\,[(x+1)^n]^{(n-j)}$$

de modo que

$$u(1) = n!\,2^n$$

Entonces los polinomios

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\,[(x^2-1)^n]^n$$

satisfacen a la ecuación de Legendre (con $\alpha = n$) y además $P_n(1) = 1$.

Ésta es, pues, una fórmula ''generadora'' de polinomios de Legendre, conocida como ''fórmula de Rodrigues''. Con esta fórmula garantizamos la existencia de los polinomios de Legendre, pero también nos ayuda a construir un argumento para la unicidad de tales polinomios. La idea se basa en la siguiente

Afirmacion:

La única solución polinomial $P(x)$ de la ecuación de Legendre con $\alpha = n$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

tal que $P(1) = 0$, es la solución $P(x) \equiv 0$.

Demostración:

Sea $P(x)$ una solución polinomial de la ecuación de Legendre. Entonces existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$P(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son las series que aparecen en la solución general anteriormente establecida

$$y(x) = a_oy_1(x) + a_1y_2(x)$$

Si $\alpha = n$ sabemos que o $y_1(x)$ es una solución polinomial (si n es par) o $y_2(x)$ lo es (si n es impar).

Suponga que n es par. Entonces

$$P(x) - C_1y_1(x) = C_2y_2(x)$$

donde el lado izquierdo de esta última expresión es una solución polinomial de la ecuación de Legendre (pues $P(x)$ lo es).

Pero es claro en tal caso $y_2(x)$ *no es un polinomio* (es una serie de potencias infinita). Entonces $C_2 = 0$. Un razonamiento análogo para n impar nos permite concluir finalmente que, siendo $P(x)$ una solución polinomial de la ecuación de Legendre con $\alpha = n$, entonces existen constantes C_1 o C_2 tales que $P(x) = C_1y_1(x)$ o $P(x) = C_2y_2(x)$.

En particular P_n, dado por la fórmula de Rodrigues, es una solución de este tipo. Entonces se tiene o $P_n(x) = C_1y_1(x)$ o $P_n(x) = C_2y_2(x)$.

Como $P_n(1) = 1$ concluimos que $y_1(1) \neq 0$ y $y_2(1) \neq 0$. Por lo tanto, si $P(x)$ es una solución polinomial de la ecuación de Legendre con $\alpha = n$, tal que $P(1) = 0$, ya que $P(x) = C_1y_1(x)$ o $P(x) = C_2y_2(x)$, donde $y_1(1) \neq 0$ y $y_2(1) \neq 0$, debemos tener entonces $C_1 = 0$ o $C_2 = 0$ respectivamente.

En cualquier caso $P(x) \equiv 0$.

Q.E.D.

La unicidad de los polinomios de Legendre se sigue ahora fácilmente, pues, si además de aquéllos dados por la fórmula de Rodrigues hubiera otros, digamos $\tilde{P}_n(x)$, tendríamos que: $P(x) = P_n(x) - \tilde{P}_n(x)$ sería una solución polinomial a la ecuación de Legendre tal que $P(1) = P_n(1) - \tilde{P}_n(1) = 0$. Entonces $P(x) \equiv 0$, o sea $P_n \equiv \tilde{P}_n$.

Podemos entonces afirmar ahora que *los* polinomios de Legendre son

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$$

Algunos de estos polinomios son

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \qquad \text{etc.}$$

Veamos que el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ es $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n] \\ &= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x^2)^{n-j}(-1)^j\right] \\ &= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{2n} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(x^2)^{n-j}(-1)^j\right] \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE [illegible] BIBLIOTECA

Observe que en la expresión

$$\frac{d^n}{dx^n} \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j}(x^2)^{n-j}(-1)^j\right]$$

aparecen sólo potencias de x menores que n. De modo que el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ proviene sólo de la n-ésima derivada de x^{2n} que es:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n} = (2n)\ (2n-1)\ (2n-2)\ \ldots\ (n+1)\ x^n$$

Entonces el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ es:

$$\frac{(2n)\ (2n-1)\ (2n-2)\ \ldots\ (n+1)}{n!2^n}$$

Si multiplicamos numerador y denominador por $n!$ obtenemos

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

como queríamos ver.

Una de las propiedades más importantes e interesantes de los polinomios de Legendre $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ es que ellos constituyen una base para el espacio de polinomios de grado menor o igual que n.

Es fácil ver que x^n se puede escribir siempre como una combinación lineal de $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots, P_n(x)$. En efecto, para $n = 0, 1$ la afirmación es cierta. Supongámosla cierta para n y veamos su validez para $n + 1$.

Sea $K = \dfrac{2^{n+1}\ ((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$ (el inverso del coeficiente de x^{n+1} en $P_{n+1}(x)$). Entonces

$$K\ P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j \text{ para algunos } \beta_j$$

Como según la hipótesis de inducción existen constantes α_{ji}, tales que

$$x^j = \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji}P_i(x) \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

tenemos que

$$x^{n+1} = KP_{n+1}(x) - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \beta_j\, \alpha_{ji}P_i(x)$$

como se quería ver.

Entonces, todo polinomio de grado n, $Q_n(x)$, se puede escribir como combinación lineal de los polinomios de Legendre $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Es decir, existen constantes $C_0, C_1, \ldots, C_n$, tales que

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_iP_i(x)$$

Aún más, estas constantes se pueden calcular de una manera sumamente sencilla. Se tiene la fórmula

$$C_i = \frac{2i + 1}{2} \int_{-1}^{1} Q_n(x)\, P_i(x) dx \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

la cual podremos ver que es cierta si probamos las "relaciones de ortogonalidad" de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \qquad \text{si } n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{2}{2n + 1}$$

Pero esto ya es trabajo del lector (ver ejercicios al final de la sección).

EJERCICIOS (CAPÍTULO 5. SECCIÓN 3)

En los siguientes ejercicios (1 — 5) encuentre la solución en forma de serie de potencias alrededor de $x = 0$ para las ecuaciones dadas.

1. $y'' + x^2y' + 2xy = 0$
2. $(1 + x^2)\, y'' + y = 0$
3. $y'' + x^2y' + y = 0$
4. $(x^2 - 9)y'' + 3xy' - 3y = 0$
5. $(1 + 2x^2)\, y'' + xy' + 2y = 0$
6. Considere la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Halle la solución general de esta ecuación en forma de serie de potencias. Compare con los resultados que se obtienen por los métodos del capítulo 4.

7. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0$$

donde $y = y(t)$ es una función que depende de la variable t (tiempo). En algunas ocasiones es importante estudiar el comportamiento de la solución de esta ecuación para "tiempos muy grandes". Para esto, se introduce la nueva variable u, definida como $u = \frac{1}{t}$, de modo que para $t = \infty$, tendríamos $u = 0$. Demuestre que la ecuación original se transforma en

$$u^4 \frac{d^2y}{du^2} + \left[2u^3 - u^2 P\left(\frac{1}{u}\right)\right] \frac{dy}{du} + Q\left(\frac{1}{u}\right) y = 0$$

donde ahora $y = y(u)$. Entonces, si estudiamos las soluciones de esta nueva ecuación alrededor de $u = 0$, obtendremos información sobre la solución de la ecuación original $y = y(t)$ para $t = \infty$. ¿Qué sentido le daría a la expresión ''el punto al infinito ($t = \infty$) es un punto ordinario''? Demuestre, que el punto al infinito es un punto singular regular de la ecuación

$$(1 - t^2)y'' + 2ty + 2y = 0$$

8. Obtenga la solución de la ecuación $2y'' + xy' - 4y = 0$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

9. Obtenga la solución de la ecuación no homogénea $y'' - xy' + y = 1$ tal que $y(0) = y'(0) = 0$.

10. Obtenga la solución general de la ecuación

$$y'' - 2(x + 1)\, y' - 3y = 0$$

alrededor de $x_0 = 3$.

Los siguientes ejercicios (11 — 13) se refieren a la ecuación diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \qquad \alpha, \text{ cte.}$$

11. Encuentre la solución general de la ecuación de Hermite y determine su dominio de convergencia.

12. Demuestre que si $\alpha = n \in N$, existe una solución polinomial de la ecuación.

13. Demuestre que los polinomios

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

satisfacen la ecuación de Hermite con $\alpha = n \in N$ (estos polinomios se conocen como ''Polinomios de Hermite'').

(Sugerencia: sea $u = e^{-x^2}$. Muestre que $u' + 2x\,u = 0$. Derive nuevamente...).

Los ejercicios del 14 al 17 se refieren a la ecuación diferencial de Legendre estudiada en 3.1.

14. Sea $P_n(x)$ el n-ésimo polinomio de Legendre. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\, P_n'(x)\right] = -n\,(n + 1)\, P_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\, P_m'(x)\right] = -m\,(m + 1)\, P_m(x)$$

Entonces, pruebe que se tiene

$$P_m(x)\,\left[(1 - x^2)\, P_n'(x)\right]' - P_n(x)\,\left[(1 - x^2)\, P_m'(x)\right]' =$$

$$= \left\{(1 - x^2)\,[P_m(x)\,P_n'(x) - P_m'(x)\,P_n(x)]\right\}$$

$$= [\,m\,(m + 1) - n(n + 1)]\,P_m(x)\,P_n(x)$$

Integre la expresión anterior de —1 a 1 y concluya entonces que si $n \neq m$ se tiene

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0$$

15. Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2\,(x)\,dx = \frac{2}{2n + 1}$$

realizando los siguientes pasos:

a) Primero recuerde que si $u(x) = (x^2 - 1)^n$, se tiene que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,u^{(n)}\,(x)$$

y observe que $u^{(k)}\,(1) = u^{(k)}\,(-1) = 0$ para $0 \leq k < n$.
Derive n veces la expresión anterior y concluya que

$$P_n^{(n)}\,(x) = \frac{1}{2^n n!}\,u^{(2n)}\,(x)$$

b) Demuestre que $P_n^{(n)}\,(x) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

(recuerde que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n), y concluya entonces que, según el resultado de (*a*), se tiene

$$u^{(2n)}\,(x) = (2n)!$$

c) Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx = \frac{2(2^n\,n!)^2}{(2n + 1)!}$$

d) Aplique n veces integración por partes a $\int_{-1}^{1} (u^{(n)}(x))^2\,dx$ usando la observación hecha en a) para concluir que

$$\int_{-1}^{1} (u^{(n)}\,(x))^2\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} u^{(2n)}\,(x)\,u\,(x)\,dx$$

e) Use b) y d) para concluir que

$$\int_{-1}^{1} (u^{(n)}\,(x))^2\,dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx$$

f) Use c) y e) para concluir el ejercicio.

16. Sea $P(x)$ un polinomio de grado n. Escribamos

$$P(x) = C_o P_o(x) + C_1 P_1(x) + \dots + C_n P_n(x)$$

donde $C_o, C_1, \dots, C_n$ son constantes y $P_o(x), P_1(x), \dots P_n(x)$ son los polinomios de Legendre.

Demuestre que

$$C_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P(x)\, P_k(x)\, dx \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

(Sugerencia: use los resultados de los ejercicios 14 y 15).

17. Use el resultado del ejercicio anterior para establecer la fórmula

$$2x^3 - x^2 + x - 1 = -\frac{4}{3} P_o(x) + \frac{11}{5} P_1(x) - \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{4}{5} P_3(x)$$

4. SOLUCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS ALREDEDOR DE PUNTOS SINGULARES REGULARES

Recordemos que el punto x_0 es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

cuando al menos una de las funciones $P(x)$ o $Q(x)$ no es analítica en x_0, pero las funciones $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2 Q(x)$ sí lo son. Por ejemplo, la ecuación de Euler

$$x^2 y'' + xy' - \frac{1}{9} y = 0$$

tiene en $x_0 = 0$ un punto singular regular, pues en este caso $P(x) = \dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = -\dfrac{1}{9x^2}$ no son analíticas en $x_0 = 0$, pero $xP(x) = 1$ y $x^2 Q(x) = -\dfrac{1}{9}$ sí lo son. Tomemos como ejemplo esta ecuación para ver que el método de la sección anterior, en el cual buscábamos la solución de la ecuación en forma de una serie de potencias (de Taylor) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, no funciona para el punto singular regular $x_0 = 0$.

Tenemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

de modo que, sustituyendo en la ecuación, queda

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

o sea

$$-\frac{1}{9}a_0 + \frac{8}{9}a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2 - \frac{1}{9}\right)a_nx^n = 0$$

por lo que $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, i.e., la única solución que nos reporta este método es la trivial. Sin embargo, sabemos, según el método descrito en la sección 7 del capítulo 4, en donde estudiamos ecuaciones de este tipo, que la solución general de esta ecuación es

$$y = C_1\, x^{1/3} + C_2\, x^{-1/3}$$

Observe que ninguna de las funciones $y_1 = x^{1/3}$ y $y_2 = x^{-1/3}$ tienen desarrollo en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$, por lo que es lógico pensar que no debemos buscar la solución de la ecuación en una serie de este tipo.

En general, si x_0 es un punto singular regular para la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, la solución de ésta alrededor de x_0, no debemos buscarla en forma de una serie de potencias del tipo de Taylor. Sin embargo, veremos que la solución en este caso la podemos hallar si la buscamos en forma de un pariente cercano a una serie de potencias, que en ocasiones suele llamársele "serie de potencias generalizada" y que es una serie de la forma

$$y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

donde r es algún número real (si r es un entero no negativo tenemos una serie de Taylor). El valor absoluto que aparece en esta serie es con el fin de asegurar que $y(x)$ es efectivamente un número real para cada x fija en el dominio de convergencia de la serie (conjunto de x para las que $y(x)$ converge) —piense por ejemplo que $r = \frac{1}{2}$ y $x < x_0$.

Con fines de simplificación en el análisis se seguirá suponiendo que $x_0 = 0$ y que las soluciones se procurarán para (aquellos valores de x para los que la serie converge y) $x > 0$, de modo que se buscarán soluciones en serie de la forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Siguiendo con nuestro ejemplo de la ecuación de Euler, veamos cómo la idea anteriormente planteada funciona. Procuramos entonces la solución de la ecuación de Euler en una serie de la forma (para $x > 0$)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Siempre podemos suponer que $a_0 \neq 0$, pues en caso contrario llame $N = \text{mín}\,\{n \in \mathrm{N}$ tal que $a_n \neq 0\}$ y escriba $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{n+\tilde{r}}$, donde $\tilde{a}_n = a_{n+N}$, $\tilde{r} = r + N$, y tenemos entonces una serie del mismo tipo con $\tilde{a}_0 \neq 0$.

Derivando:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)\,a_n x^{n+r-2}$$

Observe que en este caso las series de la primera y segunda derivada comienzan con $n = 0$, pues, en principio (a menos que $r = 0$) los términos correspondientes a $n = 0$ y $n = 1$ no son nulos.

Sustituyendo:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)a_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1} - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n + r)^2 - \frac{1}{9}\right] a_n x^{n+r} = 0$$

La expresión anterior la podemos ver como:

$$x^r \left[\left(r^2 - \frac{1}{9}\right) a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n + r)^2 - \frac{1}{9}\right] a_n x^n\right] = 0$$

Para que la expresión anterior sea una identidad se debe tener

$$\left(r^2 - \frac{1}{9}\right) a_0 = 0$$

y

$$\left((n + r)^2 - \frac{1}{9}\right) a_n = 0 \qquad n \geq 1$$

Observe que como se está suponiendo que $a_0 \neq 0$, se debe tener que

$$r^2 - \frac{1}{9} = 0$$

Esta ecuación juega un papel muy importante en la solución de la ecuación: ella nos da dos opciones de valores *concretos* de r para los cuales podemos buscar las soluciones de la ecuación. Se llama *ecuación indicial*.

Tenemos pues que $r = \frac{1}{3}$ o $r = -\frac{1}{3}$.

Si $r = \frac{1}{3}$ tenemos

$$\left(\left(n + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) a_n = 0 \qquad n \geq 1$$

de donde $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, por lo que la solución en este caso es

$$y_1(x) = x^{1/3}(a_0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots) = a_0 x^{1/3}$$

Similarmente, si $r = -\frac{1}{3}$ obtenemos la solución

$$y_2(x) = a_0 x^{-1/3}$$

Las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes, por lo que la solución general debe ser $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x^{1/3} + C_2 x^{-1/3}$, como ya se sabía.

El método usado en la solución del ejemplo anterior es llamado *método de Frobenius*, en honor al matemático alemán Frobenius (1849-1917). El soporte teórico de este método es lo suficientemente complicado como para superar las pretensiones de este libro. Nos concretamos a decir que, si $x_0 = 0$ es un punto singular regular para la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, ésta tiene entonces una solución de la forma $y = |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente para $|x| < s$, para algún $s > 0$. Observe que no estamos diciendo que la solución general de la ecuación es de esa forma. Algunas complicaciones pueden surgir, como veremos más adelante. Por lo pronto, haremos una descripción general del método.

Suponga, pues, que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Conviene escribir esta ecuación de la siguiente manera:

$$x^2 y'' + x(xP(x))y' + (x^2 Q(x))y = 0$$

pues así identificamos a las funciones $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ que son analíticas en $x_0 = 0$.

Tenemos entonces que

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para algunas constantes p_n y q_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y la solución que buscamos es (para $x > 0$)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Sus derivadas de primero y segundo orden son

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} +$$

$$+ x\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}\right) +$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) = 0$$

o sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r}\right) +$$

$$+\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) = 0$$

Haciendo los productos de las series, esta expresión se ve como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j(n-j+r)a_{n-j}\right)x^{n+r} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j a_{n-j}\right)x^{n+r} = 0$$

expresión que puede escribirse como (tomando el término correspondiente a $n = 0$)

$$[(r-1)r + p_0 r + q_0]\, a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[(n+r-1)(n+r)\, a_n +$$

$$+\sum_{j=0}^{n} p_j(n-j+r)\, a_{n-j} + \sum_{j=0}^{n} q_j a_{n-j}\Bigg]x^{n+r} = 0$$

Aún más, si tomamos los términos correspondientes a $j = 0$, en las sumas del corchete nos queda

$$[(r-1)\, r + p_0 r + q_0]\, a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[(n+r-1)(n+r)a_n + p_0(n+r)a_n +$$

$$+ q_0 a_n + \sum_{j=1}^{n} p_j(n-j+r)\, a_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_j\, a^{n-j}\Bigg]x^{n+r} = 0$$

Llamemos

$$F(r) = (r - 1)\,r + p_0 r + q_0.$$

Entonces la última expresión se ve, en términos de $F(r)$, como

$$\boxed{\begin{aligned} F(r)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[F(n + r)a_n + \sum_{j=1}^{n} p_j(n - j + r)a_{n-j} + \\ + \sum_{j=1}^{n} q_j a_{n-j}\Bigg] x^{n+r} = 0 \end{aligned}}$$

Como $a_0 \neq 0$, se debe tener que

$$\boxed{F(r) = (r - 1)\,r + p_0 r + q_0 = 0}$$

Ésta es la llamada *ecuación indicial.*

También deberá cumplirse que

$$F(n + r)a_n + \sum_{j=1}^{n} p_j(n - j + r)\,a_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_j a_{n-j} = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

De la ecuación indicial surgen dos valores de r, digamos r_1 y r_2. La última ecuación indica la manera como están relacionados los a_n. Observe que esta manera de relacionarse los coeficientes a_n depende de r: para cada uno de los valores r_1 y r_2 se obtendrá una fórmula de recurrencia que conducirá en principio a obtener dos soluciones de la ecuación con las que se construirá la solución general.

En este punto se pueden visualizar las complicaciones que pueden surgir al aplicar el método de Frobenius: si $r_1 = r_2$ sólo se puede obtener una solución de la ecuación; si $r_1 - r_2 = n$, n algún entero positivo, se tendrá que $F(n + r_2) = F(r_1) = 0$, y entonces, en general no se podrá hallar tampoco una segunda solución (pues el coeficiente de a_n, en la fórmula de recurrencia con $r = r_2$, será cero). Estos casos se tratarán más adelante (sección 4.1 y 4.2 respectivamente).

A continuación se presentan algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Hallar la solución alrededor de $x_o = 0$ para la ecuación

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

Solución

Se ve que $x_0 = 0$ es un punto singular regular para la ecuación, pues siendo las funciones $P(x) = \dfrac{1}{2x}$ y $Q(x) = -\dfrac{1}{4x}$ no analíticas en $x_0 = 0$, sí se tienen las funciones $xP(x) = \dfrac{1}{2}$ y $x^2Q(x) = -\dfrac{1}{4}x$ analíticas en tal punto.

Se debe procurar entonces una solución en la forma (para $x > 0$)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Derivando

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$4x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

o sea

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

Tomando el primer sumando de las dos primeras series y agrupando términos queda

$$[4(r-1)ra_0 + 2ra_0]x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [4(n+r-1)(n+r)a_n +$$

$$+ 2(n+r)a_n - a_{n-1}]x^{n+r-1} = 0$$

o sea

$$2r(2r-1)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [2(n+r)(2n+2r-1)a_n - a_{n-1}]x^{n+r-1} = 0$$

La ecuación indicial es entonces

$$2r(2r-1) = 0$$

cuyas raíces son $r = 0$ y $r = \frac{1}{2}$.

La fórmula de recurrencia se ve como

$$2(n+r)(2n+2r-1)\,a_n - a_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

Entonces, si $r = 0$ se obtiene

$$2n(2n-1)a_n - a_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

es decir

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)} \qquad n \geq 1$$

de donde

$$(\text{si } n = 1) \qquad a_1 = \frac{a_0}{2}$$

$$(\text{si } n = 2) \qquad a_2 = \frac{a_1}{4(3)} = \frac{a_0}{4!}$$

$$(\text{si } n = 3) \qquad a_3 = \frac{a_2}{6(5)} = \frac{a_0}{6!}$$

etc.

En general

$$a_n = \frac{a_0}{(2n)!} \qquad n \geq 1$$

por lo que una primera solución es

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^0 \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0}{(2n)!} x^n \right] = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \right)$$

donde a_0 es cualquier constante.

Por otra parte, si $r = \frac{1}{2}$, se obtiene la fórmula de recurrencia

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2n(2n+1)} \qquad n \geq 1$$

de modo que

$$(\text{si } n = 1) \qquad a_1 = \frac{a_0}{2(3)} = \frac{a_0}{3!}$$

$$(\text{si } n = 2) \qquad a_2 = \frac{a_1}{4(5)} = \frac{a_0}{5!}$$

etc.

En general

$$a_n = \frac{a_o}{(2n + 1)!} \qquad n \geq 1$$

Por lo que una segunda solución es

$$y = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= x^{1/2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right]$$

$$= x^{1/2}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0}{(2n+1)!}\, x^n\right]$$

$$= a_0 x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}\right]$$

y entonces la solución general de la ecuación es:

$$y = C_1\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}\right) + C_2 x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}\right)$$

Ejemplo 2

Una ecuación muy importante en ciertos estudios de la física matemática es la llamada ecuación hipergeométrica

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta\, y = 0$$

donde α, β, γ son constantes. Hallar la solución de esta ecuación alrededor del cero, suponiendo que $1 - \gamma$ no es un entero positivo.

Solución

Es fácil verificar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular para la ecuación. Se propone entonces (para $x > 0$)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

de donde

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1},\quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)a_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$x(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)a_n x^{n+r-2} +$$

$$+ [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x] \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1} - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Haciendo las operaciones queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)\,a_n x^{n+r} +$$

$$+ \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1} - (1 + \alpha + \beta) \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r} -$$

$$- \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Reacomodando los índices de la 2a., 4a. y 5a. series (con objeto de que en todas las series aparezca x^{n+r-1}) queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)(n + r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n + r - 2)(n + r - 1)a_{n-1} x^{n+r-1} +$$

$$+ \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1} - (1 + \alpha + \beta) \sum_{n=1}^{\infty} (n + r - 1)a_{n-1} x^{n+r-1} -$$

$$- \alpha\beta \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

Tomando el primer sumando en cada una de las series que empiezan en $n = 0$, y reagrupando el resto se obtiene

$$[r(r - 1) + \gamma r]\, a_0 x^{r-1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(n + r)(n + r - 1 + \gamma)a_n -$$

$$- (n + r - 1 + \alpha)(n + r - 1 + \beta)a_{n-1}]x^{n+r-1} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación indicial es

$$r(r - 1) + \gamma r = 0$$

o

$$r(r - 1 + \gamma) = 0$$

cuyas raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = 1 - \gamma$ (como se supuso desde un principio que $r_2 = 1 - \gamma$ no es un entero positivo, se podrán determinar las dos soluciones que constituyen la solución general).

La fórmula de recurrencia se ve como

$$a_n = \frac{(n + r - 1 + \alpha)(n + r - 1 + \beta)}{(n + r)(n + r - 1 + \gamma)} a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

de modo que para $r_1 = 0$, ésta queda como

$$a_n = \frac{(n-1+\alpha)(n-1+\beta)}{(n)(n-1+\gamma)} a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

Entonces

$$a_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} a_0$$

$$a_2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)} a_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} a_0$$

$$a_3 = \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(\gamma+2)} a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!} a_0$$

etc. En general

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)n!} a_0$$

de modo que una solución de la ecuación es

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)n!} x\right]$$

Para $r_2 = 1 - \gamma$ la fórmula de recurrencia es

$$a_n = \frac{(n+\alpha-\gamma)(n+\beta-\gamma)}{(n+1-\gamma)(n)} a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

entonces

$$a_1 = \frac{(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)}{(2-\gamma)(1)} a_0$$

$$a_2 = \frac{(2+\alpha-\gamma)(2+\beta-\gamma)}{(3-\gamma)(2)} a_1 =$$

$$= \frac{(1+\alpha-\gamma)(2+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)(2+\beta-\gamma)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!} a_0$$

etc. En general

$$a_n = \frac{(1+\alpha-\gamma)(2+\alpha-\gamma)\ldots(n+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)(2+\beta-\gamma)\ldots(n+\beta-\gamma)}{(2-\gamma)(3-\gamma)\ldots(n+1-\gamma)\,n!}\,a_0$$

de modo que una segunda solución es

$$y_2(x) = a_0x^{1-\gamma}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\alpha-\gamma)(2+\alpha-\gamma)\ldots(n+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)(2+\beta-\gamma)\ldots(n+\beta-\gamma)}{(2-\gamma)(3-\gamma)\ldots(n+1-\gamma)\,n!}\,x^n\right]$$

Se puede probar, usando el criterio de la razón, que las series que definen a $y_1(x)$ y a $y_2(x)$ convergen para $|x| < 1$.
Haremos algunas observaciones sobre estas soluciones. Se llama *serie hipergeométrica*, denotada por $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, a la serie

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)n!}$$

la cual converge para $|x| < 1$.

Observe que $F(1, \beta, \beta; x)$ es precisamente lo que conocemos como serie geométrica. En efecto

$$F(1, \beta, \beta; x) = 1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(2)(3)\ldots(n)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)\cdot n!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Se ve pues que la serie hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ es una solución de la ecuación hipergeométrica. En efecto, es evidente que $y_1(x) = C_1F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, C_1 una constante arbitraria. Aún más, se verifica por sustitución directa que $y_2(x) = C_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x)$, C_2 una constante arbitraria, es la otra solución de la ecuación.

Un modo más interesante de darse cuenta de que $x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x)$ es solución de la ecuación hipergeométrica es de la siguiente manera:

Ya sabemos que $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ es solución de

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\,\beta\,y = 0$$

Hagamos $y = x^{1-\gamma}u$, donde u es una nueva variable dependiente. Tenemos

$$y' = (1-\gamma)x^{-\gamma}u + x^{1-\gamma}u'$$

$$y'' = -\gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1}u + 2(1-\gamma)x^{-\gamma}u' + x^{1-\gamma}u''$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$x(1-x)\,[-\gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1}u + 2(1-\gamma)x^{-\gamma}u' + x^{1-\gamma}u''] +$$

$$+\,[\gamma - (1+\alpha+\beta)x]\,[(1-\gamma)x^{-\gamma}u + x^{1-\gamma}u'] - \alpha\beta\, x^{1-\gamma}u = 0$$

Después de algunas simplificaciones esta ecuación puede ser escrita como

$$x(1-x)u'' + [(2-\gamma) - (1 + (\alpha-\gamma+1) + (\beta-\gamma+1))\,x]\,u' -$$

$$-\,(\alpha-\gamma+1)\,(\beta-\gamma+1)\,u = 0$$

Llamando $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$, la ecuación queda $x(1-x)u'' + [\gamma' - (1 + \alpha' + \beta')x]\,u' - \alpha'\,\beta'\,u = 0$ que es una ecuación hipergeométrica de la cual sabemos que $F(\alpha', \beta', \gamma'; x)$ es solución.

Entonces

$$u = F(\alpha', \beta', \gamma'; x)$$

es solución de la ecuación; o sea, en términos de ''y''.

$$y = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ 2-\gamma;\ x)$$

es solución, como se quería ver.

Entonces la solución general de la ecuación hipergeométrica puede escribirse como

$$y = C_1F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ x)$$

(siempre que $1 - \gamma$ no sea un entero positivo).

Algunos otros aspectos importantes sobre la serie hipergeométrica serán considerados en los ejercicios al final de esta sección.

4.1 Las raíces de la ecuación indicial son iguales

Recordemos que para la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

cuando $x_0 = 0$ es un punto singular regular, se procuran soluciones de la forma $(x > 0)$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Se escribirá $y = y(x, r)$ para enfatizar la dependencia de la función "y" con el parámetro r. Entonces

$$y(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

será la solución procurada para algún r.

Introduzcamos la notación

$$L(y(x)) = y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x)$$

de modo que la ecuación diferencial se ve como $L(y(x)) = 0$.

Se había visto ya que

$$L(y(x, r)) = F(r)\, a_0 x^r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[F(n+r)a_n + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(n-j+r)\, a_{n-j} + \sum_{j=1}^{\infty} q_j a_{n-j} \right] x^{n+r}$$

donde

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

$$F(r) = (r - 1)r + p_0 r\, q_0$$

Se vio que de la ecuación indicial $F(r) = 0$ se obtenían las raíces con las cuales se obtenían de la fórmula de recurrencia

$$F(n+r)a_n + \sum_{j=1}^{n} p_j(n-j+r)a_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_j a_{n-j} = 0 \qquad n \geq 1$$

los coeficientes de las dos soluciones que constituían la solución general.

Se puede ver ahora qué ocurre si las dos raíces de la ecuación indicial $F(r) = 0$ son iguales. En tal caso se podrá, según el procedimiento estudiado, construir *una* solución de la ecuación. A continuación se verá cómo hacer para descubrir la forma de una segunda solución.

Piénsese por un momento en r como una variable, y escójanse los a_n de modo que

$$F(n + r)a_n + \sum_{j=1}^{n} p_j(n - j + r)a_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_j a_{n-j} = 0 \qquad n \geq 1$$

(de hecho estos coeficientes a_n dependen de r). Entonces

$$L(y(x, r)) = F(r)a_0 x^r$$

cuando se fijan r en $\tilde{r}$ = valor de la raíz doble de $F(r) = 0$, se obtiene

$$L(y(x, \tilde{r})) \equiv 0$$

por lo que $y(x, \tilde{r})$ es una solución de la ecuación, como ya se sabía (es la solución que se puede determinar naturalmente con el procedimiento descrito).

Pero

$$F(r) = (r - \tilde{r})^2$$

por lo que

$$L(y(x, r)) = (r - \tilde{r})^2\, a_0 x^r$$

Derivando respecto de r la expresión anterior y observando que los símbolos $\dfrac{\partial}{\partial r}$ y L pueden intercambiarse (¿por qué?) se obtiene

$$L\left(\frac{\partial}{\partial r}\, y(x, r)\right) = 2(r - \tilde{r})a_0 x^r + (r - \tilde{r})a_0 x^r \ln x$$

Observe que

$$L\left(\frac{\partial}{\partial r}\, y(x, \tilde{r})\right) \equiv 0$$

por lo que $\dfrac{\partial}{\partial r}\, y(x, \tilde{r})$ debería ser otra solución de la ecuación.

De hecho, como

$$y(x, r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^n$$

(donde se está escribiendo $a_n(r)$ para indicar que esos valores de los coeficientes a_n dependen de r como ya se había dicho), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial r}\, y(x,\, r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^n\right) =$$

$$= x^r \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r)x^n + x^r \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^n \qquad (*)$$

y, por lo tanto, la segunda solución de la ecuación tendrá la forma

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}\, y(x,\, \tilde{r})$$

$$= x^{\tilde{r}} \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tilde{r})x^n + x^{\tilde{r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(\tilde{r})x^n$$

o sea

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\tilde{r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(\tilde{r})x^n}$$

Se puede demostrar que, en efecto, en este caso existe una solución alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$, de la forma anterior (atención: lo que hicimos en las páginas anteriores fue, por medio de un procedimiento puramente formal, descubrir una estructura plausible para una segunda solución de la ecuación), la cual converge en $(0,\, \rho)$ para algún $\rho > 0$.

Ejemplo 3

Hallar la solución general alrededor de $x_0 = 0$ para la ecuación

$$x^2y'' + 3xy' + (1 + x)\, y = 0$$

Solución

Se procuran soluciones de la forma $(x > 0)$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

---

[*] Recuerde que a_o es *una constante* (arbitraria).

Entonces

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r} +$$

$$+ (1 + x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

o bien

$$(r + 1)^2 a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [((n + r)(n + r + 2) + 1)\, a_n + a_{n-1}]\, x^{n+r} = 0$$

por lo que las dos raíces de la ecuación indicial son iguales a — 1.

Hallemos la primera solución ($r = -1$).

La fórmula de recurrencia se ve en este caso como

$$n^2 a_n + a_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

por lo que

$$a_1 = -\frac{a_0}{1^2} = -a_0$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2^2} = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3^2} = -\frac{a_0}{(2 \cdot 3)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_k = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2}$$

y entonces la primera solución se ve como

$$y(x) = x^{-1}\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2} x^k\right]$$

o

$$y_1(x) = \frac{a_0}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k!)^2}$$

Hallemos ahora la otra solución.

La fórmula de recurrencia se ve, en el caso general (con r arbitraria), como

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{(n+r)(n+r+2)+1} \qquad n \geq 1$$

de donde

$$a_1 = \frac{-a_0}{(r+1)(r+3)+1} = \frac{-a_0}{(r+2)^2}$$

$$a_2 = \frac{-a_1}{(r+2)(r+r)+1} = \frac{a_0}{((r+2)(r+3))^2}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{(-1)^k a_0}{((r+2)(r+3)\ldots(r+k+1))^2}$$

De hecho, se debe escribir

$$a_k(r) = \frac{(-1)^k a_0}{((r+2)(r+3)\ldots(r+k+1))^2}$$

para denotar la dependencia de estos coeficientes con r.

Según la discusión anterior, para hallar la segunda solución se debe hallar $a_k'(r)$. Debemos ser cuidadosos con el procedimiento que usaremos para calcular esta derivada: una mala estrategia nos podría conducir a resultados muy complicados. Una recomendación que suele ser útil en estos casos es tomar (formalmente) logaritmos en ambos miembros y luego derivar.

En nuestro caso esto se vería como:

$$ln\ a_k(r) = -2 \sum_{n=2}^{k+1} ln(r+n) + C \qquad (C \text{ una constante})$$

de modo que, derivando, queda

$$\frac{a_k'(r)}{a_k(r)} = -2\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{r+n}$$

o sea

$$a_k'(r) = -2a_k(r)\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{r+n}$$

Para la segunda solución ocupamos $a_k'(-1)$:

$$a_k'(-1) = -2a_k(-1)\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n-1}$$

Observe que $a_k(-1)$ ya lo tenemos calculado y vale

$$a_k(-1) = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2}$$

de modo que

$$a_k(-1) = 2(-1)^{k+1} \frac{a_0}{(k!)^2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

Introducimos la notación

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} = H_k$$

(k-ésima suma armónica), de modo entonces que

$$a_k'(-1) = 2(-1)^{k+1} \frac{a_0}{(k!)^2} H_k$$

y entonces la segunda solución es

$$y_2(x) = y_1(x)\, ln\, x + x^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1} \frac{a_0}{(k!)^2} H_k x^k$$

siendo entonces la solución general

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

4.2 Las raíces de la ecuación indicial difieren por un entero

Así como en 4.1, ahora se procederá formalmente para descubrir cómo podría ser una segunda solución de una ecuación alrededor de un punto singular regular en el caso de que las raíces de la ecuación indicial difieran por un entero.

Recordemos que si escribíamos

$$L(y(x)) = y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x)$$

obteníamos que, sustituyendo la solución

$$y(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

en esta expresión nos quedaba que

$$L(y(x, r)) = F(r)a_0 x^r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[F(n+r)a_n + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(n-j+r)a_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_j a_{n-j} \right] x^{n+r}$$

donde

$$x\,P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

$$F(r) = (r-1)r + p_0 r + q_0$$

($F(r)$ es la ecuación indicial). Llamemos

$$d_n = \sum_{j=1}^{n} p_j(n-j+r)a_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_j a_{n-j} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Entonces

$$L(y(x,\ r)) = F(r)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [F(n+r)a_n + d_n]\ x^{n+r}$$

Observe que d_n es una combinación lineal de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

De hecho

$$d_1 = (p_1r + q_1)a_0$$

$$d_2 = (p_1(1+r) + q_1)a_1 + (p_2r + q_2)a_0$$

$$d_3 = (p_1(2+r) + q_1)a_2 + (p_2(1+r) + q_2)a_1 + (p_3r + q_3)a_0$$

etc.

Para que $y(x,\ r)$ sea solución debemos tener necesariamente que

$$F(n+r)\ a_n + d_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Observe que podemos resolver para a_n, $n = 1, 2, \ldots$ en términos de a_0 y r de la siguiente manera:

Para $n = 1$ se tiene

$$F(1+r)\ a_1 + d_1 = 0$$

de donde

$$a_1 = \frac{-\ d_1}{F(1+r)} = \frac{-\ (p_1r - r_1)\ a_0}{F(1+r)}$$

Para $n = 2$ se tiene

$$F(2+r)\ a_2 + d_2 = 0$$

de donde

$$a_2 = \frac{-\ d_2}{F(2+n)} = -\ \frac{(p_1(1+r) + q_1)a_1 + (p_2r + q_2)a_0}{F(2+r)} =$$

$$= \frac{\dfrac{(p_1(1+r) + q_1)\ (p_1r + r_1)}{F(1+r)}\ a_0 - (p_2r + q_2)\ a_0}{F(2+r)}$$

etc. Llamemos, en general, $A_n(r)$ a las soluciones obtenidas con este procedimiento. Entonces podemos escribir que

$$A_n(r) = \frac{-D_n(r)}{F(n+r)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

donde

$$D_n(r) = \sum_{j=1}^{n} p_j(n-j+r)a_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} q_j a_{n-j}$$

Llamemos

$$\Phi(x, r) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)\, x^{n+r}$$

Es claro entonces que

$$L(\Phi(x, r)) = a_0 F(r)\, x^n$$

En realidad, para determinar una solución de la ecuación, se debería determinar r tal que $F(r) = 0$ y con este valor de r hallar los coeficientes $A_n(r)$.

La solución buscada es entonces $\Phi(x, r)$.

Veamos qué sucede si las raíces r_1 y r_2 de $F(r) = 0$ son tales que $r_1 - r_2 = m$, m un entero (se puede suponer positivo). En tal caso

$$F(r_1) = F(r_2 + m) = 0$$

de modo que, según la fórmula encontrada anteriormente para $A_m(r)$, se tendría

$$A_m(r_2) = \frac{-D_m(r_2)}{F(r_2+m)}$$

y entonces no se podría determinar el coeficiente $A_m(r_2)$ (correspondiente a la segunda solución —con $r = r_2$), *a menos que* $D_m(r_2)$ *tuviera un factor del tipo* $(r - r_2)$.

Un análisis en la estructura de la fórmula obtenida para $D_n(r)$ nos conduce a pensar que si escribimos

$$a_0 = A_0(r) = r - r_2$$

lograremos tener en $D_m(r)$ a $(r - r_2)$ como factor. En tal caso podríamos determinar sin dificultad $A_m(r)$, $A_{m+1}(r)$, . . . notando sin embargo que $A_0(r_2) = A_1(r_2) = \ldots = A_{m-1}(r_2) = 0$.

Escribamos formalmente entonces

$$\Phi(x, r) = (r - r_2)\, x^r + \sum_{n=m}^{\infty} A_n(r) x^{n+r}$$

como la posible segunda solución con $r = r_2$, i.e.

$$\Phi(x,\ r_2) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n(r_2)x^{n+r_2}$$

$$= x^{m+r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m+n}(r_2)\, x^n$$

$$= x^{r_1}\, g(x)$$

donde $g(x)$ es una función determinada por su serie de potencias según la fórmula anterior. Se ve entonces que llegamos a un múltiplo de la primera solución (la correspondiente a $r = r_1$) que ya teníamos.

Sin embargo, recapacitemos en la fórmula

$$L(\Phi(x,\ r)) = (r - r_2)\, F(r)\, x^r$$

Acabamos de ver que $L(\Phi(x,\ r_2)) \equiv 0$, i.e. que $\Phi(x,\ r_2)$ es una solución de la ecuación (aunque no es la solución que procuramos, pues vimos que es sólo un múltiplo de la que ya teníamos).

Derivemos formalmente respecto de r en ambos miembros de esta última expresión

$$\frac{\partial}{\partial r} L(\Phi(x,\ r)) = L\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}(x,\ r)\right) =$$

$$= F(r)x^r + (r - r_2)\,[F'(r) + (lnx)\ F(r)]\, x^r$$

de modo que

$$L\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}(x,\ r_2)\right) = 0$$

(i.e. $\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}(x,\ r_2)$ es una solución) donde

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(x,\ r_2) = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}(x,\ r)\right|_{r=r_2} =$$

$$= \left. x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(r)x^n + (lnx)\, x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r)\, x^n \right|_{r=r_2} =$$

$$= x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(r_2)x^n + (lnx)\, x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r_2)x^n =$$

$$= x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(r_2)x^n + K(lnx)\, y_1(x)$$

donde K es cierta constante y $y_1(x)$ es la solución obtenida para $r = r_1$.

Se puede demostrar que, en efecto,

$$\boxed{y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(r_2)x^n + K\,(lnx)\, y_1(x)}$$

es otra solución de la ecuación que converge para $|x| < \rho$, para algún $\rho > 0$.

Ejemplo 4

Hallar la solución general alrededor de $x_0 = 0$ para la ecuación

$$xy'' - (x + 1)y' - y = 0$$

Solución

Como siempre

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)\, a_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)\,(n + r)\, a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\, a_n x^{n+r} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\, a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

o bien:

$$r(r-2)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)\,((n+r-2)a_n - a_{n-1})x^{n+r-1} = 0$$

Entonces, las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 2$ y $r_2 = 0$.

Determinamos la solución para $r_1 = 2$. La fórmula de recurrencia se ve en este caso como

$$na_n = a_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

o sea

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$$

o bien

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

Entonces la primera solución es

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x_n = a_0x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0x^2e^x$$

(el lector puede intentar hallar la solución correspondiente a $r_2 = 0$ para que se dé cuenta, en un caso concreto, de las dificultades que surgen).

Para obtener la segunda solución procedemos como sigue. Tomamos $a_0 = A_0(r) = r - r_2 = r$.

La fórmula de recurrencia se ve como

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r-2)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

de donde

$$a_1 = \frac{a_0}{r-1} = \frac{r}{r-1}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{r} = \frac{1}{r-1}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{r+1} = \frac{1}{(r-1)(r+1)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{(r-1)(r+1)\ldots(r+n-2)} = A_n(r)$$

Debemos obtener $A_n'(r)$ (y luego evaluar en $r = r_2 = 0$). Como en el ejemplo anterior, conviene tomar logaritmos antes de derivar

$$ln\ A_n(r) = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} ln\ (r + j - 2)$$

Derivando

$$\frac{A_n'(r)}{A_n(r)} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} \frac{1}{r + j - 2}$$

de donde

$$A_n'(r) = A_n(r)\left(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} \frac{1}{r + j - 2}\right) \qquad n \geq 2$$

Observe que $A_0'(0) = 1$, $A_1'(0) = -1$. Evaluando $A_n'(r)$ en $r = r_2 = 0$, $n \geq 2$ obtenemos

$$A_n'(0) = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} \frac{1}{j - 2}$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\ [-1 + H_{n-2}]$$

donde $H_{n-2} = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{j}$, la $(n - 2)$-ésima suma armónica (tomando H_o como 0).

De modo que la segunda solución se ve como

$$y_2(x) = 1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-2} - 1}{(n-2)!} x^n + K\ (ln\ x)\ y_1(x)$$

donde $K = A_2(0) = -1$, (¿por qué?).

Para terminar esta sección comentaremos un procedimiento alternativo para obtener la solución en forma de serie de potencias alrededor de un punto singular regular cuando las raíces de su ecuación indicial difieren por un entero. El procedimiento, llamado de los coeficientes indeterminados, se basa en que, de alguna manera, ya se conoce la estructura que tiene la segunda solución de la ecuación. Es decir, se sabe que la segunda solución de la ecuación (correspondiente a la raíz r_2) es de la forma

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + K\ (ln\ x)\ y_1(x)$$

donde $y_1(x)$ es la solución (que se determina sin dificultad alguna) correspondiente a la raíz r_1. De hecho se sabe ya que $b_n = A_n'(r_2)$. Sin embargo, estos coeficientes b_n se pueden también determinar imponiendo la condición de que $y_2(x)$ satisface la ecuación diferencial. Para ejemplificar este método retomemos el ejemplo 4 anteriormente resuelto.

Tenemos la ecuación

$$xy'' - (x + 1)\, y' - y = 0$$

de la cual obtuvimos $y_1(x) = x^2 e^x$ como una solución, correspondiente a la raíz $r_1 = 2$. La otra raíz era $r_2 = 0$.

Busquemos entonces la segunda solución de la forma

$$y_2(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + K(ln\ x)\, y_1(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + K(ln\ x)\, y_1(x)$$

Derivando

$$y_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + K\frac{y_1}{x} + Ky_1'\ ln\ x$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} - K\frac{y_1}{x^2} + 2K\frac{y_1'}{x} + Ky_1''\ ln\ x$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$xy'' - (x+1)y' - y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} - K\frac{y_1}{x} +$$

$$+ 2Ky_1' + Kxy_1''\ ln\ x - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n - Ky_1 - Kxy_1'\ ln\ x -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} - K\frac{y_1}{x} - K\,y_1'\ ln\ x - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - K\,y_1\ ln\ x = 0$$

Agrupando términos y corriendo los índices de la 2a. y 4a. suma

$$K(ln\ x)\,(xy_1'' - xy_1' - y_1' - y_1) - 2K\frac{y_1}{x} + 2K\,y_1' - Ky_1 +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)b_{n-1}x^{n-1} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} = 0$$

Sabemos que $xy_1'' - (x+1)\,y_1' - y_1 = 0$ (es una identidad), de modo que la última expresión queda (tomando el primer sumando de las dos últimas series y agrupando luego todo en una sola suma).

$$-(b_0 + b_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-2)b_n - nb_{n-1}]\,x^{n-1} = K\left(2\,\frac{y_1}{x} - 2y_1' + y_1\right)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
2\,\frac{y_1}{x} - 2y_1' + y_1 &= 2xe^x - 2(x^2e^x + 2xe^x) + x^2e^x \\
&= -2x\,e^x - x^2e^x \\
&= -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!} \\
&= -2x - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}\right]x^{n+1} \\
&= -2x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\,x^{n+1}
\end{aligned}$$

De modo que:

$$-(b_0 + b_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-2)b_n - nb_{n-1}]\,x^{n-1} = -$$

$$-2\,K\,x - K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\,x^{n+1}$$

o bien

$$-(b_0 + b_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)\,(n-1)\,b_{n+1} - (n+1)b_n]\,x^n =$$

$$= -2Kx - K\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(n-1)!}\,x^n$$

o, por último:

$$-(b_0+b_1)+2(K-b_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n-1)b_{n+1}-\right.$$

$$\left.-(n+1)b_n+K\frac{n+1}{(n-1)!}\right]x^n=0$$

de donde obtenemos que

$$b_0+b_1=0$$

$$K-b_1=0$$

$$(n-1)\,b_{n+1}-b_n+K\frac{1}{(n-1)!}=0 \qquad \text{para } n\geq 2$$

La constante b_0 es arbitraria (no nula). La podemos fijar como $b_0=1$. Entonces $b_1=K=-1$, y, para $n\geq 2$ tenemos

$$b_{n+1}=\frac{b_n-\dfrac{1}{(n-1)!}}{n-1}$$

o bien, corriendo el índice y multiplicando y dividiendo por $(n-3)!$, tenemos que para $n\geq 3$

$$b_n=\frac{(n-3)!\,b_{n-1}+\dfrac{1}{n-2}}{(n-2)!}$$

de donde, con $n=3$

$$b_3=\frac{b_2+1}{1}=b_2+1$$

con $n=4$

$$b_4=\frac{b_3+\dfrac{1}{2}}{2!}=\frac{b_2+\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}{2!}$$

con $n=5$

$$b_5=\frac{2!\,b_4+\dfrac{1}{3}}{3!}=\frac{b_2+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)}{3!}$$

Es fácil ver que, en general

$$b_n = \frac{b_2 + H_{n-2}}{(n-2)!} \qquad n \geq 3$$

donde la constante b_2 es arbitraria. La fijamos $b_2 = -1$.

Tenemos entonces la segunda solución como

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + K\,(ln\ x)\, y_1(x) =$$

$$= 1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-2} - 1}{(n-2)!} x^n - (ln\ x)\, y_1(x)$$

resultado que coincide con el del ejemplo 4.

EJERCICIOS (CAPÍTULO 5. SECCIÓN 4)

1. El punto $x_0 = 0$ es un punto ordinario para la ecuación

$$y'' + xy' + y = 0$$

Demuestre que, si proponemos una solución en serie de potencias alrededor del cero, del tipo considerado en el método de Frobenius, esto es

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

entonces las raíces de la ecuación indicial son 0 y 1. ¿Qué puede concluir entonces acerca de la solución que obtendría en este caso? Demuestre, más generalmente, que si $x_o = 0$ es un punto ordinario para la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

entonces las raíces de la ecuación indicial son siempre 0 y 1.

En los siguientes ejercicios (2-11) encuentre la solución general de la ecuación dada alrededor del punto (singular regular) $x_o = 0$.

2. $x^2y'' + (x^2 + x)y' + y = 0$
3. $2x^2y'' + 2(x^2 + x)y' - y = 0$
4. $2x^2y'' + (2x^2 - 3x)y' + (x + 2)y = 0$

5. $4xy'' + 3y' + 3y = 0$

6. $x(4 - x)y'' + (2 - x)y' + 4y = 0$

7. $3x^2y'' + (3x^2 + tx)y' + (6x - 1)y = 0$

▲ 8. $x^2y'' + x(x - 3)y' + 4y = 0$

▲ 9. $x^2y'' - x(1 + 3x)y' + (1 - 6x)\, y = 0$

▲ 10. $4x^2y'' + 8x(x + 1)y' + y = 0$

▲ 11. $x^2y'' - 3xy' + (3 + 4x)y = 0$

Los siguientes ejercicios (12-15) se refieren a la ecuación hipergeométrica

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]\, y' - \alpha\beta y = 0$$

considerada en el ejemplo 2 de esta sección, así como a sus soluciones.

12. Introduzca la notación de la función factorial $(a)_n$ definida como

$$(a)_n = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad n = 0 & \\ & (a \neq 0) \\ a(a + 1)(a + 2) \ldots (a + n - 1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Demuestre que

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)} \quad n \text{ entero positivo, } a > 0$$

donde $\Gamma(x)$ es la función gamma (considerada en el apéndice de este capítulo).

13. Demuestre que la serie hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ se puede escribir como

$$f(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n x^n}{(\gamma)_n n!}$$

14. Demuestre las siguientes fórmulas

a) $F(\alpha, \beta, \beta; x) = \dfrac{1}{(1 - x)^\alpha}$ si $|x| < 1$

(Sugerencia: ver el ejercicio 1 de la sección 1 de este capítulo).

b) $xF(1, 1, 2; x) = ln\,(1 + x)$ si $|x| < 1$

(Sugerencia: ver el ejercicio 2 de la sección 1 de este capítulo).

c) $2xF\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}; x^2\right) = ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$ si $|x| < 1$

Compare con el ejercicio 15 de la sección 1 de este capítulo.

d) $$2F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; x^2\right) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \qquad \text{si } |x| < 1$$

e) $$xF\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right) = \text{arc tan } x \qquad \text{si } |x| < 1$$

(Sugerencia: ver ejercicio 18 de la sección 1 de este capítulo).

15. Demuestre que

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x)$$

Los ejercicios siguientes (16-20) se refieren a la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

que fue estudiada en la sección 3.1 de este capítulo (se estudiaron sus soluciones alrededor del punto ordinario $x_o = 0$).

16. Demuestre que $x_o = 1$ es un punto singular regular para la ecuación de Legendre.
17. Demuestre que, haciendo el cambio de variable $u = x - 1$, la ecuación de Legendre se transforma en

$$u(u + 2)y'' + 2(u + 1)y' - \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

donde $y = y(u)$, y entonces $u = 0$ será un punto singular regular para esta ecuación transformada.

18. Demuestre que la ecuación indicial en este caso tiene una raíz doble en $r = 0$.
19. Demuestre que una solución de la ecuación de Legendre alrededor de $x_0 = 1$ es

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n(\alpha + 1)_n}{(1)_n n!} \left(\frac{1 - x}{2}\right)^n$$

y que ésta puede escribirse como

$$y_1(x) = F\left(-\alpha, \alpha + 1, 1; \frac{1 - x}{2}\right)$$

20. Demuestre que si n es un entero positivo o cero, se obtiene una solución polinomial de la ecuación de Legendre.

5. LA ECUACIÓN DE BESSEL

A una ecuación de la forma

$$x^2v'' + xy' + (x^2 + p^2)y = 0$$

donde $p \geq 0$, se le llama la ecuación de Bessel de orden p.

Ésta es una ecuación sumamente importante en ciertos estudios de matemáticas, y aparece de modo natural al tratar de describir matemáticamente el movimiento de las oscilaciones de una cadena suspendida verticalmente, así como en algunos otros problemas clásicos de la física matemática.

Para estudiar las soluciones de la ecuación de Bessel de orden p, cerca del origen, observamos primero que, siendo $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$, tenemos en $x_o = 0$ un punto singular regular, de modo que podemos aplicar el método de Frobenius estudiado en la sección anterior para obtener sus soluciones.

Proponemos por solución a (para $x > 0$)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

de donde

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\, a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)(n + r)\, a_n x^{n+r-2}$$

de modo que, sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)(n + r)\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\, a_n x^{n+r} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

o bien

$$(r^2 - p^2)\, a_o\, x^r + ((r + 1)^2 - p^2)\, a_1 x^{r+1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (((n + r)^2 - p^2)\, a_n + a_{n-2})\, x^{n+r} = 0$$

por lo que la ecuación indicial es

$$r^2 - p^2 = 0$$

cuyas raíces son $r = \pm p$, y además se tiene (la fórmula de recurrencia)

$$((n + r)^2 - p^2)\, a_n + a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2$$

Obtengamos una primera solución de la ecuación de Bessel, con $r = p$ (dependiendo de si p es cero o un entero, podremos obtener una segunda solución con los métodos descritos en la sección anterior).

Como

$$((r + 1)^2 - p^2)\, a_1 = 0$$

o sea (con $r = p$)

$$(2p + 1)\, a_1 = 0$$

debemos tener entonces que $a_1 = 0$.

Además, la fórmula de recurrencia queda en este caso como

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n + p)^2 - p^2} = -\frac{a_{n-2}}{n\,(2p + n)} \qquad n \geq 2$$

de modo que $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Se tiene entonces

$$a_2 = -\frac{a_o}{2\,(2p + 2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4\,(2p + 4)} = \frac{a_o}{2\cdot 4\,(2p + 2)\,(2p + 4)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6\,(2p + 6)} = -\frac{a_o}{2\cdot 4\cdot 6\,(2p + 2)\,(2p + 4)\,(2p + 6)}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_o}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)\,(2p + 2)\,(2p + 4)\cdots(2p + 2k)}$$

$$= (-1)^k \frac{a_o}{2^{2k}\, k!\,(p + 1)\,(p + 2)\cdots(p + k)}$$

y entonces, una solución de la ecuación de Bessel es

$$y_1(x) = a_o \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{x^{2k}\, k!\,(p + 1)\,(p + 2)\ldots(p + k)}$$

Por tradición (y por conveniencia), la constante a_o se escoge como

$$a_o = \frac{1}{2^p \, \Gamma(p+1)}$$

donde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

es la función gamma*, de modo que una solución particular de la ecuación de Bessel es

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \, (p+1)(p+2) \cdots (p+k) \, \Gamma(p+1)}$$

Pero

$$(p+1)(p+2) \cdots (p+k) \, \Gamma(p+1) = \Gamma(p+k+1)$$

y entonces la solución se da como

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \, \Gamma(p+k+1)}$$

o bien (como $k! = \Gamma(k+1)$)

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \, \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

A esta función se le conoce como *función de Bessel de orden p y de primera clase,* y se denota por $J_p(x)$.

De modo que, por definición, tenemos

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \, \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

---

* En el apéndice de este capítulo se hace una exposición de la función gamma y sus propiedades más importantes —que serán usadas sin mayor explicación de esta sección—, así como de otra función pariente cercana a la función gamma, que es la función beta.

Observe que, si $2p$ no es un entero, podemos encontrar una segunda solución de la ecuación de Bessel sin mayor dificultad, aquélla correspondiente a la raíz $r = -p$. De hecho esta solución es

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}$$

y en tal caso la solución general de la ecuación sería

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$$

Note que si p es de la forma $n + \frac{1}{2}$, con $n \in N$, entonces las raíces de la ecuación indicial diferirían por $2n + 1$, un entero, y, según la discusión que hicimos en 4.2, podríamos tener problemas al determinar la segunda solución.

Sin embargo, con un poco de paciencia nos podemos convencer de que, aunque $2p = 2n + 1$ es un entero, la solución $J_{-p}(x)$ escrita arriba nos sirve como una solución linealmente independiente de $J_p(x)$. Observe, por lo pronto, que aun siendo p de la forma $n + \frac{1}{2}$, la expresión para $J_{-p}(x)$ hace perfecto sentido para toda $x > 0$. Aún más, observe que $J_p(x)$ contiene sólo potencias positivas de x, mientras que $J_{-p}(x)$ contiene también potencias negativas de x, de modo que $J_{-p}(x)$ no es acotada en una vecindad del origen y por lo tanto debe ser linealmente independiente respecto de $J_p(x)$.

En el caso de que p sea un entero nos encontramos con una situación distinta. Recuerde que la función gamma se hace infinita en todos los enteros no positivos, de modo que mientras $k < p - 1$, tendremos que los términos de la expresión en serie para $J_{-p}(x)$ (los primeros p términos) son cero, y entonces la solución $J_{-p}(x)$ se vería en este caso como:

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}$$

Sea $k = j + p$. Sustituyendo (cambiamos de índice en la suma) en la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} J_{-p} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+p}}{\Gamma(j+p+1)\,\Gamma(j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+p} \\ &= (-1)^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(j+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+p} \\ &= (-1)^p J_p(x) \end{aligned}$$

O sea que siendo p un entero (no nulo), $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente dependientes y tendremos entonces que determinar una segunda solución de la ecuación de Bessel según alguno de los procedimientos descritos en 4.2. En realidad, éste es el caso más complicado de la ecuación de Bessel y, aunque el procedimiento es un poco largo, creemos que vale la pena exponer con detalle la obtención de la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden p, p entero. La obtención de la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero (en este caso las raíces de la ecuación indicial son iguales) la dejamos para el lector en los ejercicios al final de esta sección.

Tenemos entonces nuestra ecuación

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)\, y = 0$$

donde p es un entero positivo, de la cual ya sabemos que las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = p$ y $r_2 = -p$, de modo que $r_1 - r_2 = 2p$ un entero. Ya determinamos una solución (la correspondiente a la raíz $r_1 = p$) la cual es (la función de Bessel de orden p y de primera clase)

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Nos disponemos a obtener una segunda solución, la correspondiente a la raíz $r_2 = -p$. Usaremos el procedimiento de los coeficientes indeterminados que estudiamos en 4.2.

La segunda solución que buscamos es de la forma

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + K\, J_p(x)\, ln\, x$$

donde las b_n se determinarán a continuación.

Derivando.

$$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)\, b_n x^{n-p-1} + K \frac{J_p(x)}{x} + K\, J_p'(x)\, ln\, x$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1)\, b_n x^{n-p-2} - K \frac{J_p(x)}{x^2} +$$

$$2K \frac{J_p'(x)}{x} + KJ''_p(x)\, ln\, x$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\, y = \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1)\, b_n x^{n-p} - K\, J_p(x) +$$

$$+ 2K\, x\, J_p'(x) + Kx^2 J_p''(x)\, ln\, x + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)\, b_n x^{n-p} + K\, J_p(x) +$$

$$+ K x J_p'(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p+2} + K x^2 J_p(x) \ln x - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p}$$

$$- p^2 K J_p(x) \ln x = 0$$

Agrupando términos y tomando en cuenta que

$$xJ_p''(x) + x J_p'(x) + x^2 J_p(x) - p^2 J_p(x) = 0$$

(una identidad), queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1) b_n x^{n-p} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p) b_n x^{n-p} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p+2}$$

$$- p^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p} = -2 K x J_p'(x)$$

en donde

$$J_p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)}{n!\,(p+n)!} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$$

de modo que tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1) b_n x^{n-p} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p) b_n x^{n-p} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n-p}$$

$$- p^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p} = -2K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)}{n!\,(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Tomando los dos primeros sumandos (correspondientes a $n = 0$ y $n = 1$) de las series que aparecen en el lado izquierdo que comienzan con cero y simplificando queda

$$(1-2p) b_1 x^{1-p} + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-2p) b_n + b_{n-2}] x^{n-p} =$$

$$= -2K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)}{n!\,(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

De esta expresión se obtiene la siguiente información*, igualando los coeficientes de las potencias semejantes, en ambos miembros de la misma:

$$b_1 = 0$$

---

* Se sugiere al lector que tenga papel y lápiz a un lado para que se convenza de la validez de la información obtenida.

$$b_3 = b_5 = \ldots = b_{2k+1} = 0 \qquad k \in N$$

$$n(n - 2p)\, b_n + b_{n-2} = 0 \qquad n = 2, 3, 4, \ldots, 2p - 1$$

$$\underbrace{n(n - 2p)\, b_n + b_{n-2}}_{\text{con } n = 2p + 2t} = \underbrace{-2K \frac{(-1)^n (2n + p)}{n!\,(p + n)!} \quad \frac{1}{2^{2n+p}}}_{\text{con } n = t} \quad t = 0, 1, 2, .$$

Tenemos entonces que para $n = 2, 3, 4, \ldots 2p - 1$

$$b_n = -\frac{b_{n-2}}{n\,(n - 2p)} = \frac{b_{n-2}}{n\,(2p - n)}$$

de modo que

$$b_2 = \frac{b_o}{2\,(2p - 2)}$$

$$b_4 = \frac{b_o}{2 \cdot 4\,(2p - 2)\,(2p - 4)}$$

$$\vdots$$

$$b_{2n} = \frac{b_o}{2 \cdot 4 \cdots 2n\,(2p - 2)\,(2p - 4) \ldots (2p - 2n)}$$

$$= \frac{b_o}{2^{2n}\, n!\,(p - 1)\,(p - 2) \ldots (p - n)} \qquad 1 \leq n \leq p - 1$$

b_o es una constante arbitraria. Tomemos $b_o = -2^{p-1}(p - 1)!$
Entonces

$$b_{2n} = \frac{-2^{p-1}(p - n - 1)!}{2^{2n} \cdot n!} \qquad 1 \leq n \leq p - 1$$

De hecho, por la manera como fijamos el valor de b_0, esta última fórmula vale también para $n = 0$.

Por otra parte, de la expresión

$$(2p + 2t)\,(2t)\, b_{2p+2t} + b_{2p+2t-2} = -2K \frac{(-1)^t (2t + p)}{t!\,(p + t)!} \quad \frac{1}{2^{2t+p}}$$

obtenemos, con $t = 0$

$$b_{2p-2} = -2K \frac{1}{(p - 1)!} \quad \frac{1}{2^p}$$

pero, según la fórmula obtenida para b_{2n} con $1 \leq n \leq p - 1$, tenemos con $n = p - 1$ que:

$$b_{2p-2} = \frac{-2^{p-1}}{2^{2p-2}\,(p-1)!}$$

de modo que

$$\frac{-2^{p-1}}{2^{2p-2}\,(p-1)\,!} = -\,2K\,\frac{1}{2^p\,(p-1)\,!}$$

de donde $K = 1$. Entonces, los coeficientes b_n restantes deben satisfacer

$$4\,(p + t)\,t\,b_{2p+2t} + b_{2p+2t-2} = -\,2\,\frac{(-1)^t\,(2t + p)}{t!\,(p + t)!}\,\frac{1}{2^{2t+p}} \qquad (A)$$

Observe que el coeficiente b_{2p} es arbitrario. Vamos a fijarlo con el valor

$$b_{2p} = -\,\frac{H_p}{2\,p\,!}\,\frac{1}{2^p}$$

donde H_p es la p-ésima suma armónica $H_p = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j}$

Vamos a probar por inducción que estos coeficientes b_{2p+2t}, $t = 1, 2, \ldots$ satisfacen la fórmula

$$b_{2p+2t} = \frac{(-1)^t\,[H_t + H_{t+p}]}{t!\,(p + t)\,!}\left(-\,\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^{2t+p}}\right) \qquad (B)$$

En efecto, para $t = 1$ la fórmula (A) da

$$4\,(p + 1)\,b_{2p+2} + b_{2p} = 2\,\frac{2 + p}{(p + 1)\,!}\,\frac{1}{2^{2+p}}$$

o sea que

$$\begin{aligned} 4\,(p + 1)\,b_{2p+2} &= \frac{1}{2^{1+p}}\,\frac{2 + p}{(p + 1)\,!} + \frac{H_p}{2\,p!\,2^p} \\ &= \frac{1}{2^{p+1}}\left(\frac{2 + p}{(p + 1)\,!} + \frac{H_p}{p!}\right) \end{aligned}$$

de modo que

$$4\, b_{2p+2} = \frac{1}{2^{p+1}} \frac{1}{(p+1)\,!} \left(\frac{2+p}{p+1} + H_p \right)$$

y, finalmente

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= \frac{1}{4 \cdot 2^{p+1}} \frac{1}{(p+1)\,!} (1 + H_{1+p}) \\ &= \frac{(-1)\,(H_1 + H_{1+p})}{1!\,(p+1)\,!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2^{2+p}} \right) \end{aligned}$$

que es precisamente la fórmula (B) con $t = 1$.

Suponga ahora que la fórmula (B) es válida para $t \in N$, $t > 1$, y probemos que también es válida para $t + 1$. Es decir, supongamos que

$$b_{2p+2t} = \frac{(-1)^t\,[H_t + H_{t+p}]}{t!\,(p+t)\,!} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2^{2t+p}}$$

es cierta. En tal caso, de la fórmula (A) se tiene que

$$4\,(p+t+1)\,(t+1)\,b_{2p+2t+2} = \frac{-2\,(-1)^{t+1}\,(2t+2+p)}{2^{2t+2+p}\,(t+1)\,!\,(p+t+1)\,!} - \frac{(-1)^t\,[H_t + H_{t+p}]}{t!\,(p+t)\,!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2^{2t+p}} \right)$$

de aquí se obtiene que

$$4\,(p+t+1)\,(t+1)\,b_{2p+2t+2} = \frac{4(-1)^{t+1}}{2^{2t+2+p}\,(t+1)\,!\,(p+t+1)\,!}$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right) [2t + 2 + p + (t+1)\,(p+t+1)\,(H_t + H_{t+p})]$$

de donde

$$\begin{aligned} b_{2p+2t+2} &= \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+2+p}\,(t+1)\,!\,(p+t+1)\,!} \\ &\quad \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2t+2+p}{(p+t+1)\,(t+1)} + H_t + H_{t+p} \right] \\ &= \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+2+p}\,(t+1)!(p+t+1)!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[H_t + \frac{1}{t+1} + \right. \end{aligned}$$

$$H_{t+p} + \left.\frac{1}{t+p+1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{t+1}\,[H_{t+1}\; H_{t+p+1}]}{(t+1)!(p+t+1)!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^{2t+2+p}}\right)$$

que es precisamente la fórmula (B) con $t + 1$.

En conclusión, se tiene que

$$b_1 = b_3 = \ldots = b_{2k+1} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$b_{2n} = \frac{-2^{p-1}\,(p-n-1)!}{2^{2n}\cdot n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$

$$b_{2p} = -\frac{H_p}{2p\,!}\,\frac{1}{2^p}$$

$$K = 1$$

$$b_{2p+2t} = \frac{(-1)^t\,[H_t + H_{t+p}]}{t\,(p+t)\,!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^{2t+p}}\right) \qquad t = 1, 2, \ldots$$

de modo que la segunda solución que se procura es

$$y_2\,(x) = x^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + K\,J_p\,(x)\,ln\,x$$

$$= x^{-p}\left[\sum_{n=0}^{p-1}\frac{-2^{p-1}\,(p-n-1)\,!}{2^{2n}\cdot n!}\,x^{2n} - \frac{H_p}{2\,p!}\,\frac{1}{2^p}\,x^{2p}\right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,[H_n + H_{n+p}]}{n\,!\,(p+n)\,!}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\left(\frac{1}{2^{2n+p}}\right)x^{2p+2n}\right] + J_p\,(x)\,ln\,x$$

expresión que puede reescribirse como

$$y_2\,(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)\,!}{n\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} - \frac{H_p}{2p\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^p$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,[H_n + H_{n+p}]}{n\,!\,(p+n)\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} + J_p\,(x)\;ln\,(x)$$

de modo que la solución general de la ecuación de Bessel de orden p, con p entero, se ve como

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 \Bigg[& -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \\ & - \frac{H_p}{2\,p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [H_n + H_{n+p}]}{n!\,(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} + J_p(x) \ln x \Bigg] \end{aligned}}$$

donde

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Es usual presentar como segunda solución de la ecuación de Bessel de orden p, con p entero, una combinación lineal de $J_p(x)$ y la solución que se ha obtenido $y_2(x)$. Esta función se denota por $Y_p(x)$ y es la llamada *función de Bessel de orden p* y *de segunda clase.* Esta función se define por la fórmula

$$Y_p(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} - \frac{H_p}{\pi\, p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p}$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [H_n + H_{n+p}]}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} + \frac{2}{\pi} J_p(x) \left[\ln \frac{x}{2} + \gamma \right]$$

en donde γ es la famosa ''constante de Euler''

$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n} \right) \approx 0.5772156\ldots$$

De esta manera, la solución general de la ecuación de Bessel de orden p, p entero, se presenta como

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$$

EJERCICIOS (CAPÍTULO 5. SECCIÓN 5)

1. Considere la ecuación de Bessel de orden cero

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

En este caso las raíces de la ecuación indicial son iguales $r_1 = r_2 = 0$. Demuestre que una primera solución de la ecuación viene dada por

$$J_o(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

conocida como función de Bessel de orden cero y de primera clase. Use ahora el método estudiado en la sección 4.1 para demostrar que una segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero es

$$y_2(x) = J_o(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

(comúnmente se presenta la solución general de la ecuación de Bessel de orden cero como

$y = C_1 J_o(x) + C_2 Y_o(x)$, donde $Y_o(x) = \dfrac{2}{\pi}(y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_o(x))$ donde γ es la constante de Euler. A la función $Y_o(x)$ se le conoce como función de Bessel de orden cero y de segunda clase).

2. Considere la ecuación de Bessel de orden uno

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1) y = 0$$

Aplique el método de Frobenins y lo estudiado en la sección 4.2 para demostrar que la solución general de esta ecuación es

$$y = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x)$$

donde

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!\,n!}$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_1(x)] \quad \text{(por definición)}$$

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1})}{2^{2n} n!(n-1)!} x^{2n}\right]$$

3. Demuestre que la función

$$y_1(x) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

es una solución de la ecuación de Bessel de orden 1/2.

Concluya entonces que la función

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x$$

satisface la ecuación de Bessel de orden 1/2.

Demuestre que una segunda solución de esta ecuación es

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$$

En los siguientes ejercicios (4 — 9) se consideran algunas de las propiedades más importantes de las funciones de Bessel.

4. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$$

5. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$$

6. Usando los resultados de los ejercicios 4 y 5 deduzca que

$$x^p J_p'(x) + px^{p-1} J_p(x) = x^p J_{p-1}(x)$$

$$x^{-p} J_p'(x) - px^{-p-1} J_p(x) = x^{-p} J_{p+1}(x)$$

7. Usando los resultados del ejercicio 6 deduzca que

a) $J_p'(x) = \dfrac{J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)}{2}$

b) $J_{p+1}(x) = \dfrac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$

8. Use el inciso *b*) del ejercicio anterior y las fórmulas deducidas en el ejercicio 3 para demostrar que

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right)$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{2 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x\right)$$

9. Este ejercicio pretende probar el siguiente importante resultado acerca de los ceros de las funciones $J_p(x)$ y $J_{p+1}(x)$: "los ceros de $J_p(x)$ y $J_{p+1}(x)$ son distintos y se alternan en la parte positiva del eje de las x".

   a) Demuestre que

   $$xJ_p'(x) = p\,J_p(x) - x\,J_{p+1}(x)$$

   (ver el resultado del ejercicio 6).

   b) Sea x_o tal que $J_p(x_o) = 0$. Suponga que $J_{p+1}(x_o) = 0$.
   Concluya entonces que $J_p'(x_o) = 0$ y use el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales para concluir que en tal caso se tendría $J_p(x) = 0$ para toda x (lo cual es una contradicción). De esto deduzca entonces que los ceros de $J_p(x)$ y $J_{p+1}(x)$ son distintos.

   c) Sean $x_1 < x_2$ dos ceros consecutivos de $J_p(x)$. Demuestre entonces que

   $$J_{p+1}(x_1) = -J_p'(x_1)$$

   $$J_{p+1}(x_2) = -J_p'(x_2)$$

   d) Demuestre que si x_1 y x_2 son dos ceros consecutivos de $J_p(x)$ $(x_1 < x_2)$, entonces $J_p'(x_1)\,J_p'(x_2) < 0$.

   e) Concluya entonces usando los dos incisos anteriores que entre x_1 y x_2 debe existir un x_3 tal que $J_{p+1}(x_3) = 0$. Esto era lo que se quería probar.

Se muestran en seguida las gráficas de $J_o(x)$, $J_1(x)$ y $J_2(x)$. El lector puede verificar el resultado del ejercicio anterior.

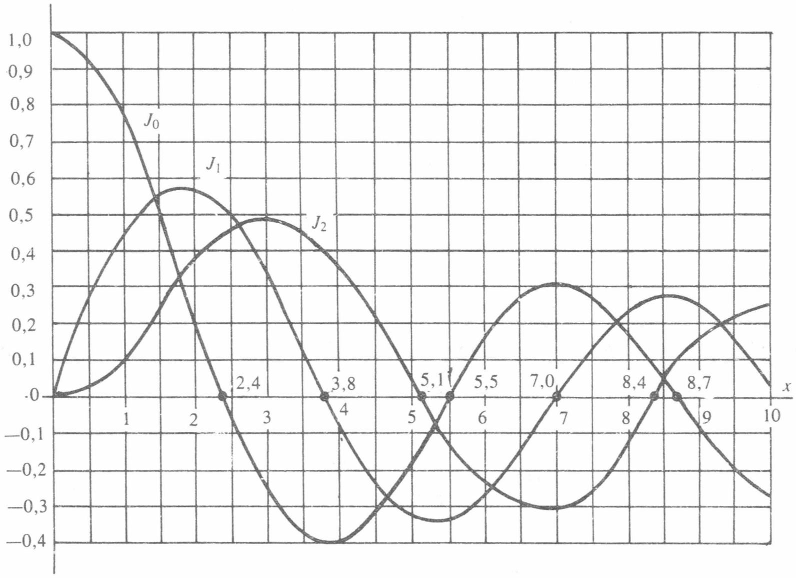


Figura 2. Comportamiento alterno de los ceros de J_0, J_1, J_2.

APÉNDICE AL CAPÍTULO 5

LA FUNCIÓN GAMMA Y LA FUNCIÓN BETA

Se define la función gamma del argumento x denotada por $\Gamma(x)$, por medio de la integral impropia

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

(para aquellos valores de x para los que la integral es convergente). Se puede probar que la integral converge para toda x positiva.

Una de las propiedades más importantes de la función $\Gamma(x)$ es

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad x > 0$$

la cual se deduce rápidamente integrando por partes a $\Gamma(x)$, tomando $u = e^{-t}$ y $dv = t^{x-1}\, dt$. En tal caso $du = -e^{-t}\, dt$ y $v = \frac{t^x}{x}$ y entonces

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = \frac{t^x e^{-t}}{x}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t} t^x\, dx$$

$$= \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

Además observe que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Bigg|_0^\infty = 1$$

De lo anterior se desprende que si x_o es un entero no positivo, $\Gamma(x_o)$ no existe.

La propiedad anterior de la función gamma se puede reescribir como

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

De modo que se tiene que, si $n \in N$, entonces $\Gamma(n + 1) = n!$. En efecto, si $n = 1$, se tiene (con $x = 1$), $\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1.1 = 1!$. Suponga ahora que la fórmula vale para n, i.e. $\Gamma(n + 1) = n!$. Entonces, $\Gamma(n + 2) = \Gamma(n + 1 + 1) = (n + 1)\,\Gamma(n + 1) = (n + 1)\,n! = (n + 1)!$

De modo que la función gamma (de x) coincide con la función factorial (de $x - 1$) para los valores de x enteros (mayores o iguales que 1). Bajo esta perspectiva la función gamma viene a ser una generalización de la función factorial.

La gráfica de $\Gamma(x)$ es mostrada en la siguiente figura

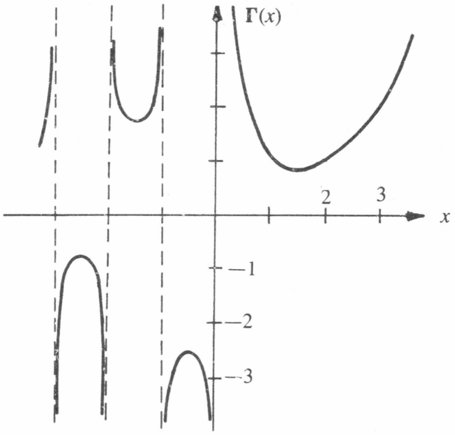


Figura 3. La función gamma.

Observe también que de la misma propiedad se deduce que

$$\Gamma(p + 1)(p + 1)(p + 2) \ldots (p + k) = \Gamma(p + k + 1)$$

con $k \in N$. La demostración de este hecho se deja como un sencillo ejercicio para el lector.

Para obtener el valor de $\Gamma(n + \frac{1}{2})$, donde n es algún natural, necesitamos conocer sólo el valor de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, pues según la propiedad mencionada anteriormente se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Calculemos el valor $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. De la definición tenemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-1/2}\, dt$$

Haciendo $t = u^2$, obtenemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2}\, du$$

de modo que

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4 \left(\int_0^\infty e^{-u^2}\, du\right) \left(\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv\right) =$$

$$4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

Pasando a las coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r \operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

(pues el primer cuadrante $u, v \geq 0$ queda descrito en coordenadas polares como $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r \geq 0$ y el jacobiano de la transformación a polares es $J\left(\frac{u, v}{r, \theta}\right) = r$).

Entonces

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -2 \int_0^{\pi/2} [e^{-r^2}\Big|_0^\infty]\, d\theta = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

y finalmente tenemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Entonces, por ejemplo

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

Otra propiedad importante de la función gamma es

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}$$

Para ver la validez de esta fórmula escribimos

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

$$\Gamma(1-x)=\int_0^\infty e^{-s}\,s^{-x}\,ds$$

de modo que

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\left(\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-s}\,s^{-x}\,ds\right)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}\,s^{-x}\,t^{x-1}\,ds\,dt$$

Introducimos las nuevas variables u, v por medio de las fórmulas

$$u=s+t$$

$$v=\frac{t}{s}$$

Obtenemos

$$s=\frac{u}{v+1}$$

$$t=\frac{uv}{v+1}$$

$$J\left(\frac{s,\ t}{u,\ v}\right)=\frac{u}{(v+1)^2}$$ (el jacobiano de la transformación)

y entonces

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u}v^{x-1}\,\frac{du\,dv}{1+v}=$$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-u}\,du\right)v^{x-1}\,\frac{dv}{1+v}=\int_0^\infty\frac{v^{x-1}}{1+v}\,dv$$

Para la evaluación de esta última integral se requiere echar mano de argumentos con cierto grado de sofisticación matemática que caen fuera del contexto de este apéndice (por ejemplo, usando el teorema de los residuos estudiado en variable compleja). Damos sólo el resultado

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v}\,dv = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$$

lo que demuestra finalmente la fórmula.

Otra fórmula importante involucrando a la función gamma es la llamada fórmula de duplicación.

$$2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

Se define la función beta de los argumentos m y n, denotada por $B(m, n)$ como la integral

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

Se puede demostrar que la integral $B(m, n)$ converge para valores positivos de m y n.

El cambio de variable $Z = 1 - x$ en la integral $B(m, n)$, muestra la simetría de esta función, i.e. se obtiene por resultado $B(m, n) = B(n, m)$.

Para ver la relación que existe entre la función beta y la función gamma procedemos como sigue. En la integral que define a $\Gamma(x)$, hacemos el cambio de variable $t = ps$, donde $p > 0$. Nos queda

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-ps}\,(ps)^{x-1}\,p\,ds = p^x \int_0^\infty e^{-ps}\,s^{x-1}\,ds$$

de donde

$$\int_0^\infty e^{-ps}\,s^{x-1}\,ds = \frac{\Gamma(x)}{p^x} \qquad \textbf{(A)}$$

Ahora, en la integral que define a $B(m, n)$ hacemos

$$u = \frac{x}{1-x}$$

$\left(\text{y por lo tanto } x = \frac{u}{u+1},\ dx = \frac{du}{(u+1)^2}\right)$ quedándonos

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}\,du \qquad \textbf{(B)}$$

Si en (**A**) hacemos $p = 1 + u$, $x = m + n$, obtenemos

$$\frac{1}{(1 + u)^{m+n}} = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-(1+u)s} s^{m+n-1} \, ds$$

Entonces (**B**) queda después de sustituir esta última expresión

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-(1+u)s} s^{m+n-1} \, du \, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-s} s^{m+n-1} \, ds \int_0^\infty e^{-us} u^{m-1} \, du$$

Usando nuevamente (**A**), la última integral de esta expresión queda como $\Gamma(m)/s^m$, de modo que

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-s} s^{n-1} \, ds = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Hemos obtenido entonces la importante fórmula

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Una definición alternativa para la función beta es

$$B(m,n) = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta \, d\theta$$

La equivalencia con nuestra primera definición de $B(m, n)$ se puede ver haciendo en ésta la sustitución $x = \operatorname{sen}^2 \theta$.

Note que el conocimiento de estas funciones (gamma y beta) trae consigo algunas comodidades realmente notables. Sólo para ejemplificar con un ejercicio de cálculo vea que

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{1/2} \theta \cos^{-1/2} \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Se sugiere al lector hacer esta integral con las herramientas tradicionales del cálculo. Esperamos que note la diferencia.

Bibliografía

[1] RAY WYLIE. *Differential Equations.* Mc. Graw Hill (1979).

[2] KISELIOV, KRASNOV, MAKARENKO, *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Ed. Mir, Moscú (1979).

[3] L. ELSGOLTZ. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional.* Ed. Mir, Moscú (1977).

[4] M. BRAUN. *Differential Equations and their Applications.* 2nd. Edition. Springer Verlag (1979).

[5] BOYCE-DIPRIMA. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera.* 3a. Ed. Limusa-Wiley (1978).

[6] CODDINGTON. *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Prentice Hall, INC. (1961).

[7] E. INCE. *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications INC. (1956).

[8] KREIDER, KULLER, OSTBERG. *Equacões Diferenciais.* Editora Edgar Blucher (São Paulo, Brasil).

[9] PONTRIAGUIN. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Ed. Aguilar (1973).

[10] GEORGE F. SIMMONS. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas.* Mc. Graw Hill (1977).

[11] MURRAY R. SPIEGEL. *Applied Differential Equations.* 3rd. Edition. Prentice Hall (1981).

[12] KARTASHOV, A.P., ROZHDENSTVENSKI, B.L. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Fundamentos del Cálculo Variacional* Ed. Reverté (1980).

[13] KREIDER, KULLER, OSTBERG, PERKINS. *Introducción al Análisis Lineal.* Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A. México (1980).

[14] DANKO, P.E., POPOV, A.G., KOZHEVNIKOVA, T.YA. *Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas.* Ed. Mir, Moscú (1983).

[15] BOLGOV, V., DEMIDOVICH, B., EFIMENKO, V. Y OTROS. *Problemas de las Matemáticas Superiores.* Ed. Mir, Moscú (1983).

[16] GUERASIMOV, YA., DREVING, V., ERIOMIN, E. *Curso de Química Física.* Vol. II. Ed. Mir, Moscú (1971).

[17] MESHERSKI, I. *Problemas de Mecánica Teórica.* Ed. Mir, Moscú (1974).

[18] LEVENSPIEL, O. *Ingeniería de las Reacciones Químicas.* Ed. Reverté (1975).

[19] G.N. BERMAN. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* Ed. Mir, Moscú (1983).

[20] ELON LAGES LIMA. *Curso de Análise.* Vols. I y II. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Río de Janeiro, Brasil (1981).

[21] JAMES R. NEWMAN. *Enciclopedia Sigma. El Mundo de las Matemáticas.* Vols. I y V. Grijalbo, México.

[22] ALEKSANDROV, KOLMOGOROV Y OTROS. *La Matemática: su Contenido, Métodos y Significado.* Vol. I. Alianza Universidad (1976).

[23] IAN STEWART. *Conceptos de Matemática Moderna.* Alianza Universidad (1977).

[24] ALEXANDRE KOYRE. *Estudios Galileanos.* Siglo XXI, México (1981).

[25] DIRK J. STRUIK. *A Source Book in Mathematics.* Harvard.

[26] MORRIS KLINE. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* OXFORD UNIVERSITY PRESS, (1972).

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA 31 DE MAYO DE 1989
EN LOS TALLERES DE IMPRESIONES EDITORIALES, S. A.
LAGO CHALCO 230, COL. ANAHUAC
MEXICO, D. F.

LA EDICION CONSTA DE 2,000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICION

530

OBRAS AFINES:

ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

Próspero García M.
Carlos de la Lanza E.

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel muy importante en distintas disciplinas científicas. En sus inicios aparecen en problemas mecánicos y geométricos, posteriormente su campo de aplicación se va extendiendo a todas las ramas de la física y en los últimos años a disciplinas tan diversas como la biología, la economía, la sociología y la fisiología.

De más reciente aparición son las ecuaciones en diferencias, las cuales han adquirido importancia relevante con el estudio de problemas discretos.

Los cuatro primeros capítulos de esta obra se refieren a las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales, y en los tres últimos se presenta el material relativo a las ecuaciones en diferencias.

En el capítulo I aparecen los conceptos, la teoría básica y algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales; en el capítulo II se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales y en el capítulo III la transformada de Laplace como un operador que permite resolver tanto las ecuaciones como los sistemas lineales. En este mismo orden se presenta la teoría y las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias en los capítulos V, VI y VII, incluyendo la transformada geométrica ordinaria y una breve explicación de las ecuaciones en derivadas parciales.

ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA
3A. EDICIÓN

William E. Boyce
Richard C. DiPrima

Por su contenido y estructura esta obra constituye un clásico en la materia. Se ha escrito de tal forma que hace del lenguaje matemático, en ocasiones complejo y abstracto, un lenguaje claro y accesible. Además, en ella se expone con claridad y cuidado la relación entre la teoría y sus aplicaciones.

Los temas que abarca, todos importantes y de gran interés, son: ecuaciones diferenciales de primer orden, soluciones por el método de series de potencias, transformadas de Laplace, sistemas de ecuaciones lineales, métodos numéricos, ecuaciones no lineales y estabilidad, ecuaciones diferenciales parciales y series de Fourier.

Por sus excelentes cualidades didácticas esta obra es un libro de texto para los cursos de licenciatura que se imparten sobre la materia en las carreras del área de ciencias físico-matemáticas.

Un curso de ecuaciones diferenciales elementales es un medio óptimo para que el estudiante capte la relación existente entre las matemáticas puras y las ciencias físicas o la ingeniería. Antes de que el ingeniero o el científico pueda usar con confianza las ecuaciones diferenciales debe dominar las técnicas de solución y tener un mínimo de conocimiento sobre la teoría básica. Por otra parte, el estudiante de matemáticas puras con frecuencia se beneficia si conoce algunas maneras en las que la necesidad de resolver problemas específicos ha estimulado el trabajo de naturaleza más abstracta.

Este libro está destinado a usarse como texto en cursos de ecuaciones diferenciales para alumnos de Ciencias e Ingeniería. En él, el autor recoge la experiencia de varios años en los que ha impartido dicha materia en la Escuela de Ingeniería de la Universidad Panamericana.

El programa que se propone cubrir es el tradicional: Inicia con las ecuaciones de primer orden, continúa con las ecuaciones lineales de orden superior y termina con los métodos de series de potencias. Se presenta un panorama general de ese apasionante y vasto mundo de las ecuaciones diferenciales hasta antes de los progresos que ha tenido esta teoría durante los siglos XIX y XX.

Además del material que se requiere para el curso, la obra reúne tres características sobresalientes:

Cuenta con una gran cantidad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a la Mecánica, a la Química, a la Biología y a otras ciencias, además de incluir un estudio sobre el fenómeno de vibraciones.

Presenta un estudio riguroso de las ecuaciones exactas, para lo cual utiliza herramientas del análisis matemático (integrales curvilíneas). Asimismo ofrece un teorema de existencia y unicidad para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Finalmente, contiene un estudio histórico del problema de la braquistócrona con las soluciones propuestas por Johann y Jakob Bernoulli.

La obra contiene alrededor de 100 ejemplos resueltos y más de 600 problemas propuestos para que el estudiante los resuelva, destacando aquellos que requieren de más amplios conocimientos matemáticos o mayor habilidad algebraica.

U.N.R.C.
Biblioteca Central
41409

AREA: MATEM

ISBN 968-18-3057-1